Εφαρμογή #2:

Για το πολλαπλό μοντέλο παλινδρόμησης $y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + ... + \beta_p x_{ip} + \varepsilon_i$,
$H_0 : \mathrm{A}\underline{\beta} = \underline{0}$, όπου A είναι $r \times p$ πίνακας με $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = r$.

Θέτουμε $\underline{y} = \mathrm{X}\underline{\beta} + \underline{\varepsilon}$, και θεωρούμε το μετασχηματισμό $\underline{\mu} = \mathrm{X}\underline{\beta}$. Τότε, $\underline{\mu} \in V$, όπου V οχώρος που παράγεται από τις στήλες του X, και συνεπώς $\dim(V) = p$. Το μοντέλο μετασχηματίζεται σε $\underline{y} = \underline{\mu} + \underline{\varepsilon}$ οπότε η υπόθεση

$H_0 : \mathrm{A}\underline{\beta} = \underline{0} \Leftrightarrow H_0 : \mathrm{A}(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{X}^T\underline{\mu} = 0 \Leftrightarrow H_0 : C^T\underline{\mu} = 0$, όπου $\underset{n\times r}{C} = \underset{n\times p}{\mathrm{X}}\underset{p\times p}{(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}}\underset{p\times r}{\mathrm{A}^T}$.

Συνεπώς, η μηδενική υπόθεση παίρνει τη μορφή

$H_0 :\ \underline{\mu} \in W \quad = \{\underline{\mu} \in V : C^T\underline{\mu} = 0\} = \{\underline{\mu} \in V : \underline{\mu} \perp$ στήλες του $C\}$
$= \{\underline{\mu} \in V : \underline{\mu} \perp$ υπόχωρο που παράγουν οι στήλες του $C \equiv U\}$
$= \{\underline{\mu} \in V : \underline{\mu} \perp U\}$.

Ο U είναι υπόχωρος του V

Έστω $\underline{u} \in U$. Τότε $\underline{u} = \sum_{i=1}^{I} a_i \underline{c}_i$, όπου $\underline{c}_i$ είναι οι στήλες του $C : C = (\underline{c}_1, ..., \underline{c}_r)$.

Ισοδύναμα $\underline{u} = C\underline{a}$, $\underline{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}$. Αλλά $\underline{u} = \mathrm{X}\underbrace{(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{A}^T\underline{a}}_{\underline{b}} = \mathrm{X}\underline{b} \Rightarrow \underline{u} \in V$

αφού είναι γραμμικός συνδυασμός των στηλών του X.
Άρα ο U είναι υπόχωρος του V.

Συνεπώς το σύνολο $W = \{\underline{\mu} \in V : \underline{\mu} \perp U\} = V / U$.

Άρα το W είναι το ορθογώνιο συμπλήρωμα του U ως προς V και συνεπώς το ορθογώνιο συμπλήρωμα του W ως προς V είναι ο U.
Επομένως, $\mathrm{P}_{V/W}\,\underline{y} = \mathrm{P}_U\,\underline{y}$ γιατί $V / W = \{\underline{\mu} \in V : \underline{\mu} \perp W\} = \{\underline{\mu} \in V : \underline{\mu} \in U\} = U$.

Χρειαζόμαστε τον πίνακα βάσης του U. Θα δείξω ότι είναι ο πίνακας C.
α) Οι στήλες του C παράγουν εξ' ορισμού τον U
β) Οι στήλες του C είναι γραμμικά ανεξάρτητες,

$\sum_{i=1}^{r} b_i \underline{c}_i = 0 \Leftrightarrow C\underline{b} = \underline{0} \Leftrightarrow \mathrm{X}(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{A}^T\underline{b} = \underline{0} \Rightarrow \mathrm{X}^T[\mathrm{X}(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{A}^T\underline{b}] = \mathrm{X}^T \cdot \underline{0}$
$\Rightarrow \mathrm{A}^T \cdot \underline{b} = 0 \Rightarrow \underline{b} = 0$, αφού $\mathrm{rank}(\mathrm{A}) = r$.

Άρα $\mathrm{P}_U = C(C^TC)^{-1}C$ και

$\|\mathrm{P}_U\,\underline{y}\|^2 = \underline{y}^T\,\mathrm{P}_U\,\underline{y} = \underline{y}^T\,C(C^TC)^{-1}C\,\underline{y}$
$= (\mathrm{A}\hat{\underline{\beta}})^T(\mathrm{A}(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{A}^T)^{-1}(\mathrm{A}\hat{\underline{\beta}})$.

$\dim(V / W) = r$

και $$F = \frac{(\mathrm{A}\hat{\underline{\beta}})^T(\mathrm{A}(\mathrm{X}^T\mathrm{X})^{-1}\mathrm{A}^T)(\mathrm{A}\hat{\underline{\beta}}) / r}{\|\underline{y} - \mathrm{X}\hat{\underline{\beta}}\|^2 / (n - p)} \sim F_{r;n-p}$$

<u>Παράδειγμα:</u>

$$y_1 = a_1 + \varepsilon_1$$
$$y_2 = 2a_1 - a_2 + \varepsilon_2$$
$$y_3 = a_1 + 2a_2 + \varepsilon_3 .$$

$H_0 : a_1 = a_2$

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{pmatrix}$$

και $H_0 : \begin{pmatrix} 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = 0$, rank$(\mathrm{A}) = 1$.

Όλη η θεωρία μπορεί να εφαρμοστεί με $n = 3, p = 2, r = 1$.

$$\mathrm{X}^T \mathrm{X} = \begin{pmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$$

$$\underline{\hat{\beta}} = (\mathrm{X}^T \mathrm{X})^{-1} \mathrm{X}^T \underline{y} = \begin{pmatrix} \dfrac{y_1 + 2y_2 + y_3}{6} \\ \dfrac{1}{5}(-y_2 + y_3) \end{pmatrix}.$$

Αλλά $\mathrm{A}\underline{\hat{\beta}} = (\hat{a}_1 - \hat{a}_2)$

$$\mathrm{A}(\mathrm{X}^T \mathrm{X})^{-1} \mathrm{A}^T = 11/30$$

οπότε $F = \dfrac{(\hat{a}_1 - \hat{a}_2)^2}{\frac{11}{30} MS_{res}} \sim F_{1;1}$ όταν ισχύει η H_0,

όπου $SS_{res} = \| \underline{y} - \mathrm{X}\underline{\beta} \|^2$ και $MS_{res} = SS_{res}/1$.

Παρατηρώ ότι $\| \underline{y} - \mathrm{X}\underline{\beta} \|^2 = \underline{y}^T \cdot \underline{y} - \underline{\hat{\beta}}^T \mathrm{X}^T \mathrm{X} \underline{\hat{\beta}}$

$$= y_1^2 + y_2^2 + y_3^2 - 6\hat{a}_1^2 - 5\hat{a}_2^2$$