ΑΠΛΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

Θεωρώ ότι έχω μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή X και μία εξαρτημένη μεταβλητή Y.

Αν χρησιμοποιούμε περισσότερες από μία ανεξάρτητες μεταβλητές $(\mathrm{X}_1, \mathrm{X}_2, ..., \mathrm{X}_n)$, τότε έχουμε πολλαπλή παλινδρόμηση. (Θα μελετηθεί σε επόμενα μαθήματα.)

Υποθέτουμε ότι: Η Y είναι τυχαία μεταβλητή.
Η X παίρνει προκαθορισμένες τιμές, δηλαδή δεν είναι τυχαία μεταβλητή. (Αν θεωρήσουμε την X ως τυχαία μεταβλητή, τότε θεωρούμε πως την έχουμε σταθεροποιήσει σε συγκεκριμένες τιμές.)

Διαθέτουμε δεδωμένα $(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$, $i = 1,2,...,n$, έτσι ώστε Y_i να είναι η παρατήρηση που αντιστοιχεί στην τιμή $\mathrm{X} = x_i$.

Πρόβλημα: Θέλουμε να προσδιορίσουμε τη βέλτιστη σχέση που συνδέει την Y με τη X. (Για την ακρίβεια, τη σχέση μεταξύ της Y, δεδομένου της X, δοθέντος.)

Η συνάρτηση που ψάχνουμε θα είναι της μορφής $g(\mathrm{Y}/\mathrm{X} = x) = f(x)$. Η βέλτιστη αυτή σχέση μπορεί να βρεθεί ελαχιστοποιώντας το μέσο τετραγωνικό σφάλμα μεταξύ Y και $f(x)$.

Άρα $\min_f \mathrm{E}[\mathrm{Y} - f(x)] \Rightarrow f(x) = \mathrm{E}(\mathrm{Y}/\mathrm{X} = x)$.

Με βάση τα δεδομένα μας, μπορούμε να εκτιμήσουμε την $f(x)$ με $\hat{f}(x)$, δηλαδή εκτιμήσαμε την $\mathrm{E}(\mathrm{Y}/\mathrm{X} = x) = f(x)$ με $f(x) = \hat{\mathrm{E}}(\mathrm{Y}/\mathrm{X} = x) = \hat{f}(x)$.

Θέτοντας $\mathrm{Y} = \mathrm{E}(\mathrm{Y}/\mathrm{X} = x) = f(x)$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι κατά μέσο όρο, η Y έχει τιμή $\hat{f}(x)$.

Για την εκτίμηση της $f(x)$ κάνουμε γραφική παράσταση των $(\mathrm{X}_i, \mathrm{Y}_i)$, $i = 1,2,...,n$, με βάση την οποία υιοθετούμε κάποιο μοντέλο για την $\mathrm{E}(\mathrm{Y}/\mathrm{X})$.

π.χ. $\mathrm{E}(\mathrm{Y}/\mathrm{X}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X}$ (γραμμικό μοντέλο)
$\mathrm{E}(\mathrm{Y}/\mathrm{X}) = \exp(\beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X})$ (εκθετικό μοντέλο)

(Σημείωση: Για ευκολία, θα χρησιμοποιούμε Y αντί Y/X και $\mathrm{E}(\mathrm{Y})$ αντί $\mathrm{E}(\mathrm{Y}/\mathrm{X})$.)

ΑΠΛΟ ΓΡΑΜΜΙΚΟ ΜΟΝΤΕΛΟ ή
ΑΠΛΗ ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΠΑΛΙΝΔΡΟΜΗΣΗ

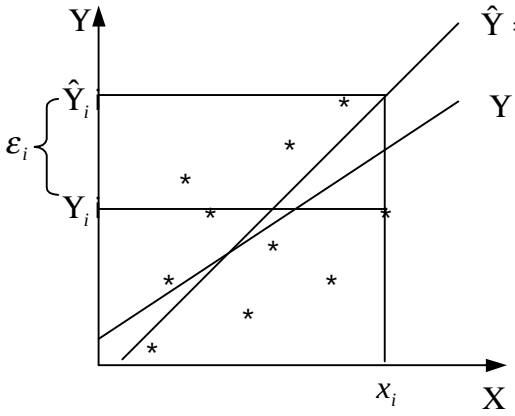
Είναι το μοντέλο με εξίσωση παλινδρόμησης $\mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X}$ (1), όπου β_0, β_1 είναι άγνωστοι παράμετροι, οι οποίοι ονομάζονται συντελεστές παλινδρόμησης.

Το μοντέλο ονομάζεται απλό γιατί έχει μόνο μία ανεξάρτητη μεταβλητή X και γραμμικό ως προς τις παραμέτρους β_0, β_1 και ως προς την ανεξάρτητη μεταβλητή X.

Δοθέντος του δείγματος $(\mathrm{X}_1, \mathrm{Y}_1), (\mathrm{X}_2, \mathrm{Y}_2), ..., (\mathrm{X}_n, \mathrm{Y}_n)$, αναζητώ εκτιμήτριες των παραμέτρων β_0, β_1.

Ορίζουμε $\varepsilon = \mathrm{Y} - \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \mathrm{Y} - \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X} \Rightarrow \mathrm{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X} + \varepsilon$ και από την (1) έχουμε ότι $\mathrm{E}(\varepsilon) = 0$.

Από αυτό το μόντέλο, έχουμε για κάθε μέτρηση $\mathrm{Y}_i = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i + \varepsilon_i$, $i = 1,2,...,n$, με $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$.



$\hat{\mathrm{Y}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}$ (εκτιμώμενο μοντέλο)

$\mathrm{Y} = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X}$ (πραγματικό μοντέλο)

Εκτιμούμε τα β_0, β_1 με τη μέθοδο ελαχίστων τετραγώνων, δηλαδή ελαχιστοποιούμε την ολική απόσταση των τετραγώνων των σφαλμάτων, $\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2}$.

Συμβολικά:

$$\min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i^{\,2} = \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} [\mathrm{Y}_i - \mathrm{E}(\mathrm{Y}_i)]^2 = \min_{\beta_0,\beta_1} \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i)^2 = \min_{\beta_0,\beta_1} S(\beta_0, \beta_1).$$

Όμως,

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i) = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{Y}} \qquad \text{και}$$

$$\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0 \Rightarrow -2\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i\right)\cdot \mathrm{X}_i = 0 \Rightarrow \hat{\beta}_0 \cdot \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i + \hat{\beta}_1 \cdot \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i{}^2 = \sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i \cdot \mathrm{Y}_i \ .$$

Άρα,

$$\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \overline{\mathrm{X}} = \overline{\mathrm{Y}} \qquad \text{και}$$

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)\cdot\left(\mathrm{Y}_i - \overline{\mathrm{Y}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2}$$

<u>Σημείωση:</u> Οι $\frac{\partial S}{\partial \beta_0} = 0$ και $\frac{\partial S}{\partial \beta_1} = 0$, λέγονται πρώτη και δεύτερη κανονική εξίσωση αντίστοιχα.

Τώρα, από την (1) και απο τις πιο πάνω εξισώσεις, έχω:

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{E}(\mathrm{Y}) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X} \\ \hat{\mathrm{Y}} = \hat{\mathrm{E}}(\mathrm{Y}) \end{array}\right\} \Rightarrow \hat{\mathrm{Y}} = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X} \quad (2)$$

Για $\mathrm{X} = \mathrm{X}_i$, η τιμή της $\hat{\mathrm{Y}}$ από την (2) συμβολίζεται με $\hat{\mathrm{Y}}_i$ και $\hat{\mathrm{Y}}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i$ (εκτιμώμενη τιμή της Y για $\mathrm{X} = \mathrm{X}_i$).

<u>Παρατηρήσεις:</u>

(1) Ένας άλλος τρόπος εκτίμησης των β_0, β_1 είναι η ελαχιστοποίηση των απολύτων τιμών των ε_i, δηλαδή, $\min_{\beta_0,\beta_1}\sum_{i=1}^{n}\left|\varepsilon_i\right| = \min_{\beta_0,\beta_1}\sum_{i=1}^{n}\left|\mathrm{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i\right|$.
Η μέθοδος των ελαχίστων τετραγώνων πλεονεκτεί στο ότι παραγωγίζεται παντού, ενώ οι απόλυτες τιμές δεν παραγωγίζονται στο 0.

(2) Εναλλακτική μορφή του $\hat{\beta}_1$:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)\cdot\left(\mathrm{Y}_i - \overline{\mathrm{Y}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2}$$

Αλλά, $\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})\cdot(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}})=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})\cdot\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\cdot\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})=\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})\cdot\mathrm{Y}_i$.

Άρα, $\hat{\beta}_1=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})\cdot\mathrm{Y}_i}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}$, αλλά θέτοντας $\kappa_i=\dfrac{(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}$, $i=1,2,...,n$,

έχουμε ότι: $\hat{\beta}_1=\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\cdot\mathrm{Y}_i$, δηλαδή βλέπουμε ότι το $\hat{\beta}_1$ είναι γραμμικός συνδυασμός των παρατηρήσεων Y_i.

Ισχύει ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}\right]=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}=\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i-n\cdot\overline{\mathrm{X}}}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}=0$$

$$\sum_{i=1}^{n}\kappa_i{}^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\frac{(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}\right]^2=\frac{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}{\left[\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2\right]^2}=\frac{1}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}$$

(3) Εναλλακτική μορφή του $\hat{\beta}_0$:

$$\hat{\beta}_0=\overline{\mathrm{Y}}-\hat{\beta}_1\cdot\overline{\mathrm{X}}=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i-\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\cdot\mathrm{Y}_i\right)\cdot\overline{\mathrm{X}}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{n}-\kappa_i\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)\cdot\mathrm{Y}_i \quad ,$$

όπου $\kappa_i=\dfrac{(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})^2}$, $i=1,2,...,n$.

Παρατηρούμε ότι και το $\hat{\beta}_0$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των παρατηρήσεων Y_i και επιπλέον βλέπουμε ότι δεν εξαρτάται από το $\hat{\beta}_1$ (όπως στην αρχική του μορφή).

(4) Εναλλακτική μορφή για το εκτιμώμενο μοντέλο:

$\hat{\mathrm{Y}}=\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}=\left(\overline{\mathrm{Y}}-\hat{\beta}_1\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)+\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}=\overline{\mathrm{Y}}+\hat{\beta}_1\cdot(\mathrm{X}-\overline{\mathrm{X}})$, δηλαδή για $\mathrm{X}=\mathrm{X}_i$ θα έχω $\hat{\mathrm{Y}}_i=\overline{\mathrm{Y}}+\hat{\beta}_1\cdot(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}})$.

Άρα παρατηρούμε ότι δεν χρειάζεται να γνωρίζουμε το $\hat{\beta}_0$ για να εκτιμήσουμε το $\hat{\mathrm{Y}}$.

(5) Για την εκτίμηση των $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ δεν χρειαστήκαμε καμία πιθανοθεωρητική ιδιότητα για τα $\mathbf{Y}_i$, $i = 1,2,...,n$, δηλαδή, η κατανομή των $\mathbf{Y}_i$ δεν επηράζει καθόλου την εκτίμηση των $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$.

ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΕΚΤΙΜΗΤΡΙΩΝ ΕΛΑΧΙΣΤΩΝ ΤΕΤΡΑΓΩΝΩΝ

Χρειαζόμαστε υποθέσεις για να μελετήσουμε τις ιδιότητες των $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$. Οι υποθέσεις μπορούν να εκφραστούν είτε μέσω των σφαλμάτων ε_i είτε μέσω των παρατηρήσεων Y_i, $i = 1,2,...,n$.

Α) Μέσω των σφαλμάτων ε_i, $i = 1,2,...,n$:

(1) Υποθέτουμε ότι $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$, $i = 1,2,...,n$.

(2) Υποθέτουμε ότι $Cov(\varepsilon_i, \varepsilon_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,...,n$ (ασυσχέτιστα σφάλματα) και $Var(\varepsilon_i) = \sigma^2, i = 1,2,...,n$ (σταθερή). ($Var(\varepsilon_i) = \sigma^2$ είναι ισχυρή υπόθεση)

(3) Πιο ειδικά μπορώ να θεωρήσω ότι $\varepsilon_i \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2), i = 1,2,...,n$, τυχαίο δείγμα (ανεξάρτητα).

Β) Μέσω των παρατηρήσεων Y_i, $i = 1,2,...,n$:

(1)' $\mathrm{E}(\mathrm{Y}_i) = \beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i$, $i = 1,2,...,n$ (αφού $\mathrm{E}(\varepsilon_i) = 0$).

(2)' $Var(\mathrm{Y}_i) = \sigma^2$, $i = 1,2,...,n$ και $Cov(\mathrm{Y}_i, \mathrm{Y}_j) = 0$, $i \neq j$, $i, j = 1,2,...,n$.

(3)' $\mathrm{Y}_i \sim \mathrm{N}(\beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i, \sigma^2)$, $i = 1,2,...,n$ (ανεξάρτητες παρατηρήσεις, αλλά όχι ισόνομες).

Παρατήρηση:
Αν ισχύει η (3), ή ισοδύναμα η (3)', τότε ισχύουν και οι (1) και (2), ή ισοδύναμα οι (1)' και (2)'. Το αντίθετο δεν ισχύει.

Πρόταση 1:
Αν ισχύει η (1), ή ισοδύναμα η (1)', τότε $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ είναι αμερόληπτες εκτιμήτριες των β_0 και β_1 αντίστοιχα.

Απόδειξη:
Για το $\hat{\beta}_1$ έχουμε:

$$\mathrm{E}(\hat{\beta}_1) = \mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n} \kappa_i \cdot \mathrm{Y}_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \cdot \mathrm{E}(\mathrm{Y}_i) = \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \cdot (\beta_0 + \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i) = \beta_0 \cdot \sum_{i=1}^{n} \kappa_i + \beta_1 \cdot \sum_{i=1}^{n} \kappa_i \cdot \mathrm{X}_i =$$

$$= 0 + \beta_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}) \cdot \mathrm{X}_i}{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2} = \beta_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}) \cdot (\mathrm{X}_i + \overline{\mathrm{X}} - \overline{\mathrm{X}})}{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2} =$$

$$= \beta_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2 + \overline{\mathrm{X}} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})}{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2} = \beta_1 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2 + 0}{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2} = \beta_1$$

Επίσης για το $\hat{\beta}_0$:

$$\mathrm{E}\left(\hat{\beta}_0\right)=\mathrm{E}\left(\overline{\mathrm{Y}}-\hat{\beta}_1\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)=\mathrm{E}\left(\overline{\mathrm{Y}}\right)-\overline{\mathrm{X}}\cdot\mathrm{E}\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_i\right)-\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\beta_0+\beta_1\cdot\mathrm{X}_i\right)-\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}=\beta_0+\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}-\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}=\beta_0$$

Λήμμα:

Αν ισχύει η (2), ή ισοδύναμα η (2)', τότε $Cov\left(\overline{\mathrm{Y}},\hat{\beta}_1\right)=0$ και $Var\left(\overline{\mathrm{Y}}\right)=\frac{\sigma^2}{n}$.

Απόδειξη:

Γενικά έχω ότι $Cov\left(\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot\mathrm{Y}_i,\sum_{j=1}^{m}\beta_j\cdot\mathrm{Y}_j\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\alpha_i\cdot\beta_j\cdot Cov\left(\mathrm{Y}_i,\mathrm{Y}_j\right)$.

Άρα:

$$Cov\left(\overline{\mathrm{Y}},\hat{\beta}_1\right)=Cov\left(\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\mathrm{Y}_i,\sum_{j=1}^{n}\kappa_j\cdot\mathrm{Y}_j\right)=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\kappa_j\cdot Cov\left(\mathrm{Y}_i,\mathrm{Y}_j\right)=$$

$$=\frac{1}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\cdot Cov\left(\mathrm{Y}_i,\mathrm{Y}_i\right)=\frac{\sigma^2}{n}\cdot\sum_{i=1}^{n}\kappa_i=0$$

Είναι επίσης προφανές ότι: $Var\left(\overline{\mathrm{Y}}\right)=\frac{1}{n^2}\cdot\sum_{i=1}^{n}Var\left(\mathrm{Y}_i\right)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot\sigma^2=\frac{\sigma^2}{n}$

Πρόταση 2:

Αν ισχύει η (2), ή ισοδύναμα η (2)', τότε $Var\left(\hat{\beta}_0\right)=\sigma^2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^{\,2}}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}$ και

$Var\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}$.

Απόδειξη:

$$Var\left(\hat{\beta}_1\right)=Var\left(\sum_{i=1}^{n}\kappa_i\cdot\mathrm{Y}_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\kappa_i^{\,2}\cdot Var\left(\mathrm{Y}_i\right)=\sigma^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\kappa_i^{\,2}=\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}$$

$$Var\left(\hat{\beta}_0\right)=Var\left(\overline{\mathrm{Y}}-\hat{\beta}_1\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)=Var\left(\overline{\mathrm{Y}}\right)+\overline{\mathrm{X}}^2\cdot Var\left(\hat{\beta}_1\right)=\frac{\sigma^2}{n}+\overline{\mathrm{X}}^2\cdot\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}=$$

$$=\sigma^2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2+n\cdot\overline{\mathrm{X}}^2}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}=\sigma^2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i{}^2-n\cdot\overline{\mathrm{X}}^2+n\cdot\overline{\mathrm{X}}^2}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}=\sigma^2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i{}^2}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}$$

Πρόταση 3:

Αν ισχύει η (3), ή ισοδύναμα η (3)', τότε:

$$\hat{\beta}_0\sim\mathrm{N}\left(\beta_0,\sigma^2\cdot\frac{\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i{}^2}{n\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}\right)$$

$$\hat{\beta}_1\sim\mathrm{N}\left(\beta_1,\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}\right)$$

Απόδειξη:

Προφανές, αφού τα $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των παρατηρήσεων, οι οποίες ακολουθούν την κανονική κατανομή και ισχύουν συγχρόνως οι (1) και (2).