Εκτίμηση της σ^2:

Δεν μπορώ να εκτιμήσω την σ^2 με την εκτιμήτρια $\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2$, γιατί δεν έχω ισόνομες τυχαίες μεταβλητές. Θα εκτιμήσω των σ^2 με την στατιστική συνάρτηση $\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2$.

Πρόταση 4:
Αν ισχύουν οι (1) και (2), ή ισοδύναμα οι (1)’ και (2)’, τότε:

$\hat{\sigma}^2=\frac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}_i\right)^2$ είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2.

Απόδειξη:

Αφού $\hat{\beta}_0=\overline{\mathrm{Y}}-\hat{\beta}_1\cdot\overline{\mathrm{X}}$ και $\hat{\beta}_1=\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)\cdot\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}$, έχω ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left[\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)-\hat{\beta}_1\cdot\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)\right]^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2-2\cdot\hat{\beta}_1\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)\cdot\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)+\hat{\beta}_1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2-2\cdot\hat{\beta}_1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2+\hat{\beta}_1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2-\hat{\beta}_1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i^2-n\cdot\overline{\mathrm{Y}}^2-\hat{\beta}_1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2$$

Αλλά,

$$\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\mathrm{E}\left(\mathrm{Y}_i^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left[Var\left(\mathrm{Y}_i^2\right)+\mathrm{E}^2\left(\mathrm{Y}_i\right)\right]=\sum_{i=1}^{n}\left[\sigma^2+\left(\beta_0+\beta_1\cdot\mathrm{X}_i\right)^2\right]=$$

$$=n\cdot\sigma^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0+\beta_1\cdot\mathrm{X}_i\right)^2$$

$$\mathrm{E}\left(n\cdot\overline{\mathrm{Y}}^2\right)=n\cdot\mathrm{E}\left(\overline{\mathrm{Y}}^2\right)=n\cdot\left[Var\left(\overline{\mathrm{Y}}^2\right)+\mathrm{E}^2\left(\overline{\mathrm{Y}}\right)\right]=n\cdot\left[\frac{\sigma^2}{n}+\left(\beta_0+\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)^2\right]=$$

$$=\sigma^2+n\cdot\left(\beta_0+\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)^2$$

$$\mathrm{E}\left[\hat{\beta}_1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2\right]=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2\cdot\mathrm{E}\left(\hat{\beta}_1^2\right)=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2\cdot\left[Var\left(\hat{\beta}_1^2\right)+\mathrm{E}^2\left(\hat{\beta}_1\right)\right]=$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2\cdot\left[\frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2}+\beta_1^2\right]=\sigma^2+\beta_1^2\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2$$

Άρα,

$$\mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2\right]=\mathrm{E}\left(\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i^{\,2}\right)-\mathrm{E}\left(n\cdot\overline{\mathrm{Y}}^2\right)-\mathrm{E}\left[\hat{\beta}_1^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2\right]=$$

$$=n\cdot\sigma^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\beta_0+\beta_1\cdot\mathrm{X}_i\right)^2-\sigma^2-n\cdot\left(\beta_0+\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)^2-\sigma^2-\beta_1^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2=$$

$$=n\cdot\sigma^2+n\cdot\beta_0^{\,2}+\beta_1^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^{\,2}+2\cdot\beta_0\cdot\beta_1\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i-\sigma^2-n\cdot\beta_0^{\,2}-n\cdot\beta_1^{\,2}\cdot\overline{\mathrm{X}}^2-2\cdot n\cdot\beta_0\cdot\beta_1\cdot\overline{\mathrm{X}}$$

$$-\sigma^2-\beta_1^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i^{\,2}-n\cdot\beta_1^{\,2}\cdot\overline{\mathrm{X}}^2+2\cdot\beta_1^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\overline{\mathrm{X}}^2=(n-2)\cdot\sigma^2$$

Επομένως, $\mathrm{E}\left[\dfrac{1}{n-2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2\right]=\sigma^2$, δηλαδή είναι αμερόληπτη εκτιμήτρια της σ^2.

<u>Παρατήρηση:</u>

Σε κάποιο σημείο της προηγούμενης απόδειξης είδαμε ότι:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2-\hat{\beta}_1^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2.$$

Όμως,

$$\hat{\beta}_1^{\,2}\cdot\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{X}_i-\overline{\mathrm{X}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}_i-\hat{\beta}_1\cdot\overline{\mathrm{X}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}_i+\hat{\beta}_0-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mathrm{Y}}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2$$

Άρα, $\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2-\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mathrm{Y}}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2\Rightarrow$

$$\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mathrm{Y}}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2+\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2\quad(*)\ .$$

Αν θέσω $e_i=\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i$, , υπόλοιπο, τότε η ποσότητα e_i μπορεί να θεωρηθεί σαν εκτιμήτρια του σφάλματος $\varepsilon_i=\mathrm{Y}_i-\beta_0-\beta_1\cdot\mathrm{X}_i$, αφού $e_i=\mathrm{Y}_i-\hat{\beta}_0-\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}_i$.

Μια πολύ βασική ιδιότητα των υπολοίπων είναι ότι $\sum_{i=1}^{n}e_i=0$, αφού $\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)=0\Rightarrow\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i=n\cdot\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\cdot\sum_{i=1}^{n}\mathrm{X}_i$, το οποίο ισχύει αφού $\mathrm{Y}_i=n\cdot\hat{\beta}_0+\hat{\beta}_1\cdot\mathrm{X}_i$, $i=1,2,\ldots,n$ και αθροίζοντας πάνω σε όλα τα i.

Με βάση την πιο πάνω ιδιότητα, έχουμε ότι $\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Y}_i=\sum_{i=1}^{n}\hat{\mathrm{Y}}_i\Rightarrow\overline{\mathrm{Y}}_i=\overline{\hat{\mathrm{Y}}}_i$.

Για την ταυτότητα $(*)$, έχουμε ότι:

Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2$ εκφράζει την μεταβλητότητα των τιμών Y_i (ολική μεταβλητότητα SS_{tot}).

Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mathrm{Y}}_i-\overline{\mathrm{Y}}\right)^2=\sum_{i=1}^{n}\left(\hat{\mathrm{Y}}_i-\overline{\hat{\mathrm{Y}}}\right)^2$ εκφράζει την μεταβλητότητα των τιμών $\hat{\mathrm{Y}}_i$ (μεταβλητότητα που οφείλεται στην παλινδρόμηση SS_{reg}).

Το άθροισμα $\sum_{i=1}^{n}\left(\mathrm{Y}_i-\hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2$ εκφράζει την μεταβλητότητα των υπολοίπων (SS_{res}).

Άρα η $(*)$ γραφεται και ως: $SS_{tot}=SS_{reg}+SS_{res}$

Η παραπάνω σχέση είναι λογική, αφού $\mathrm{Y}_i=\left(\beta_0+\beta_1\cdot\mathrm{X}_i\right)+\varepsilon_i$, δηλαδή η παρατήρηση Y_i είναι άθροισμα παρατήρησης και σφάλματος. Άρα και η ολική μεταβλητότητα θα είναι άθροισμα δύο παραγόντων:

(α) Παλινδρόμηση

(β) Υπόλοιπα

Σε κάθε άθροισμα από τα παραπάνω αντιστοιχούν βαθμοί ελευθερίας ως εξής:

(α) Για το SS_{tot}, έχουμε $n-1$ βαθμούς ελευθερίας (# παρατηρήσεων –1).

(β) Για το SS_{res}, έχουμε $n-1$ βαθμούς ελευθερίας (# παρατηρήσεων – # παραμέτρων στην εξίσωση παλινδρόμησης).

(γ) Για το SS_{reg} έχουμε 1 βαθμούς ελευθερίας (β.ε. για SS_{tot} - β.ε. για SS_{res}).

<u>Μέσα τετράγωνα:</u>

$MS_{reg}=\frac{SS_{reg}}{1}$ (μέσο τετράγωνο της παλινδρόμησης)

$MS_{res}=\frac{SS_{res}}{n-2}$ (μέσο τετράγωνο των υπολοίπων)

Γενικά: Μέσο τετράγωνο = $\frac{\text{Άθροισμα τετραγώνων}}{\text{βαθμοί ελευθερίας}}$

Πρόταση 5:
Εάν ισχύει η (3), ή ισοδύναμα η (3)', τότε έχουμε ότι:

(α) Οι εκτιμήτριες μεγίστης πιθανοφάνειας των $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ είναι αντίστοιχα $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$ και $\tilde{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i \right)^2$.

(β) Η στατιστική συνάρτηση $\left(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i \right)^2 \right)$ είναι επαρκής και πλήρης για τις παραμέτρους $\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right)$.

(γ) Οι εκτιμήτριες $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1, \hat{\sigma}^2$ είναι Α.Ο.Ε.Δ. για $\beta_0, \beta_1, \sigma^2$ αντίστοιχα.

Τρόπος απόδειξης:

(α) Η συνάρτηση πιθανοφάνειας είναι:

$$L\left(\beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right) = \prod_{i=1}^{n} f\left(\mathrm{Y}_i, \beta_0, \beta_1, \sigma^2 \right) = \frac{1}{\sigma^n \cdot (2 \cdot \pi)^{n/2}} \cdot e^{-\frac{1}{2 \cdot \sigma^2} \cdot \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i)^2}$$

(β) Για το θεώρημα της επάρκειας χρησιμοποιούμε το παραγοντικό κριτήριο με:

$$\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Y}_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i + \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i - \beta_0 - \beta_1 \cdot \mathrm{X}_i \right)^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i \right) + \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right) + \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \mathrm{X}_i \right]^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \mathrm{X}_i \right]^2 + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i \right) \cdot \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right)$$

$$+ 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i \right) \cdot \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \mathrm{X}_i + 2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right) \cdot \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \mathrm{X}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right)^2 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \mathrm{X}_i \right]^2 + 2 \cdot \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i \right)$$

$$+ 2 \cdot \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i \right) \cdot \mathrm{X}_i + 2 \cdot \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right) \cdot \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i \right)^2 + n \cdot \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right)^2 + \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2 + 0 + 0 + 2 \cdot \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right) \cdot \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i \right)^2 + n \cdot \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right)^2 + \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right)^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2 + 2 \cdot \left(\hat{\beta}_0 - \beta_0 \right) \cdot \left(\hat{\beta}_1 - \beta_1 \right) \cdot \sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i$$

Για την πληρότητα, χρησιμοποιούμε το κριτήριο πληρότητας για εκθετικές οικογένειες.

(γ) Αποδεικνύεται από το (α) και (β) και από το θεώρημα Lehman-Scheffé.

Πρόταση 6:
Εάν ισχύει η (3), ή ισοδύναμα η (3)', τότε έχουμε ότι:

(α) Οι εκτιμήτριες $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ είναι ανεξάρτητες των υπολοίπων $e_i = \mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i$.

(β) Οι εκτιμήτριες $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$ είναι ανεξάρτητες του $SS_{res} = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2$.

(γ) Το $SS_{reg} = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\mathrm{Y}}_i - \overline{\mathrm{Y}}\right)^2$ και το $SS_{res} = \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2$ είναι ανεξάρτητα.

(δ) $\dfrac{SS_{res}}{\sigma^2} \sim X^2_{n-2}$

Απόδειξη:

Λόγω κανονικότητας, για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία, αρκεί να αποδείξουμε ότι είναι ασυσχέτιστα.

(α) $Cov\left(\hat{\beta}_1, \mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right) = Cov\left(\hat{\beta}_1, \mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\mathrm{Y}}_i\right) = Cov\left(\hat{\beta}_1, \mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i\right) =$

$$= Cov\left(\hat{\beta}_1, \mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\hat{\beta}_1, \hat{\beta}_0\right) - \mathrm{X}_i \cdot Var\left(\hat{\beta}_1\right) =$$

$$= Cov\left(\sum_{j=1}^{n} \kappa_j \cdot \mathrm{Y}_j, \mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\hat{\beta}_1, \overline{\mathrm{Y}} - \hat{\beta}_1 \cdot \overline{\mathrm{X}}\right) - \mathrm{X}_i \cdot \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \kappa_j \cdot Cov\left(\mathrm{Y}_j, \mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\hat{\beta}_1, \overline{\mathrm{Y}}\right) + \overline{\mathrm{X}} \cdot Var\left(\hat{\beta}_1\right) - \mathrm{X}_i \cdot \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2} =$$

$$= \kappa_i \cdot Var\left(\mathrm{Y}_i\right) - 0 + \overline{\mathrm{X}} \cdot \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2} - \mathrm{X}_i \cdot \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2} =$$

$$= \frac{\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2} \cdot \sigma^2 - \frac{\left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)}{\sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2} \cdot \sigma^2 = 0$$

$$Cov\left(\hat{\beta}_0, \mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right) = Cov\left(\overline{\mathrm{Y}} - \hat{\beta}_1 \cdot \overline{\mathrm{X}}, \mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right) = Cov\left(\overline{\mathrm{Y}}, \mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right) - \overline{\mathrm{X}} \cdot Cov\left(\hat{\beta}_1, \mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right) =$$

$$= Cov\left(\overline{\mathrm{Y}}, \mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\overline{\mathrm{Y}}, \hat{\mathrm{Y}}_i\right) - 0 = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n} Cov\left(\mathrm{Y}_j, \mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\overline{\mathrm{Y}}, \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i\right) =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot Var\left(\mathrm{Y}_i\right) - Cov\left(\overline{\mathrm{Y}}, \hat{\beta}_0\right) - \mathrm{X}_i \cdot Cov\left(\overline{\mathrm{Y}}, \hat{\beta}_1\right) = \frac{\sigma^2}{n} - \frac{\sigma^2}{n} - 0 = 0$$

(β) Επειδή το SS_{res} είναι συνάρτηση των e_i και τα e_i είναι ανεξάρτητα των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$, τότε και το SS_{res} θα είναι ανεξάρτητο των $\hat{\beta}_0$ και $\hat{\beta}_1$.

(γ) Επειδή $SS_{reg} = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\mathrm{Y}}_i - \overline{\mathrm{Y}}\right)^2 = \sum_{i=1}^{n} \left(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \mathrm{X}_i - \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 \cdot \overline{\mathrm{X}}\right)^2 = \hat{\beta}_1^{\,2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2$, είναι συνάρτηση του $\hat{\beta}_1$ και το $\hat{\beta}_1$ είναι ανεξάρτητο του SS_{res}, τότε και το SS_{reg} θα είναι ανεξάρτητο του SS_{res}.

(δ) Θα αποδειχθεί σε αργότερο στάδιο.

Παρατήρηση: Επειδή $SS_{tot} = SS_{reg} + SS_{res}$ και οι όροι που συνθέτουν το άθροισμα είναι ανεξάρτητοι, ισχύει ότι οι βαθμοί ελευθερίας του SS_{tot} θα είναι ίσοι με το άθροισμα των βαθμών ελευθερίας του SS_{reg} και του SS_{res}.

ΔΙΑΣΤΗΜΑΤΑ ΕΜΠΙΣΤΟΣΥΝΗΣ ΚΑΙ ΕΛΕΓΧΟΙ ΥΠΟΘΕΣΕΩΝ

Για να ισχύουν τα διαστήματα εμπιστοσύνης και οι έλεγχοι υποθέσεων, υποθέτουμε ότι ισχύει η (3), ή ισοδύναμα η (3)’. Υποθέτουμε δηλαδή ότι υπάρχει κανονικότητα.

Για την παράμετρο β_0:

(α) Κατασκευή $(1-\alpha)\%$ Δ.Ε.:

Έχουμε ότι,

$$\hat{\beta}_0 \sim \mathrm{N}\left(\beta_0, \sigma^2 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^{\,2}}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2} \right)$$

Εφαρμόζουμε τη μέθοδο της αντιστρεπτής ποσότητας.

Έχουμε λοιπόν ότι, $\dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^{\,2}}{n \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}}\right)^2}}} \sim \mathrm{N}(0,1)$.

Όμως η σ^2 είναι άγνωστη και άρα την εκτιμούμε με την αμερόληπτη της εκτιμήτρια $\hat{\sigma}^2 = \dfrac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^{n} \left(\mathrm{Y}_i - \hat{\mathrm{Y}}_i\right)^2 = MS_{res}$.

Οπότε έχουμε ότι και $\hat{Var}(\hat{\beta}_0)=\hat{\sigma}^2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}$.

Άρα έχουμε ότι,

$$\frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_0)}} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{\sigma^2}} = \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}}} \cdot \sqrt{\frac{\sigma^2}{\hat{\sigma}^2}} =$$

$$= \frac{\dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}}}}{\sqrt{\dfrac{\hat{\sigma}^2}{\sigma^2}}} = \frac{\dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}}}}{\sqrt{\dfrac{MS_{res}}{\sigma^2}}} = \frac{\dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\sigma^2 \cdot \dfrac{\sum_{i=1}^{n} \mathrm{X}_i^2}{n \cdot \sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}}}}{\sqrt{\dfrac{1}{n-2} \cdot \dfrac{SS_{res}}{\sigma^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{\hat{\beta}_0 - \beta_0}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_0)}} \sim \frac{\mathrm{N}(0,1)}{\sqrt{\dfrac{X_{n-2}^2}{n-2}}} = t_{n-2}$$ (λόγω ανεξαρτησίας απιθμητή και παρονομαστή)

Άρα ένα $(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για την παράμετρο β_0 είναι:

$$\left(\hat{\beta}_0 - t_{n-2,\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_0)}, \hat{\beta}_0 + t_{n-2,\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_0)}\right)$$

(β) Έλεγχοι υποθέσεων:

$\mathrm{H}_0 : \beta_0 = \beta_0^*$ προς $\mathrm{H}_1 : \beta_0 \neq \beta_0^*$ (β_0^* γνωστό), σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Θεωρώ $t = \dfrac{\hat{\beta}_0 - \beta_0^*}{\sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_0)}}$. Απορρίπουμε την $\mathrm{H}_0 : \beta_0 = \beta_0^*$ όταν $|t| > c$, όπου c, η σταθερά για την οποία ισχύει ότι $\mathrm{P}(|t| > c / \mathrm{H}_0) = \alpha$.

Όταν όμως ισχύει η $\mathrm{H}_0 : \beta_0 = \beta_0^*$, έχουμε ότι $t \sim t_{n-2}$, άρα $c = t_{n-2,\alpha/2}$.

<u>Για την παράμετρο β_1:</u>

Εργαζόμαστε ακριβώς όπως εργαστήκαμε και για την παράμετρο β_0.

Άρα έχουμε ότι ένα $(1-\alpha)\%$ Δ.Ε. για την παράμετρο β_1 είναι:

$\left(\hat{\beta}_1 - t_{n-2,\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_1)}, \hat{\beta}_1 + t_{n-2,\alpha/2} \cdot \sqrt{\hat{Var}(\hat{\beta}_1)}\right)$, όπου $\hat{Var}(\hat{\beta}_1) = \dfrac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n}(\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}$.

Για τον έλεγχο $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_1^*$ προς $\mathrm{H}_1 : \beta_1 \neq \beta_1^*$ (β_1^* γνωστό), σε επίπεδο σημαντικότητας α, απορρίπτων την $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = \beta_1^*$ όταν $|t| = t_{n-2,\alpha/2}$, όπου $t = \dfrac{\hat{\beta}_1 - \beta_1^*}{\sqrt{\widehat{Var}(\hat{\beta}_1)}} \sim t_{n-2}$.

<u>Παρατήρηση:</u> Ο έλεγχος $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$ προς $\mathrm{H}_1 : \beta_1 \neq 0$ παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον γιατί αποδοχή της $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$, συνεπάγεται ότι οι X, Y είναι ανεξάρτητες.

Για αυτό τον έλεγχο, εκτός από τον έλεγχο μέσω της t-κατανομής, θα μελετήσουμε και έναν άλλο, που βασίζεται στην F-κατανομή.

$\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$ προς $\mathrm{H}_1 : \beta_1 \neq 0$, σε επίπεδο σημαντικότητας α.

Γνωρίζουμε ότι, ανεξάρτητα από την τιμή της β_1, $\mathrm{E}(MS_{res}) = \sigma^2$.

Επίσης, $\mathrm{E}(MS_{reg}) = \mathrm{E}\left(\dfrac{SS_{reg}}{1}\right) = \mathrm{E}(SS_{reg}) = \mathrm{E}\left[\sum_{i=1}^{n} (\hat{\mathrm{Y}}_i - \overline{\mathrm{Y}})^2\right] = \mathrm{E}\left[\hat{\beta}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2\right] =$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2 \cdot \mathrm{E}(\hat{\beta}_1^2) = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2 \cdot \left[\mathrm{E}^2(\hat{\beta}_1) + Var(\hat{\beta}_1)\right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2 \cdot \left[\beta_1^2 + \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}\right] = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2 \cdot \beta_1^2 + \sigma^2$$

Παρατηρούμε πως όταν ισχύει η $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$, τότε $\mathrm{E}(MS_{reg}) = \sigma^2$. Άρα έχουμε δύο αμερόληπτες εκτιμήτριες για το σ^2. Άρα το πηλίκο $\dfrac{MS_{reg}}{MS_{res}}$, πρέπει να παίρνει τιμές κοντά στο 1, όταν ισχύει η $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$. Ορίζω $F = \dfrac{MS_{reg}}{MS_{res}}$. Απορρίπτουμε την $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$ όταν $F > c$, όπου c, η σταθερά για την οποία ισχύει ότι $\mathrm{P}(F > c / \mathrm{H}_0) = \alpha$.

Ξέρουμε ότι $\dfrac{MS_{res}}{\sigma^2} = \dfrac{1}{n-2} \cdot \dfrac{SS_{res}}{\sigma^2} \sim \dfrac{X_{n-2}^2}{n-2}$.

Επίσης $\dfrac{MS_{reg}}{\sigma^2} = \dfrac{\hat{\beta}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}{\sigma^2}$, αλλά όταν ισχύει η $\mathrm{H}_0 : \beta_1 = 0$, έχουμε ότι

$$\hat{\beta}_1 \sim \mathrm{N}\left(0, \frac{\sigma^2}{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}\right) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_1 \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}}{\sigma} \sim \mathrm{N}(0,1) \Rightarrow \frac{\hat{\beta}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2}{\sigma^2} \sim X_1^2.$$

Άρα $F = \frac{MS_{reg}}{MS_{res}} = \frac{MS_{reg}/\sigma^2}{MS_{res}/\sigma^2} \sim \frac{X_1^2}{X_{n-2}^2} = F_{1,n-2}$, οπότε $c = F_{1,n-2,\alpha/2}$.

<u>ΠΙΝΑΚΑΣ ΑΝΑΔΙΑ</u>

Πηγή Μεταβλητότητας	Άθροισμα Τετραγώνων	β.ε.	Μέσα Τετράγωνα	F -test (έλεγχος για παλινδρόμηση)
Παλινδρόμηση	$SS_{reg} = \hat{\beta}_1^2 \cdot \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{X}_i - \overline{\mathrm{X}})^2$	1	$MS_{reg} = \frac{SS_{reg}}{1}$	$F = \frac{MS_{reg}}{MS_{res}}$
Υπόλοιπα	SS_{res} (υπολογίζεται με αφαίρεση)	$n-2$	$MS_{res} = \frac{SS_{res}}{n-2}$	
Ολικό	$SS_{tot} = \sum_{i=1}^{n} (\mathrm{Y}_i - \overline{\mathrm{Y}})^2 = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{Y}_i^2 - n \cdot \sum_{i=1}^{n} \overline{\mathrm{Y}}^2$	$n-1$		