



Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αιγαίου

Εαρινό εξάμηνο 2022

## ΠΜΣ «Σπουδές στα Μαθηματικά»

### Δ25 ΣΕΜΙΝΑΡΙΟ ΜΟΝΤΕΛΟΠΟΙΗΣΗΣ

(Κωδικός μαθήματος: 313-1425, ECTS: 2,5)

### ΒΟΗΘΗΤΙΚΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ ΚΑΙ ΠΙΝΑΚΕΣ<sup>1</sup>

Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου (Πανεπιστήμιο Κύπρου)

Μέρα	Ώρα	Χώρος
Δευτέρα 23/5/2022	11:00-13:00	No 6, Σχολικό Συγκρότημα
Τρίτη 24/5/2022	10:00-13:00	No 4, Σχολικό Συγκρότημα
Τετάρτη 25/5/2022	12:00-15:00	No 4, Σχολικό Συγκρότημα
Πέμπτη 26/5/2022	11:00-13:00	No 6, Σχολικό Συγκρότημα
Παρασκευή 27/5/2022	11:00-13:30	No 6, Σχολικό Συγκρότημα

Μάιος 2022

<sup>1</sup> Πλήρεις σημειώσεις είναι διαθέσιμες στο σύνδεσμο  
<http://www2.ucy.ac.cy/~georgios/courses/mas483/mas483notes.html>

# Περιεχόμενα

<b>1</b>	<b>ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ</b>	<b>1</b>
1.1	Συστήματα συντεταγμένων . . . . .	1
1.4	Διαφορικοί τελεστές . . . . .	9
1.4.1	Η υλική παράγωγος . . . . .	9
1.5	Τανυστικός λογισμός . . . . .	16
1.5.1	Άλγεβρα τανυστών . . . . .	18
1.5.2	Τανυστές στη ρευστοδυναμική . . . . .	20
1.5.3	Απόκλιση τανυστικού πεδίου . . . . .	25
1.5.4	Πρωτεύουσες διευθύνσεις και αναλλοίωτες τανυστή . . . . .	27
1.5.5	Συμβολισμός δεικτών και η σύμβαση άθροισης . . . . .	31
1.6	Ολοκληρωτικά θεωρήματα . . . . .	34
1.6.1	Το θεώρημα του Stokes . . . . .	34
1.6.2	Το θεώρημα της απόκλισης . . . . .	35
1.7	Το θεώρημα μεταφοράς του <b>Reynolds</b> . . . . .	42
1.8	Προβλήματα . . . . .	52
1.9	Βιβλιογραφία . . . . .	60

# Κεφάλαιο 1

## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΚΑΙ ΤΑΝΥΣΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ

### 1.1 Συστήματα συντεταγμένων

Με την επιλογή τριών γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων,  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{e}_3$ , στον τρισδιάστατο χώρο ορίζεται ένα σύστημα συντεταγμένων (coordinate system). Τα διανύσματα  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{e}_3$  αντιπροσωπεύουν τρεις διαφορετικές μεταξύ τους διευθύνσεις στον χώρο. Το σύνολο  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  είναι μια βάση (basis) του τρισδιάστατου χώρου. Συνήθως τα διανύσματα  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{e}_3$  επιλέγονται να είναι μοναδιαία. Στα τρία συστήματα συντεταγμένων που μας ενδιαφέρουν, δηλ. στις καρτεσιανές (Cartesian), τις κυλινδρικές (cylindrical) και τις σφαιρικές (spherical) συντεταγμένες, τα τρία διανύσματα της βάσης είναι επίσης ορθογώνια μεταξύ τους. Άρα στα τρία αυτά συστήματα η βάση  $B = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  είναι ορθοκανονική:

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} . \quad (1.1)$$

Κάθε διάνυσμα  $\mathbf{u}$  του χώρου αυτού γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των  $\mathbf{e}_1$ ,  $\mathbf{e}_2$  και  $\mathbf{e}_3$ :

$$\mathbf{u} = u_1 \mathbf{e}_1 + u_2 \mathbf{e}_2 + u_3 \mathbf{e}_3 . \quad (1.2)$$

Οι βαθμωτές ποσότητες  $u_1$ ,  $u_2$  και  $u_3$  είναι οι συνιστώσες του  $\mathbf{u}$  και αντιπροσωπεύουν τα μεγέθη των προβολών του  $\mathbf{u}$  σε κάθε μια από τις βασικές διευθύνσεις. Το διάνυσμα  $\mathbf{u}$  γράφεται συχνά σαν  $\mathbf{u}(u_1, u_2, u_3)$  ή απλά σαν  $(u_1, u_2, u_3)$ .

Το καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων  $(x, y, z)$ , με

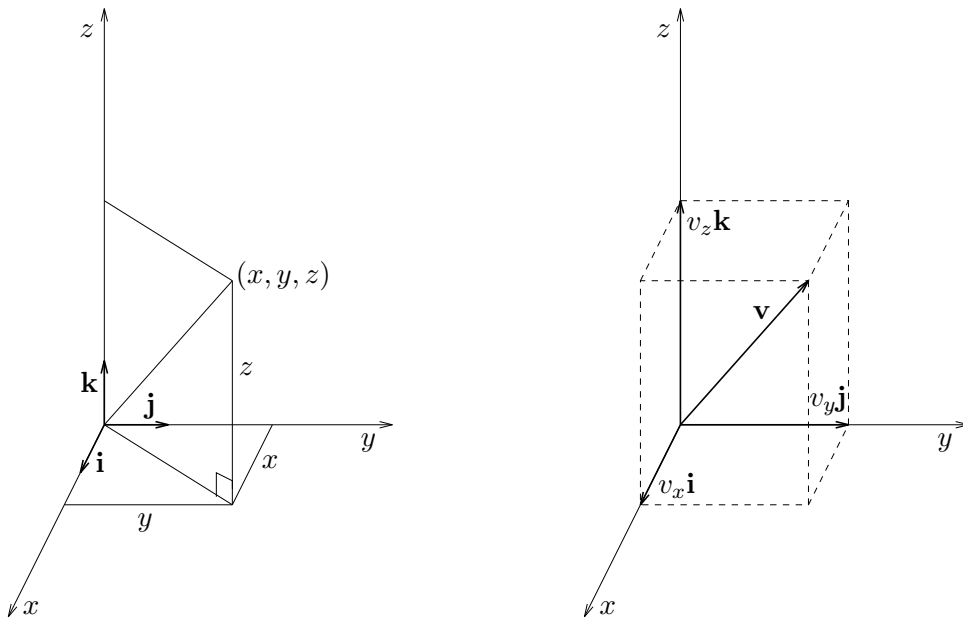
$$-\infty < x < \infty, \quad -\infty < y < \infty \quad \text{και} \quad -\infty < z < \infty,$$

μας είναι ήδη γνωστό. Η βάση του συμβολίζεται συχνά με  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  ή  $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ . Η ανάλυση ενός διανύσματος  $\mathbf{v}$  στις τρεις του συνιστώσες φαίνεται γραφικά στο Σχήμα 1.1. Σημειώνουμε ότι σε όλα τα κεφάλαια των σημειώσεων χρησιμοποιούμε δεξιόστροφα (right-handed) συστήματα συντεταγμένων.

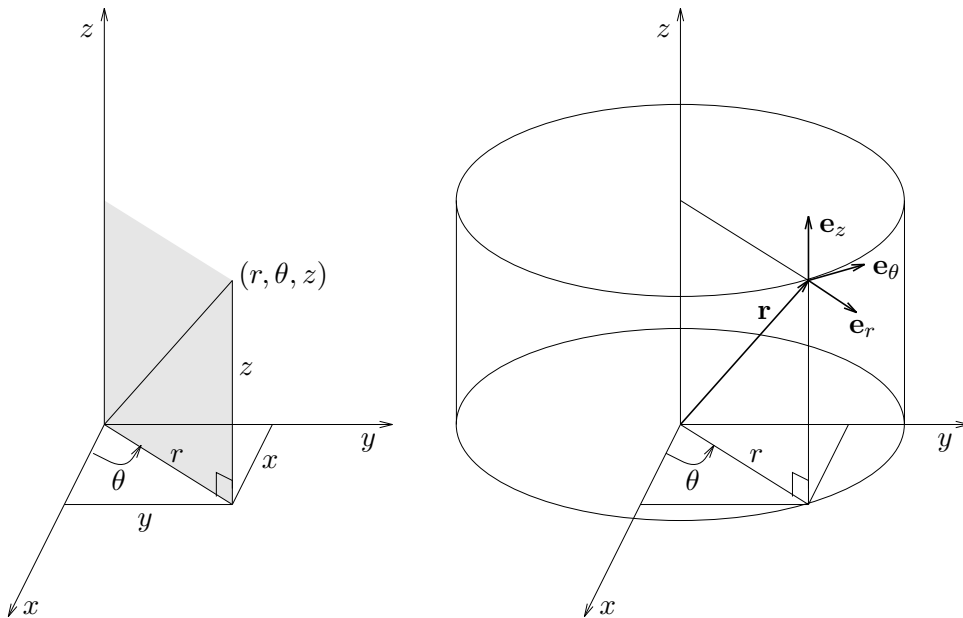
Οι κυλινδρικές και οι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες είναι τα πιο σημαντικά ορθογώνια καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων (curvilinear coordinate systems). Οι κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ , με

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi \quad \text{και} \quad -\infty < z < \infty,$$

φαίνονται στο Σχήμα 1.2 μαζί με τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Η βάση του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων αποτελείται από τρία ορθοκανονικά διανύσματα: το ακτινικό διάνυσμα  $\mathbf{e}_r$ , το αξιμουθιακό (γωνιακό) διάνυσμα  $\mathbf{e}_\theta$ , και το αξονικό διάνυσμα  $\mathbf{e}_z$ . Παρατηρούμε ότι η αξιμουθιακή γωνία  $\theta$  περιστρέφεται γύρω από τον άξονα των  $z$ . Κάθε διάνυσμα  $\mathbf{v}$  αναλύεται και ορίζεται μονοσήμαντα από τις τρεις του συνιστώσες  $\mathbf{v}(v_r, v_\theta, v_z)$ . Με τη χρήση απλών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων κάθε διάνυσμα μπορεί να μετασχηματιστεί από το ένα σύστημα στο άλλο. Στον Πίνακα 1.1 είναι συγκεντρωμένοι οι



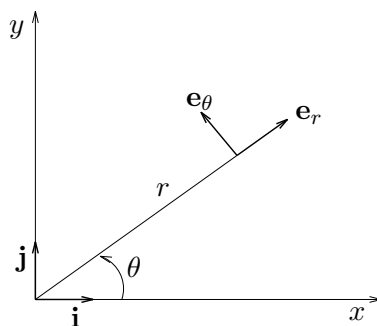
Σχήμα 1.1: Καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$  με  $-\infty < x < \infty$ ,  $-\infty < y < \infty$  και  $-\infty < z < \infty$ .

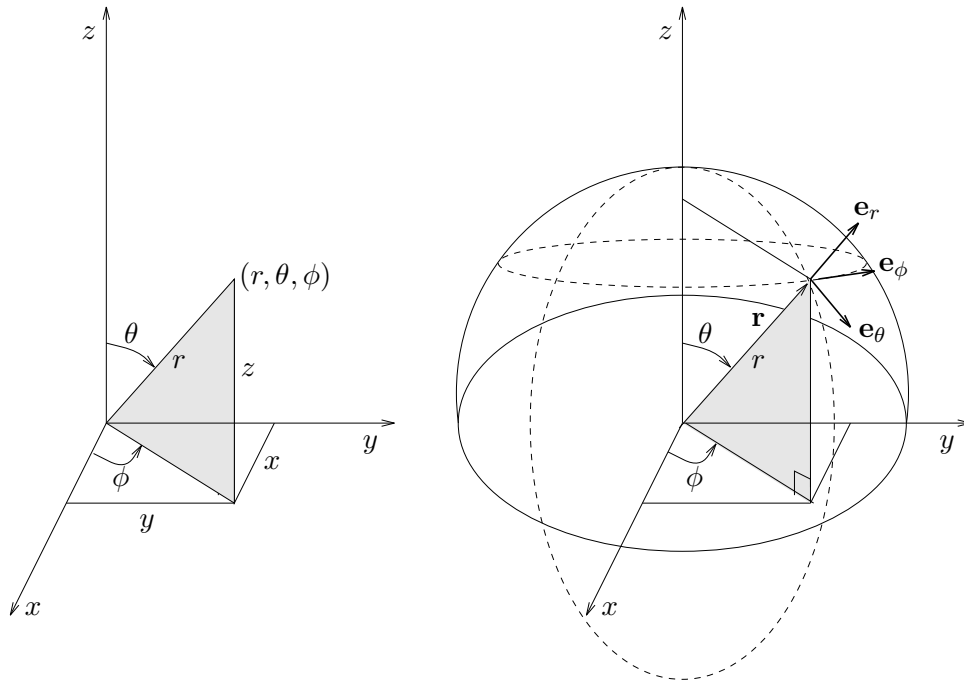


Σχήμα 1.2: Κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$  με  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta < 2\pi$  και  $-\infty < z < \infty$ , και το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$ .

$(r, \theta, z) \longrightarrow (x, y, z)$	$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, z)$
<u>Συντεταγμένες</u> $x = r \cos \theta$ $y = r \sin \theta$ $z = z$	$r = \sqrt{x^2 + y^2}$ $\theta = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y < 0 \end{cases}$ $z = z$
<u>Διανύσματα βάσης</u> $\mathbf{i} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$ $\mathbf{j} = \sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta$ $\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$	$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$ $\mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$ $\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$

Πίνακας 1.1: Σχέσεις μεταξύ καρτεσιανών και κυλινδρικών πολικών συντεταγμένων.

Σχήμα 1.3: Πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  στο επίπεδο.



Σχήμα 1.4: Σφαιρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$  με  $r \geq 0$ ,  $0 \leq \theta \leq \pi$  και  $0 \leq \phi \leq 2\pi$ , και το διάνυσμα θέσης  $\mathbf{r}$ .

Βασικοί τύποι για την μετάβαση από τις καρτεσιανές στις κυλινδρικές συντεταγμένες και αντίστροφα. Αν αγνοήσουμε τη συντεταγμένη  $z$  και περιοριστούμε στο επίπεδο  $xy$ , οι κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες ανάγονται στις γνωστές μας πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta)$  στο επίπεδο που φαίνονται στο Σχήμα 1.3.

Οι σφαιρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ , με

$$r \geq 0, \quad 0 \leq \theta \leq \pi \quad \text{και} \quad 0 \leq \phi < 2\pi,$$

φαίνονται στο Σχήμα 1.4 μαζί με τις καρτεσιανές συντεταγμένες. Επισημαίνουμε ότι τα  $r$  και  $\theta$  στις κυλινδρικές και τις σφαιρικές συντεταγμένες δεν είναι τα ίδια. Η βάση του συστήματος σφαιρικών συντεταγμένων αποτελείται από τρία ορθοκανονικά διανύσματα: το ακτινικό διάνυσμα  $\mathbf{e}_r$ , το μεσημβρινό διάνυσμα  $\mathbf{e}_\theta$ , και το αζιμουθιακό διάνυσμα  $\mathbf{e}_\phi$ . Κάθε διάνυσμα  $\mathbf{v}$  αναλύεται μονοσήμαντα σε τρεις συνιστώσες,  $\mathbf{v}(v_r, v_\theta, v_\phi)$ , οι οποίες είναι τα μέτρα των προβολών του  $\mathbf{v}$  στα τρία διανύσματα βάσης. Ο μετασχηματισμός ενός διανύσματος από τις σφαιρικές στις καρτεσιανές συντεταγμένες και αντίστροφα γίνεται με τη χρήση των σχέσεων του Πίνακα 1.2.

#### Παράδειγμα 1.1.1. Βάση του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων

Θα δείξουμε ότι η βάση  $B = \{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  του κυλινδρικού συστήματος συντεταγμένων είναι ορθοκανονική. Επειδή  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1$  και  $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$ , έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_r &= (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) = \cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \\ \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_\theta &= (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \cdot (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \\ \mathbf{e}_z \cdot \mathbf{e}_z &= \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_\theta &= (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = 0 \\ \mathbf{e}_r \cdot \mathbf{e}_z &= (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0 \\ \mathbf{e}_\theta \cdot \mathbf{e}_z &= (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) \cdot \mathbf{k} = 0 \end{aligned}$$

□

$(r, \theta, \phi) \longrightarrow (x, y, z)$	$(x, y, z) \longrightarrow (r, \theta, \phi)$
<p><u>Συντεταγμένες</u></p> $x = r \sin \theta \cos \phi$ $y = r \sin \theta \sin \phi$ $z = r \cos \theta$	$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ $\theta = \begin{cases} \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, & z > 0 \\ \frac{\pi}{2}, & z = 0 \\ \pi + \arctan \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}, & z < 0 \end{cases}$ $\phi = \begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y \geq 0 \\ \pi + \arctan \frac{y}{x}, & x < 0 \\ 2\pi + \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, y < 0 \end{cases}$
<p><u>Διανύσματα βάσης</u></p> $\mathbf{i} = \sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi$ $\mathbf{j} = \sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi$ $\mathbf{k} = \cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta$	$\mathbf{e}_r = \sin \theta \cos \phi \mathbf{i} + \sin \theta \sin \phi \mathbf{j} + \cos \theta \mathbf{k}$ $\mathbf{e}_\theta = \cos \theta \cos \phi \mathbf{i} + \cos \theta \sin \phi \mathbf{j} - \sin \theta \mathbf{k}$ $\mathbf{e}_\phi = -\sin \phi \mathbf{i} + \cos \phi \mathbf{j}$

Πίνακας 1.2: Σχέσεις μεταξύ καρτεσιανών και σφαιρικών πολικών συντεταγμένων.

**Παράδειγμα 1.1.2. Το διάνυσμα θέσης**

Το διάνυσμα θέσης (position vector)  $\mathbf{r}$  ορίζει τη θέση ενός σημείου στον χώρο σε σχέση με ένα σύστημα συντεταγμένων. Στις καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}, \quad (1.3)$$

και έτσι

$$|\mathbf{r}| = (\mathbf{r} \cdot \mathbf{r})^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}. \quad (1.4)$$

Η ανάλυση του  $\mathbf{r}$  στις τρεις του συνιστώσες φαίνεται στο Σχήμα 1.5.

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες, το διάνυσμα θέσης δίνεται από την

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z \quad \text{με} \quad |\mathbf{r}| = \sqrt{r^2 + z^2}. \quad (1.5)$$

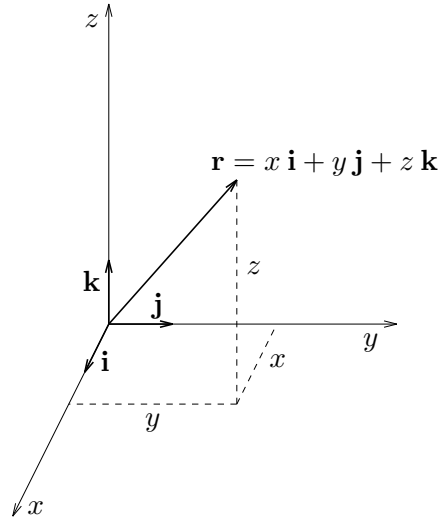
Αξίζει να σημειώσουμε ότι το μέτρο  $|\mathbf{r}|$  του διανύσματος θέσης δεν είναι ίσο με την ακτινική κυλινδρική συντεταγμένη  $r$ . Τέλος, στις σφαιρικές συντεταγμένες,

$$\mathbf{r} = r \mathbf{e}_r \quad \text{με} \quad |\mathbf{r}| = r, \quad (1.6)$$

δηλ. το μέτρο  $|\mathbf{r}|$  είναι η ακτινική σφαιρική συντεταγμένη  $r$ . Αν και οι εκφράσεις (1.5) και (1.6) για το διάνυσμα θέσης είναι προφανείς (βλ. Σχήματα 1.2 και 1.4) θα τις αποδείξουμε με τη χρήση μετασχηματισμών συντεταγμένων ξεκινώντας από την (1.3).

Στις κυλινδρικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \\ &= r \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) + r \sin \theta (\sin \theta \mathbf{e}_r + \cos \theta \mathbf{e}_\theta) + z \mathbf{e}_z \\ &= r (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \mathbf{e}_r + r (-\sin \theta \cos \theta + \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\theta + z \mathbf{e}_z \\ &= r \mathbf{e}_r + z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$



Σχήμα 1.5: Το διάνυσμα θέσης,  $\mathbf{r}$ , σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Στις σφαιρικές συντεταγμένες,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k} \\
 &= r \sin \theta \cos \phi (\sin \theta \cos \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \phi \mathbf{e}_\theta - \sin \phi \mathbf{e}_\phi) \\
 &\quad + r \sin \theta \sin \phi (\sin \theta \sin \phi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \phi \mathbf{e}_\theta + \cos \phi \mathbf{e}_\phi) \\
 &\quad + r \cos \theta (\cos \theta \mathbf{e}_r - \sin \theta \mathbf{e}_\theta) \\
 &= r [\sin^2 \theta (\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) \cos^2 \theta] \mathbf{e}_r \\
 &\quad + r \sin \theta \cos \theta [(\cos^2 \phi + \sin^2 \phi) - 1] \mathbf{e}_\theta \\
 &\quad + r \sin \theta (-\sin \phi \cos \phi + \sin \phi \cos \phi) \mathbf{e}_\phi \\
 &= r \mathbf{e}_r .
 \end{aligned}$$

□

### Παράδειγμα 1.1.3. Παράγωγοι των διανυσμάτων ων βάσης

Τα διανύσματα βάσης  $\mathbf{i}$ ,  $\mathbf{j}$  και  $\mathbf{k}$  των καρτεσιανών συντεταγμένων είναι σταθερά αφού δεν εξαρτώνται από τη θέση ενός σημείου. Αυτό δεν αληθεύει για τα διανύσματα βάσης στα καμπυλόγραμμα συστήματα συντεταγμένων. Στον Πίνακα 1.1 παρατηρούμε ότι στις κυλινδρικές συντεταγμένες

$$\mathbf{e}_r = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j} \quad \text{και} \quad \mathbf{e}_\theta = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} .$$

Είναι φανερό ότι τα  $\mathbf{e}_r$  και  $\mathbf{e}_\theta$  εξαρτώνται από το  $\theta$ . Παραγωγίζοντας βρίσκουμε:

$$\frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j} = \mathbf{e}_\theta$$

και

$$\frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} = -\cos \theta \mathbf{i} - \sin \theta \mathbf{j} = -\mathbf{e}_r .$$



Οι υπόλοιπες χωρικές παράγωγοι των  $\mathbf{e}_r$ ,  $\mathbf{e}_\theta$  και  $\mathbf{e}_z$  είναι μηδενικές. Έτσι έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial r} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial \theta} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial z} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial z} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial z} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.7)$$

Από τον Πίνακα 1.2 βλέπουμε ότι  $\mathbf{e}_r = \mathbf{e}_r(\theta, \phi)$ ,  $\mathbf{e}_\theta = \mathbf{e}_\theta(\theta, \phi)$  και  $\mathbf{e}_\phi = \mathbf{e}_\phi(\phi)$ . Για τις χωρικές παραγώγους των διανυσμάτων βάσης των σφαιρικών συντεταγμένων έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial r} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial r} &= \mathbf{0} & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial r} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} &= \mathbf{e}_\theta & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} &= -\mathbf{e}_r & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \theta} &= \mathbf{0} \\ \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} &= \sin \theta \mathbf{e}_\phi & \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \phi} &= \cos \theta \mathbf{e}_\phi & \frac{\partial \mathbf{e}_\phi}{\partial \phi} &= -\sin \theta \mathbf{e}_r - \cos \theta \mathbf{e}_\theta \end{aligned} \quad (1.8)$$

Οι εξισώσεις (1.7) και (1.8) είναι ιδιαίτερα χρήσιμες στη μετατροπή διαφορικών τελεστών από τις καρτεσιανές σε ορθογώνιες καμπυλόγραμμες συντεταγμένες. □

Υπενθυμίζουμε ότι το διάνυσμα της ταχύτητας ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt}. \quad (1.9)$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες βρίσκουμε

$$\mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k}. \quad (1.10)$$

Είναι φανερό ότι για τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας ισχύει

$$u_x \equiv \frac{dx}{dt}, \quad u_y \equiv \frac{dy}{dt}, \quad u_z \equiv \frac{dz}{dt}. \quad (1.11)$$

#### Παράδειγμα 1.1.4. Συνιστώσες του διανύσματος της ταχύτητας

Θα βρούμε τι αντιπροσωπεύουν οι συνιστώσες της ταχύτητας στα συστήματα κυλινδρικών και καρτεσιανών συντεταγμένων. Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$  παραγωγίζοντας την (1.5) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r\mathbf{e}_r + z\mathbf{e}_z) = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z = \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\mathbf{e}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \implies \\ \mathbf{u} &= \frac{dr}{dt}\mathbf{e}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{e}_\theta + \frac{dz}{dt}\mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.12)$$

Άρα για τις συνιστώσες της ταχύτητας έχουμε:

$$\boxed{u_r \equiv \frac{dr}{dt}, \quad u_\theta \equiv r \frac{d\theta}{dt}, \quad u_z \equiv \frac{dz}{dt}.} \quad (1.13)$$

Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ , παίρνουμε από την (1.6):

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \equiv \frac{d\mathbf{r}}{dt} &= \frac{d}{dt}(r \mathbf{e}_r) = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\mathbf{e}_r}{dt} = \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \left( \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} \frac{d\theta}{dt} + \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \phi} \frac{d\phi}{dt} \right) \implies \\ \mathbf{u} &= \frac{dr}{dt} \mathbf{e}_r + r \frac{d\theta}{dt} \mathbf{e}_\theta + r \sin \theta \frac{d\phi}{dt} \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.14)$$

Άρα οι συνιστώσες της ταχύτητας δίνονται από τις

$$\boxed{u_r \equiv \frac{dr}{dt}, \quad u_\theta \equiv r \frac{d\theta}{dt}, \quad u_\phi \equiv r \sin \theta \frac{d\phi}{dt}.} \quad (1.15)$$

□

## 1.4 Διαφορικοί τελεστές

Στην παράγραφο αυτή ορίζουμε τον *τελεστή κλίσης*, την *κλίση* (gradient) βαθμωτού πεδίου καθώς και την *απόκλιση* (divergence) και τον *στροβιλισμό* (vorticity) διανυσματικού πεδίου.

### Παράδειγμα 1.4.1. Απόκλιση και στροβιλισμός του διανύσματος θέσης

Θεωρούμε το διάνυσμα θέσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες,

$$\mathbf{r} = x \mathbf{i} + y \mathbf{j} + z \mathbf{k}. \quad (1.16)$$

Για την απόκλιση και τον στροβιλισμό του έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{r} &= \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} \implies \\ \nabla \cdot \mathbf{r} &= 3, \end{aligned} \quad (1.17)$$

και

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{r} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \implies \\ \nabla \times \mathbf{r} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.18)$$

Οι εξισώσεις (1.17) και (1.18) ισχύουν σε κάθε σύστημα συντεταγμένων.  $\square$

### 1.4.1 Η υλική παράγωγος

Ο αναγνώστης είναι ήδη εξοικειωμένος με τις έννοιες της *μερικής παραγώγου* (partial derivative) και της *ολικής παραγώγου* (total derivative). Στην παράγραφο αυτή θα εισάγουμε μια άλλη παράγωγο, πολύ σημαντική στη ρευστοδυναμική που είναι γνωστή σαν *υλική παράγωγος* (material derivative). Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε ένα παράδειγμα από το φυσικό κόσμο για να καταδείξουμε τη φυσική σημασία και τις διαφορές των τριών προαναφερθεισών παραγώγων. Θα υποθέσουμε ότι θέλουμε να μετρήσουμε τη θερμοκρασία  $f$  του νερού σ'ένα ποτάμι. Αυτή είναι προφανώς συνάρτηση του διανύσματος θέσης και του χρόνου, δηλαδή της μορφής  $f(\mathbf{r}, t)$  ή  $f(x, y, z, t)$ . Στο παράδειγμά μας υποθέτουμε ότι το βαθμωτό πεδίο  $f$  είναι παραγωγίσιμο.

#### Μερική χρονική παράγωγος

Ως γνωστό για να βρούμε τη μερική χρονική παράγωγο της  $f(x, y, z, t)$  παραγωγίζουμε ως προς το χρόνο  $t$  θεωρώντας τα  $x, y$  και  $z$  σταθερά. Συμβολίζουμε τη μερική χρονική παράγωγο με

$$\left( \frac{\partial f}{\partial t} \right)_{x,y,z}.$$

Στο παράδειγμά μας στεκόμαστε σε μια γέφυρα ή στην όχθη και μετρούμε τη μεταβολή της θερμοκρασίας στο ίδιο σημείο ακριβώς από κάτω μας, δηλαδή **σ'ένα σταθερό σημείο του χώρου**.

#### Ολική χρονική παράγωγος

Όταν το σημείο μέτρησης της (χρονικής) μεταβολής της  $f$  δεν είναι σταθερό, τότε

$$\mathbf{r}(t) = x(t) \mathbf{i} + y(t) \mathbf{j} + z(t) \mathbf{k}.$$

Σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, η ολική χρονική παράγωγος της  $f(x(t), y(t), z(t), t)$  δίνεται από την

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

$$\begin{aligned} \nabla &= \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z} \\ \nabla^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla &= u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \end{aligned}$$


---


$$\begin{aligned} \nabla p &= \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \nabla \times \mathbf{u} &= \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \mathbf{k} \\ \nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \mathbf{i}\mathbf{i} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{i}\mathbf{j} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \mathbf{i}\mathbf{k} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \mathbf{j}\mathbf{i} \\ &\quad + \frac{\partial u_y}{\partial y} \mathbf{j}\mathbf{j} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \mathbf{j}\mathbf{k} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \mathbf{k}\mathbf{i} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \mathbf{k}\mathbf{j} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{k}\mathbf{k} \\ \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left( u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \\ \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

Πίνακας 1.3: Βασικοί διαφορικοί τελεστές σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ : τα  $p$ ,  $\mathbf{u}$  και  $\boldsymbol{\tau}$  είναι βαθμωτό, διανυσματικό και τανυστικό πεδίο, αντίστοιχα.

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}) = (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} + \mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{v}) + \mathbf{v} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{u}) = f \nabla \cdot \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla f$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{v} \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \times \mathbf{v})$$

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{u}) = 0$$

$$\nabla \times (f\mathbf{u}) = f \nabla \times \mathbf{u} + \nabla f \times \mathbf{u}$$

$$\nabla \times (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) = \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{v} - \mathbf{v} \nabla \cdot \mathbf{u} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{v}$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{u}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{u}) - \nabla^2 \mathbf{u}$$

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

$$\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = 2(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} + 2\mathbf{u} \times (\nabla \times \mathbf{u})$$

$$\nabla^2(fg) = f \nabla^2 g + g \nabla^2 f + 2 \nabla f \cdot \nabla g$$

$$\nabla \cdot (\nabla f \times \nabla g) = 0$$

$$\nabla \cdot (f \nabla g - g \nabla f) = f \nabla^2 g - g \nabla^2 f$$

Πίνακας 1.4: Χρήσιμες ταυτότητες με τον τελεστή  $\nabla$ . Τα  $f$  και  $g$  είναι βαθμωτά ενώ τα  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  είναι διανυσματικά πεδία. Νοείται ότι οι μερικές παράγωγοι είναι συνεχείς.

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z}$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} - \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r + \left( \frac{\partial u_r}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) \mathbf{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r$$

$$+ \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z + \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = \left[ u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r$$

$$+ \left[ u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right] \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \left[ u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z$$

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta r}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zr}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} \right] \mathbf{e}_r$$

$$+ \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{z\theta}}{\partial z} - \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta}}{r} \right] \mathbf{e}_\theta$$

$$+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z$$

Πίνακας 1.5: Βασικοί διαφορικοί τελεστές σε κυλινδρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ . τα  $p$ ,  $\mathbf{u}$  και  $\boldsymbol{\tau}$  είναι βαθμωτό, διανυσματικό και τανυστικό πεδίο, αντίστοιχα.

$$\nabla = \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}$$

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$$

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi$$

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi}$$

$$\nabla \times \mathbf{u} = \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\phi \sin \theta) - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] \mathbf{e}_r + \left[ \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\phi) \right] \mathbf{e}_\theta + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) - \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \mathbf{e}_\phi$$

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} = & \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_\phi}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\phi + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r \\ & + \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\phi + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right) \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_r \\ & + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \cot \theta \right) \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\theta + \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \right) \mathbf{e}_\phi \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = & [u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + u_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r} \right) + u_\phi \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \right)] \mathbf{e}_r \\ & + [u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + u_\theta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right) + u_\phi \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} - \frac{u_\phi}{r} \cot \theta \right)] \mathbf{e}_\theta \\ & + [u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + u_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + u_\phi \left( \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta}{r} \cot \theta \right)] \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = & \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta r} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi r}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] \mathbf{e}_r \\ & + \left[ \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\theta}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{\theta r} - \tau_{r\theta} - \tau_{\phi\phi} \cot \theta}{r} \right] \mathbf{e}_\theta \\ & + \left[ \frac{1}{r^3} \frac{\partial}{\partial r} (r^3 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\phi} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{\phi r} - \tau_{r\phi} - \tau_{\phi\theta} \cot \theta}{r} \right] \mathbf{e}_\phi \end{aligned}$$

Πίνακας 1.6: Βασικοί διαφορικοί τελεστές σε σφαιρικές πολικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ : τα  $p$ ,  $\mathbf{u}$  και  $\boldsymbol{\tau}$  είναι βαθμωτό, διανυσματικό και τανυστικό πεδίο, αντίστοιχα.

$(x, y, z)$	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$
$(r, \theta, z)$	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$
$(r, \theta, \phi)$	$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi}$

Πίνακας 1.7: Ο τελεστής της υλικής παραγώγου σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.

ή

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla f, \quad (1.19)$$

όπου

$$\mathbf{u}^* = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

η ταχύτητα με την οποία κινείται το σημείο μέτρησης. Στο παραδειγμά μας, αντί να στεκόμαστε στη γέφυρα, μπαίνουμε σε μια μηχανοκίνητη βάρκα και κάνουμε βόλτες προς διάφορες κατευθύνσεις, άλλοτε αντίθετα προς το ρεύμα και άλλοτε μαζί με το ρεύμα, και μετρούμε τη θερμοκρασία πλευρικά της βάρκας. Η (χρονική) μεταβολή της θερμοκρασίας που παρατηρούμε αντανακλά την κίνηση της βάρκας. Η ταχύτητα  $\mathbf{u}^*$  στην (1.19) είναι η ταχύτητα της βάρκας.

### Υλική παράγωγος

Υποθέτουμε τώρα ότι σβήνουμε τη μηχανή και αφήνουμε το ρεύμα να μας παρασύρει, ενώ συνεχίζουμε να μετρούμε τη μεταβολή της θερμοκρασίας. Η χρονική μεταβολή της θερμοκρασίας που μετρούμε εξαρτάται από την ταχύτητα  $\mathbf{u}$  του ρεύματος. Θέτοντας  $\mathbf{u}^* = \mathbf{u}$  στην (1.19) έχουμε την παράγωγο

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f, \quad (1.20)$$

η οποία καλείται **υλική παράγωγος** (material derivative) ή **ουσιαστική** ή **ουσιώδης παράγωγος** (substantial derivative). Ο πρώτος όρος της υλικής παραγώγου αποτελεί το **μεταβατικό** ή **τοπικό** μέρος και ο δεύτερος το **μεταφερόμενο** ή **συναγόμενο** μέρος της παραγώγου.

Οι μορφές του τελεστή της υλικής παραγώγου,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (1.21)$$

στα διάφορα συστήματα συντεταγμένων φαίνονται στον Πίνακα ;;. Για την υλική παράγωγο του διανυσματικού πεδίου της ταχύτητας ισχύει

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (1.22)$$



**Παράδειγμα 1.4.2. Η εξίσωση συνέχειας**

Η εξίσωση συνέχειας (δηλ. η εξίσωση διατήρησης της μάζας) είναι η

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (1.23)$$

Χρησιμοποιώντας τη δεύτερη ταυτότητα του Πίνακα 1.4 η εξίσωση παίρνει τη μορφή:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.24)$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της υλικής παραγώγου έχουμε επίσης την εναλλακτική μορφή:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (1.25)$$

□

**Παράδειγμα 1.4.3. Εξισώσεις Euler**

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής για **ανιζώδη ροή** είναι γνωστή σαν **εξίσωση Euler**:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p, \quad (1.26)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα και  $p$  η πίεση. Σε καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} &= \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \\ &= \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ &\quad + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned}$$

και

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k}.$$

Από τις πιο πάνω εξισώσεις βρίσκουμε εύκολα τις τρεις συνιστώσες της εξίσωσης Euler σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial x} \\ \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial y} \\ \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= -\frac{\partial p}{\partial z} \end{aligned} \quad (1.27)$$

□

## 1.5 Τανυστικός λογισμός

Έστω  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  μια ορθοκανονική βάση του  $\mathbf{R}^3$ . Στις προηγούμενες παραγράφους ορίσαμε το εσωτερικό γινόμενο,  $\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$  καθώς και το εξωτερικό γινόμενο  $\mathbf{e}_i \times \mathbf{e}_j$ . Το ανοικτό γινόμενο  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  θα το καλούμε μοναδιαίο γινόμενο δυάδας<sup>1</sup> ή απλώς μοναδιαία δυάδα (unit dyad). Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι ενώ ένα μοναδιαίο διάνυσμα αντιπροσωπεύει μια (μόνο) διεύθυνση συντεταγμένων, μια μοναδιαία δυάδα αντιπροσωπεύει ένα διατεταγμένο ζεύγος διευθύνσεων. Έτσι  $\mathbf{ij} \neq \mathbf{ji}$ . Οι μοναδιαίες δυάδες του καρτεσιανού συστήματος συντεταγμένων στον  $\mathbf{R}^3$  είναι οι εξής:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{ii}, & \mathbf{ij}, & \mathbf{ik} \\ \mathbf{ji}, & \mathbf{jj}, & \mathbf{jk} \\ \mathbf{ki}, & \mathbf{kj}, & \mathbf{kk} \end{array}$$

Έστω τώρα τα διανύσματα  $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbf{R}^n$ . Το ανοικτό γινόμενο  $\mathbf{ab}$  καλείται γινόμενο δυάδας (dyad product) ή απλώς δυαδικό (dyadic) ή δυάδα. Αν

$$\mathbf{a} = a_1 \mathbf{i} + a_2 \mathbf{j} + a_3 \mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{i} + b_2 \mathbf{j} + b_3 \mathbf{k}$$

τότε

$$\mathbf{ab} = a_1 b_1 \mathbf{ii} + a_1 b_2 \mathbf{ij} + a_1 b_3 \mathbf{ik} + a_2 b_1 \mathbf{ji} + a_2 b_2 \mathbf{jj} + a_2 b_3 \mathbf{jk} + a_3 b_1 \mathbf{ki} + a_3 b_2 \mathbf{kj} + a_3 b_3 \mathbf{kk}. \quad (1.28)$$

Παρατηρούμε ότι το γινόμενο δυάδας είναι ένας γραμμικός συνδυασμός των μοναδιαίων δυάδων:

$$\mathbf{ab} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.29)$$

Θα ορίσουμε τώρα κάποιες σημαντικές πράξεις μεταξύ μοναδιαίων δυάδων:

i) Γινόμενο μοναδιαίων δυάδων ή γινόμενο τελείας:

$$(\mathbf{ij}) \cdot (\mathbf{kl}) = \mathbf{i} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) \mathbf{l} = \delta_{jk} \mathbf{il} \quad (1.30)$$

Το αποτέλεσμα της πράξης είναι δυαδικό. Παρατηρούμε επίσης ότι δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

ii) Γινόμενο διπλής τελείας ή βαθμωτό γινόμενο:

$$(\mathbf{ij}) : (\mathbf{kl}) = (\mathbf{i} \cdot \mathbf{l}) (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = \delta_{il} \delta_{jk} \quad (1.31)$$

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι βαθμωτό. Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δει ότι

$$(\mathbf{kl}) : (\mathbf{ij}) = (\mathbf{ij}) : (\mathbf{kl})$$

iii) Γινόμενο μοναδιαίας δυάδας με μοναδιαίο διάνυσμα:

$$(\mathbf{ij}) \cdot \mathbf{k} = \mathbf{i} (\mathbf{j} \cdot \mathbf{k}) = \delta_{jk} \mathbf{i} \quad (1.32)$$

Το γινόμενο δυάδας με διάνυσμα μας δίνει διάνυσμα. Προφανώς δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\mathbf{k} \cdot (\mathbf{ij}) = (\mathbf{k} \cdot \mathbf{i}) \mathbf{j} = \delta_{ki} \mathbf{j} \quad (1.33)$$

iv) Εξωτερικό γινόμενο μοναδιαίας δυάδας με μοναδιαίο διάνυσμα:

$$(\mathbf{ij}) \times \mathbf{k} = \mathbf{i} (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \quad (1.34)$$

$$\mathbf{k} \times (\mathbf{ij}) = (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) \mathbf{j} \quad (1.35)$$

<sup>1</sup>Σε αρκετά βιβλία για τη μοναδιαία δυάδα χρησιμοποιείται επίσης ο συμβολισμός  $\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$ .

Το αποτέλεσμα της πράξης αυτής είναι δυαδικό. Δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα.

Στις (1.30)-(1.35) χρησιμοποιούμε τη λεγόμενη **συνθήκη ενθέσης** των Chapman και Milne η οποία θεσπίζει **ζευγάρισμα από μέσα προς τα έξω**. Οι πιο πάνω πράξεις γενικεύονται εύκολα για γινόμενα δυάδας. Αν τα  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$ ,  $\mathbf{c}$  και  $\mathbf{d}$  είναι διανύσματα του  $\mathbf{R}^3$ , τότε

$$(\mathbf{ab}) \cdot (\mathbf{cd}) = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{d} = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{ad} \quad (1.36)$$

$$(\mathbf{ab}) : (\mathbf{cd}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{d}) (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \quad (1.37)$$

$$(\mathbf{ab}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) = (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{a} \quad (1.38)$$

$$\mathbf{c} \cdot (\mathbf{ab}) = (\mathbf{c} \cdot \mathbf{a}) \mathbf{b} \quad (1.39)$$

$$(\mathbf{ab}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \quad (1.40)$$

Υπενθυμίζουμε εδώ ότι στη γενική περίπτωση δεν ισχύει η αντιμεταθετική ιδιότητα:  $\mathbf{ab} \neq \mathbf{ba}$ . Όπως θα δούμε πιο κάτω, η ισότητα ισχύει μόνο όταν ο δυαδικός  $\mathbf{ab}$  είναι συμμετρικός.

Ορίζουμε τώρα ως **δυαδικό** ή **τανυστή δεύτερης τάξης** (second-order tensor) κάθε γραμμικό συνδυασμό των μοναδιαίων δυάδων:

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.41)$$

Είναι φανερό ότι τα γινόμενα δυάδας είναι τανυστές δεύτερης τάξης. Κάθε τανυστής  $\boldsymbol{\tau}$  μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$\boldsymbol{\tau} = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{bmatrix}$$

ή ακόμα, όταν οι διευθύνσεις  $\mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$  εννοούνται, σε μορφή πίνακα

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad (1.42)$$

Γενικεύοντας, οδηγούμαστε στους **πολυαδικούς** ή **τανυστές ανώτερης τάξης**. Έτσι ένας **τριαδικός** ή **τανυστής τρίτης τάξης** είναι γραμμικός συνδυασμός **μοναδιαίων τριάδων**, π.χ.

$$\mathbf{B} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \beta_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \quad (1.43)$$

Ένα βαθμωτό πεδίο είναι τανυστής μηδενικής τάξης ενώ ένα διανυσματικό πεδίο είναι τανυστής πρώτης τάξης.

Οι μοναδιαίες δυάδες είναι φυσικά τανυστές δεύτερης τάξης. Αυτές γράφονται υπό μορφή πίνακα ως εξής:

$$\mathbf{ii} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{ij} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{ik} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \dots$$

Οι ορισμοί που ακολουθούν είναι οικείοι από τη θεωρία πινάκων. Έστω

$$\mathbf{ab} = \sum_i \sum_j a_i b_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

ένα γινόμενο δυάδας. Το γινόμενο δυάδας που προκύπτει αν εναλλάξουμε τους δείκτες των  $a$  και  $b$  στο πιο πάνω άθροισμα καλείται **ανάστροφο γινόμενο δυάδας** και συμβολίζεται με  $(\mathbf{ab})^T$ :

$$(\mathbf{ab})^T = \sum_i \sum_j a_j b_i \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.44)$$

Είναι φανερό ότι  $(\mathbf{ab})^T = \mathbf{ba}$ . Ομοίως ο ανάστροφος του τανυστή δεύτερης τάξης

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

είναι ο

$$\boldsymbol{\tau}^T = \sum_i \sum_j \tau_{ji} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.45)$$

Αν  $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}^T$ , τότε ο  $\boldsymbol{\tau}$  καλείται **συμμετρικός**, ενώ όταν  $\boldsymbol{\tau} = -\boldsymbol{\tau}^T$  ο  $\boldsymbol{\tau}$  καλείται **αντισυμμετρικός**. Είναι φανερό ότι ένας τανυστής της μορφής  $\mathbf{aa}$  είναι συμμετρικός (άσκηση).

Ο **μοναδιαίος τανυστής** (unit tensor) δεύτερης τάξης συμβολίζεται με  $\mathbf{I}$  και ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{I} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.46)$$

ή σε μορφή πίνακα,

$$\mathbf{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

### 1.5.1 Άλγεβρα τανυστών

Όπως και στους πίνακες, το άθροισμα δύο τανυστών

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad \text{και} \quad \boldsymbol{\sigma} = \sum_i \sum_j \sigma_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\tau} + \boldsymbol{\sigma} = \sum_i \sum_j (\tau_{ij} + \sigma_{ij}) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j. \quad (1.47)$$

Επίσης, ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός  $\lambda \boldsymbol{\tau}$ , όπου  $\lambda \in \mathbf{R}$ , ορίζεται ως εξής:

$$\lambda \boldsymbol{\tau} = \sum_i \sum_j \lambda \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.48)$$

Ας δούμε εκ νέου τις βασικές πράξεις μεταξύ τανυστών.

#### ι) Τανυστικό γινόμενο ή γινόμενο τελείας

Το τανυστικό γινόμενο ή γινόμενο τελείας (tensor or dot product) δύο τανυστών  $\boldsymbol{\tau}$  και  $\boldsymbol{\sigma}$  μας δίνει κατά τα γνωστά

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\sigma} &= \left( \sum_i \sum_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) \cdot \left( \sum_k \sum_l \sigma_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \right) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \tau_{ij} \sigma_{kl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \tau_{ij} \sigma_{kl} \delta_{jk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l = \sum_i \sum_j \sum_l \tau_{ij} \sigma_{jl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l \implies \end{aligned}$$

$$\tau \cdot \sigma = \sum_i \sum_l \left( \sum_j \tau_{ij} \sigma_{jl} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_l . \quad (1.49)$$

Παίρνουμε λοιπόν επίσης ένα τανυστή του οποίου η  $(i, l)$  συνιστώσα είναι η

$$\sum_j \tau_{ij} \sigma_{jl}$$

Όπως και στους τετραγωνικούς πίνακες, γράφουμε  $\sigma \cdot \sigma = \sigma^2$ ,  $\sigma \cdot \sigma^2 = \sigma^3$  κ.ο.κ. Η αντιμεταθετική ιδιότητα δεν ισχύει στο τανυστικό γινόμενο. Αν  $\mathbf{I}$  είναι ο μοναδιαίος τανυστής του μπορούμε πολύ εύκολα να δείξουμε ότι

$$\sigma \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \sigma = \sigma . \quad (1.50)$$

### ii ) Γινόμενο διπλής τελείας ή βαθμωτό γινόμενο

Για το λεγόμενο γινόμενο διπλής τελείας ή βαθμωτό γινόμενο (double dot or scalar product) δύο τανυστών έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau : \sigma &= \left( \sum_i \sum_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) : \left( \sum_k \sum_l \sigma_{kl} \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \right) = \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \tau_{ij} \sigma_{kl} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j : \mathbf{e}_k \mathbf{e}_l \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l \tau_{ij} \sigma_{kl} \delta_{il} \delta_{jk} = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \sigma_{ji} \delta_{ii} \delta_{jj} \implies \end{aligned}$$

$$\tau : \sigma = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \sigma_{ji} . \quad (1.51)$$

Το αποτέλεσμα της πράξης είναι βαθμωτό. Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\tau : \mathbf{ab} = \sum_i \sum_j \tau_{ij} a_j b_i \quad (1.52)$$

και

$$\mathbf{ab} : \mathbf{cd} = \sum_i \sum_j a_i b_j c_j d_i \quad (1.53)$$

### iii ) Γινόμενο τανυστή - διανύσματος

Έστω  $\tau$  τανυστής και  $\mathbf{a}$  διάνυσμα. Για το γινόμενο  $\tau \cdot \mathbf{a}$  έχουμε:

$$\begin{aligned} \tau \cdot \mathbf{a} &= \left( \sum_i \sum_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right) \cdot \left( \sum_k a_k \mathbf{e}_k \right) = \sum_i \sum_j \sum_k \tau_{ij} a_k \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_k \\ &= \sum_i \sum_j \sum_k \tau_{ij} a_k \delta_{jk} \mathbf{e}_i = \sum_i \sum_j \tau_{ij} a_j \delta_{jj} \mathbf{e}_i \implies \end{aligned}$$

$$\tau \cdot \mathbf{a} = \sum_i \left( \sum_j \tau_{ij} a_j \right) \mathbf{e}_i . \quad (1.54)$$

Το αποτέλεσμα της πράξης είναι ένα διάνυσμα με  $i$  συνιστώσα την

$$\sum_j \tau_{ij} a_j .$$

Ομοίως, για το γινόμενο  $\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}$  βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_i \left( \sum_j a_j \tau_{ji} \right) \mathbf{e}_i . \quad (1.55)$$

Παρατηρούμε ότι γενικά  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a} \neq \mathbf{a} \cdot \boldsymbol{\tau}$ . Η ισότητα ισχύει πάντα όταν ο  $\boldsymbol{\tau}$  είναι συμμετρικός.

## 1.5.2 Τανυστές στη ρευστοδυναμική

### Ο τανυστής τάσεων

Στη ρευστοδυναμική, ο **τανυστής ιξωδών τάσεων** (viscous stress tensor) που θα τον συμβολίζουμε με  $\boldsymbol{\tau}$ ,

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_i \sum_j \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j , \quad (1.56)$$

αντιπροσωπεύει τις ιξώδεις τάσεις σ'ένα ρευστό. Στις καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε την πινακομορφή

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix} \quad \text{ή} \quad \boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{bmatrix} \quad (1.57)$$

Ο τανυστής τάσεων είναι **συμμετρικός**, δηλαδή  $\tau_{xy} = \tau_{yx}$ ,  $\tau_{xz} = \tau_{zx}$  και  $\tau_{yz} = \tau_{zy}$ . Οι διαγώνιες συνιστώσες,  $\tau_{xx}$ ,  $\tau_{yy}$  και  $\tau_{zz}$ , καλούνται **κάθετες τάσεις** (normal stresses), ενώ οι εξωδιαγώνιες συνιστώσες του τανυστή τάσεων καλούνται **διατμητικές τάσεις** (shear stresses).

Ο **ολικός τανυστής τάσεων**  $\boldsymbol{\sigma}$  (total stress tensor) ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma} = -p \mathbf{I} + \boldsymbol{\tau} \quad (1.58)$$

όπου  $p$  η πίεση και  $\mathbf{I}$  ο μοναδιαίος τανυστής. Είναι φανερό ότι ο  $\boldsymbol{\sigma}$  είναι επίσης συμμετρικός. Ο τανυστής  $-p \mathbf{I}$  καλείται **τανυστής τάσεων πίεσης** (pressure stress tensor). Είναι ισότροπος (isotropic) γιατί όταν δρά πάνω σε μια επιφάνεια μας δίνει **έλξη** (traction) επιφάνειας. Πράγματι, αν  $\mathbf{n}$  είναι το μοναδιαίο κάθετο σε μια επιφάνεια διάνυσμα τότε

$$|\mathbf{n} \cdot (-p \mathbf{I})| = |-p \mathbf{n} \cdot \mathbf{I}| = |-p \mathbf{n}| = p$$

Αυτό δεν συμβαίνει με τον τανυστή τάσεων  $\boldsymbol{\tau}$  που είναι ανισότροπος. Ο ολικός τανυστής τάσεων μπορεί να γραφτεί επίσης στη μορφή:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \\ 0 & -p & 0 \\ 0 & 0 & -p \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & \tau_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & \tau_{zz} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & 0 & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & 0 \end{bmatrix} \quad (1.59)$$

όπου ο πρώτος πίνακας δίνει τις τάσεις πίεσης, ο δεύτερος τις ιξώδεις κάθετες τάσεις και ο τρίτος τις ιξώδεις διατμητικές τάσεις.

### Ο τανυστής κλίσεων της ταχύτητας

Ο τανυστής κλίσεων της ταχύτητας (velocity-gradient tensor) συμβολίζεται με  $\nabla \mathbf{u}$  και είναι ένα γινόμενο δυάδας. Στις καρτεσιανές συντεταγμένες βρίσκουμε απλά:

$$\nabla \mathbf{u} = \left( \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \right) (u_x \mathbf{i} + u_y \mathbf{j} + u_z \mathbf{k}) \implies$$

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \mathbf{ii} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \mathbf{ij} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \mathbf{ik} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \mathbf{ji} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \mathbf{jj} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \mathbf{jk} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \mathbf{ki} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \mathbf{kj} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{kk}. \quad (1.60)$$

Πιο σύντομα μπορούμε να γράψουμε

$$\nabla \mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.61)$$

ή σε μορφή πίνακα

$$\nabla \mathbf{u} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{\partial u_y}{\partial x} & \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} & \frac{\partial u_y}{\partial z} & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.62)$$

Εργαζόμενοι ανάλογα μπορούμε να βρούμε τον τανυστή κλίσεων της ταχύτητας σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες. (Προσοχή: ο τύπος (1.61) δεν ισχύει σ'αυτά τα συστήματα.)

### Οι τανυστές ρυθμών παραμόρφωσης και στροβιλισμού

Όπως και κάθε άλλος τανυστής δεύτερης τάξης, ο τανυστής κλίσεων της ταχύτητας  $\nabla \mathbf{u}$  μπορεί να γραφτεί ως άθροισμα ενός συμμετρικού και ενός αντισυμμετρικού τανυστή ως εξής:

$$\nabla \mathbf{u} = \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}) + (\nabla \mathbf{u})^T] + \frac{1}{2} [(\nabla \mathbf{u}) - (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1.63)$$

όπου το πρώτο ημίθροισμα είναι συμμετρικός τανυστής και το δεύτερο αντισυμμετρικός τανυστής.

Ο συμμετρικός τανυστής

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1.64)$$

καλείται τανυστής ρυθμών παραμόρφωσης (rate of strain or rate of deformation tensor) ενώ ο αντισυμμετρικός τανυστής

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1.65)$$

καλείται τανυστής στροβιλισμού (vorticity tensor). Σύμφωνα με τους πιο πάνω ορισμούς μπορούμε να γράψουμε

$$\nabla \mathbf{u} = \mathbf{D} + \mathbf{\Omega}. \quad (1.66)$$

Ο τανυστής ρυθμών παραμόρφωσης  $\mathbf{D}$  αντιπροσωπεύει τις παραμορφώσεις του ρευστού και είναι μηδενικός όταν έχουμε μετάθεση ή περιστροφή στερεού σώματος (solid body translation or rotation), αφού τότε δεν έχουμε παραμορφώσεις. Ο τανυστής στροβιλισμού  $\mathbf{\Omega}$  αντιπροσωπεύει το στροβιλώδες της ροής και έτσι είναι μηδενικός σε αστρόβιλες ροές.

Για τον τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες έχουμε

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} \left[ \sum_i \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j + \sum_i \sum_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \right] \implies$$

$$\mathbf{D} = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.67)$$

ή σε μορφή πίνακα:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & \frac{\partial u_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial u_z}{\partial z} \end{bmatrix}. \quad (1.68)$$

Είναι φανερό ότι οι συνιστώσες του  $\mathbf{D}$  είναι:

$$\begin{aligned} D_{xx} &= \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ D_{yy} &= \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ D_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ D_{xy} &= D_{yx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ D_{xz} &= D_{zx} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ D_{yz} &= D_{zy} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.69)$$

Ομοίως για τον τανυστή στροβιλισμού βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{\Omega} = \sum_i \sum_j \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_j}{\partial x_i} - \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.70)$$

ή σε μορφή πίνακα

$$\mathbf{\Omega} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} - \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} - \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \\ \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \right) & 0 \end{bmatrix}. \quad (1.71)$$

### Παράδειγμα 1.5.1

Για να βρούμε τους  $\nabla \mathbf{u}$  και  $\mathbf{D}$  σε κυλινδρικές συντεταγμένες, θεωρούμε το  $\nabla \mathbf{u}$  ως δυάδα σ' αυτό το σύστημα:

$$\nabla \mathbf{u} = \left( \mathbf{e}_r \frac{\partial}{\partial r} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \mathbf{e}_z \frac{\partial}{\partial z} \right) (u_r \mathbf{e}_r + u_\theta \mathbf{e}_\theta + u_z \mathbf{e}_z).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα μοναδιαία διανύσματα δεν είναι σταθερά σ' αυτό το σύστημα συντεταγμένων βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{u} &= \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \frac{\partial u_z}{\partial r} \\ &+ \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} u_r \frac{\partial \mathbf{e}_r}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \frac{1}{r} u_\theta \frac{\partial \mathbf{e}_\theta}{\partial \theta} + \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \\ &+ \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r \frac{\partial u_r}{\partial z} + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \quad \Rightarrow \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
\nabla \mathbf{u} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \\
&+ \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z \\
&+ \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z .
\end{aligned} \tag{1.72}$$

Για τον ανάστροφο  $(\nabla \mathbf{u})^T$  έχουμε:

$$\begin{aligned}
(\nabla \mathbf{u})^T &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - u_\theta \right) \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_r}{\partial z} \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z \\
&+ \frac{\partial u_\theta}{\partial r} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z \\
&+ \frac{\partial u_z}{\partial r} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial u_z}{\partial z} \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z .
\end{aligned} \tag{1.73}$$

Μπορούμε τώρα με βάση τον ορισμό να βρούμε τις συνιστώσες του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}
D_{rr} &= \frac{\partial u_r}{\partial r} \\
D_{\theta\theta} &= \frac{1}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\
D_{zz} &= \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
D_{rz} &= D_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\
D_{r\theta} &= D_{\theta r} = \frac{1}{2} \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\
D_{\theta z} &= D_{z\theta} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right)
\end{aligned} \tag{1.74}$$

□

### Παράδειγμα 1.5.2. Η καταστατική εξίσωση Νευτώνειου ρευστού

Η υλική ή καταστατική εξίσωση (constitutive equation) ενός ρευστού είναι η συνάρτηση που απεικονίζει τον τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης  $\mathbf{D}$  στον τανυστή ιξωδών τάσεων  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{f}(\mathbf{D}) . \tag{1.75}$$

Στα Νευτώνεια ρευστά (Newtonian fluids), η υλική σχέση είναι της μορφής

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} + \left( k - \frac{2}{3} \eta \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \tag{1.76}$$

όπου  $\eta$  και  $k$  σταθερές και  $\mathbf{u}$  το διάνυσμα της ταχύτητας. Η σταθερά  $\eta$  καλείται **διατμητικό ιξώδες** (shear viscosity) ή απλώς **ιξώδες** ενώ η  $k$  (που έχει προφανώς τις ίδιες μονάδες με το ιξώδες) καλείται **μαζικό ιξώδες** (bulk viscosity). Το μόνο που γνωρίζουμε για το μαζικό ιξώδες  $k$  είναι ότι η τιμή του είναι ακριβώς μηδέν για μονοατομικά αέρια χαμηλής πυκνότητας. Σε όλες τις άλλες εφαρμογές, λόγω έλλειψης επιλογών, το μαζικό ιξώδες τίθεται **αυθαίρετα** (!) ίσο με μηδέν (R.B. Bird, R.C. Armstrong and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, John Wiley & Sons, New York, 1987). Έτσι η (1.76) γίνεται:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} - \frac{2}{3} \eta \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I} \tag{1.77}$$

Η πιο πάνω εξίσωση απλοποιείται ακόμα περισσότερο όταν η ροή είναι ασυμπίεστη, δηλαδή όταν η πυκνότητα  $\rho$  του ρευστού είναι σταθερή. Στην περίπτωση αυτή, η εξίσωση συνέχειας παίρνει τη μορφή  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ , οπότε:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}. \quad (1.78)$$

Η (1.78) αποτελεί την υλική σχέση Νευτώνειου ρευστού σε ασυμπίεστη ροή. Με βάση τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου, μπορούμε πολύ εύκολα να βρούμε τις συνιστώσες της (1.78) σε καρτεσιανές και κυλινδρικές συντεταγμένες:

**Καρτεσιανές συντεταγμένες:**

$$\begin{aligned} \tau_{xx} &= 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x} \\ \tau_{yy} &= 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y} \\ \tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{xy} &= \tau_{yx} = \eta \left( \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial y} \right) \\ \tau_{xz} &= \tau_{zx} = \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \\ \tau_{yz} &= \tau_{zy} = \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \end{aligned} \quad (1.79)$$

**Κυλινδρικές συντεταγμένες:**

$$\begin{aligned} \tau_{rr} &= 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r} \\ \tau_{\theta\theta} &= \frac{2\eta}{r} \left( u_r + \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} \right) \\ \tau_{zz} &= 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z} \\ \tau_{rz} &= \tau_{zr} = \eta \left( \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \\ \tau_{r\theta} &= \tau_{\theta r} = \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right] \\ \tau_{\theta z} &= \tau_{z\theta} = \eta \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right) \end{aligned} \quad (1.80)$$

□

Ο τανυστής μεταφερόμενης ορμής

Ο τανυστής μεταφερόμενης ορμής

$$\rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \rho \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_i u_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \quad (1.81)$$

είναι ένα γινόμενο δυάδας. Ο συμμετρικός αυτός τανυστής γράφεται σε μορφή πίνακα ως εξής

$$\rho \mathbf{uu} = \rho \begin{bmatrix} u_x^2 & u_x u_y & u_x u_z \\ u_y u_x & u_y^2 & u_y u_z \\ u_z u_x & u_z u_y & u_z^2 \end{bmatrix}. \quad (1.82)$$

### 1.5.3 Απόκλιση τανυστικού πεδίου

Θα βρούμε πρώτα την απόκλιση του δυαδικού

$$\mathbf{ab} = \sum_j^3 \sum_k^3 a_j b_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k \quad (1.83)$$

όπου  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  διανύσματα του  $\mathbf{R}^3$ , βρίσκοντας το γινόμενο  $\nabla \cdot \mathbf{ab}$  όπου

$$\nabla \cdot = \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \quad (1.84)$$

ο τελεστής κλίσης σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{ab} &= \sum_i^3 \mathbf{e}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \cdot \sum_j^3 \sum_k^3 a_j b_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 \mathbf{e}_i \cdot \frac{\partial}{\partial x_i} (a_j b_k \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k) \\ &= \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 \frac{\partial (a_j b_k)}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k = \sum_i^3 \sum_j^3 \sum_k^3 \frac{\partial (a_j b_k)}{\partial x_i} \delta_{ij} \mathbf{e}_k \\ &= \sum_j^3 \sum_k^3 \frac{\partial (a_j b_k)}{\partial x_j} \mathbf{e}_k = \sum_k^3 \sum_j^3 \frac{\partial (a_j b_k)}{\partial x_j} \mathbf{e}_k \end{aligned}$$

ή

$$\nabla \cdot \mathbf{ab} = \sum_i^3 \sum_j^3 \frac{\partial (a_j b_i)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i. \quad (1.85)$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να βρούμε την απόκλιση ενός τανυστή  $\boldsymbol{\tau}$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\boxed{\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \sum_i^3 \sum_j^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \mathbf{e}_i.} \quad (1.86)$$

Η  $i$  συνιστώσα του  $\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$  είναι

$$\sum_j^3 \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j}.$$

#### Παράδειγμα 1.5.3. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής για κάθε ρευστό γράφεται σε διανυσματική μορφή ως εξής:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (1.87)$$

όπου  $\mathbf{g}$  το διάνυσμα της επιτάχυνσης της βαρύτητας,

$$\mathbf{g} = g_x \mathbf{i} + g_y \mathbf{j} + g_z \mathbf{k} \quad (1.88)$$

Είδαμε προηγουμένως ότι στις καρτεσιανές συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = & \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ & + \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.89)$$

Από την Εξ. (1.86) βρίσκουμε ότι

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \mathbf{j} + \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{k}. \quad (1.90)$$

Μπορούμε λοιπόν να βρούμε τις τρεις συνιστώσες της Εξ. (1.87) αντικαθιστώντας τις (1.88), (1.89) και (1.90):

<p><b>x-συνιστώσα:</b></p> $\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} + \rho g_x$ <p><b>y-συνιστώσα:</b></p> $\rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} + \rho g_y$ <p><b>z-συνιστώσα:</b></p> $\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} + \rho g_z$	(1.91)
--	--------

Γνωρίζουμε ότι στην περίπτωση Νευτώνειου ρευστού σε **ασυμπίεστη ροή** ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ) ο τανυστής τάσεων δίνεται από την

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} = \eta [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1.92)$$

Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι ισχύει τότε (άσκηση)

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.93)$$

Αντικαθιστώντας στην (1.87) παίρνουμε την **εξίσωση των Navier-Stokes**:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (1.94)$$

Οι συνιστώσες της (1.94) σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

<p><b>x-συνιστώσα:</b></p> $\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x$ <p><b>y-συνιστώσα:</b></p> $\rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y$ <p><b>z-συνιστώσα:</b></p> $\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z$	(1.95)
--	--------

Οι πιο πάνω εξισώσεις συμπληρώνονται με την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή:

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.96)$$

Έτσι έχουμε ένα σύστημα τεσσάρων μερικών διαφορικών εξισώσεων που αντιστοιχούν στα τέσσερα βαθμωτά πεδία:  $u_x$ ,  $u_y$ ,  $u_z$  και  $p$ .

□

#### Παράδειγμα 1.5.4. Η αποκλιση του τελεστή μεταφερόμενης ορμής

Θα βρούμε την απόκλιση του τανυστή μεταφερόμενης ορμής  $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$  για ασυμπίεστη ροή.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} &= \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{u} = \rho \sum_i \sum_j \frac{\partial (u_i u_j)}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \\ &= \rho \sum_i \sum_j \left( u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i \\ &= \rho \sum_i \sum_j u_i \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \mathbf{e}_i + \rho \sum_i \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \\ &= \rho \sum_i u_i \left( \sum_j \frac{\partial u_j}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i + \rho \sum_i \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \mathbf{e}_i \\ &= \rho \sum_i u_i \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{e}_i + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \implies \end{aligned}$$

$$\boxed{\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} (\nabla \cdot \mathbf{u}) + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}.} \quad (1.97)$$

Για ασυμπίεστη ροή,  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$  και έτσι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος της (1.97) μηδενίζεται. Άρα ισχύει

$$\nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (1.98)$$

Έτσι, για **ασυμπίεστη ροή** οι εξισώσεις διατήρησης της ορμής παίρνουν επίσης τη μορφή

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (1.99)$$

ενώ για **ασυμπίεστη Νευτώνεια ροή** ισχύει

$$\rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (1.100)$$

□

#### 1.5.4 Πρωτεύουσες διευθύνσεις και αναλλοίωτες τανυστή

Let  $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$  be an orthonormal basis of the three dimensional space and  $\boldsymbol{\tau}$  be a second-order tensor,

$$\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j, \quad (1.101)$$

or, in matrix notation,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}. \quad (1.102)$$

If certain conditions are satisfied, it is possible to identify an orthonormal basis  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  such that

$$\boldsymbol{\tau} = \lambda_1 \mathbf{n}_1 \mathbf{n}_1 + \lambda_2 \mathbf{n}_2 \mathbf{n}_2 + \lambda_3 \mathbf{n}_3 \mathbf{n}_3, \quad (1.103)$$

which means that the matrix form of  $\boldsymbol{\tau}$  in the coordinate system defined by the new basis is diagonal:

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}. \quad (1.104)$$

The orthogonal vectors  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  and  $\mathbf{n}_3$  that *diagonalize*  $\boldsymbol{\tau}$  are called the *principal directions*, and  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  are called the *principal values* of  $\boldsymbol{\tau}$ . From Eq. (1.105), one observes that the vector fluxes through the surface of unit normal  $\mathbf{n}_i$ ,  $i=1,2,3$ , satisfy the relation

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n}_i = \lambda_i \mathbf{n}_i, \quad i = 1, 2, 3. \quad (1.105)$$

What the above equation says is that the vector flux through the surface with unit normal  $\mathbf{n}_i$  is collinear with  $\mathbf{n}_i$ , i.e.,  $\mathbf{n}_i \cdot \boldsymbol{\tau}$  is normal to that surface and its tangential component is zero. From Eq. (1.107) one gets:

$$(\boldsymbol{\tau} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0}, \quad (1.106)$$

where  $\mathbf{I}$  is the unit tensor.

In mathematical terminology, Eq. (1.108) defines an *eigenvalue problem*. The principal directions and values of  $\boldsymbol{\tau}$  are thus also called the *eigenvectors* and *eigenvalues* of  $\boldsymbol{\tau}$ , respectively. The eigenvalues are determined by solving the *characteristic equation*,

$$\det(\boldsymbol{\tau} - \lambda \mathbf{I}) = 0 \quad (1.107)$$

or

$$\begin{vmatrix} \tau_{11} - \lambda & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} - \lambda & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0, \quad (1.108)$$

which guarantees nonzero solutions to the homogeneous system (1.108). The characteristic equation is a cubic equation and, therefore, it has three roots,  $\lambda_i$ ,  $i=1,2,3$ . After determining an eigenvalue  $\lambda_i$ , one can determine the eigenvectors,  $\mathbf{n}_i$ , associated with  $\lambda_i$  by solving the *characteristic system* (1.108). When the tensor (or matrix)  $\boldsymbol{\tau}$  is symmetric, all eigenvalues and the associated eigenvectors are real. This is the case with most tensors arising in fluid mechanics.

### Example 1.5.5. Principal values and directions

(a) Find the principal values of the tensor

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} x & 0 & z \\ 0 & 2y & 0 \\ z & 0 & x \end{bmatrix}.$$

(b) Determine the principal directions  $\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3$  at the point  $(0,1,1)$ .

(c) Verify that the vector flux through a surface normal to a principal direction  $\mathbf{n}_i$  is collinear with  $\mathbf{n}_i$ .

(d) What is the matrix form of the tensor  $\boldsymbol{\tau}$  in the coordinate system defined by  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ ?

*Solution:*

(a) The characteristic equation of  $\boldsymbol{\tau}$  is

$$0 = \det(\boldsymbol{\tau} - \lambda \mathbf{I}) = \begin{vmatrix} x - \lambda & 0 & z \\ 0 & 2y - \lambda & 0 \\ z & 0 & x - \lambda \end{vmatrix} = (2y - \lambda) \begin{vmatrix} x - \lambda & z \\ z & x - \lambda \end{vmatrix} \implies$$

$$(2y - \lambda)(x - \lambda - z)(x - \lambda + z) = 0.$$

The eigenvalues of  $\boldsymbol{\tau}$  are  $\lambda_1=2y$ ,  $\lambda_2=x-z$  and  $\lambda_3=x+z$ .

(b) At the point  $(0, 1, 1)$ ,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{i}\mathbf{k} + 2\mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{i},$$

and  $\lambda_1=2$ ,  $\lambda_2=-1$  and  $\lambda_3=1$ . The associated eigenvectors are determined by solving the corresponding characteristic system:

$$(\boldsymbol{\tau} - \lambda_i \mathbf{I}) \cdot \mathbf{n}_i = \mathbf{0}, \quad i = 1, 2, 3.$$

For  $\lambda_1=2$ , one gets

$$\begin{bmatrix} 0-2 & 0 & 1 \\ 0 & 2-2 & 0 \\ 1 & 0 & 0-2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x1} \\ n_{y1} \\ n_{z1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \implies \left. \begin{array}{l} -2n_{x1} + n_{z1} = 0 \\ 0 = 0 \\ n_{x1} - 2n_{z1} = 0 \end{array} \right\} \implies n_{x1} = n_{z1} = 0.$$

Therefore, the eigenvectors associated with  $\lambda_1$  are of the form  $(0, a, 0)$ , where  $a$  is an arbitrary nonzero constant. For  $a=1$ , the eigenvector is *normalized*, i.e. it is of unit magnitude. We set

$$\mathbf{n}_1 = (0, 1, 0) = \mathbf{j}.$$

Similarly, solving the characteristic systems

$$\begin{bmatrix} 0+1 & 0 & 1 \\ 0 & 2+1 & 0 \\ 1 & 0 & 0+1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x2} \\ n_{y2} \\ n_{z2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

of  $\lambda_2=-1$ , and

$$\begin{bmatrix} 0-1 & 0 & 1 \\ 0 & 2-1 & 0 \\ 1 & 0 & 0-1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_{x3} \\ n_{y3} \\ n_{z3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

of  $\lambda_3=1$ , we find the normalized eigenvectors

$$\mathbf{n}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, -1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k})$$

and

$$\mathbf{n}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, 0, 1) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}).$$

We observe that the three eigenvectors,  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  and  $\mathbf{n}_3$  are orthogonal:<sup>2</sup>

$$\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2 = \mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{n}_3 = \mathbf{n}_3 \cdot \mathbf{n}_1 = 0.$$

(c) The vector fluxes through the three surfaces normal to  $\mathbf{n}_1$ ,  $\mathbf{n}_2$  and  $\mathbf{n}_3$  are:

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \cdot \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{j} \cdot (\mathbf{i}\mathbf{k} + 2\mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{i}) = 2\mathbf{j} = 2\mathbf{n}_1, \\ \mathbf{n}_2 \cdot \boldsymbol{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} - \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}\mathbf{k} + 2\mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{k} - \mathbf{i}) = -\mathbf{n}_2, \\ \mathbf{n}_3 \cdot \boldsymbol{\tau} &= \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{i} + \mathbf{k}) \cdot (\mathbf{i}\mathbf{k} + 2\mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{k}\mathbf{i}) = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{k} + \mathbf{i}) = \mathbf{n}_3. \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>A well known result of linear algebra is that the eigenvectors associated with distinct eigenvalues of a symmetric matrix are orthogonal. If two eigenvalues are the same, then the two linearly independent eigenvectors determined by solving the corresponding characteristic system may not be orthogonal. From these two eigenvectors, however, a pair of orthogonal eigenvectors can be obtained using the *Gram-Schmidt orthogonalization process*; see, for example, [3].

(d) The matrix form of  $\boldsymbol{\tau}$  in the coordinate system defined by  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$  is

$$\boldsymbol{\tau} = 2\mathbf{n}_1\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2\mathbf{n}_2 + \mathbf{n}_3\mathbf{n}_3 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

□

The *trace*,  $tr\boldsymbol{\tau}$ , of a tensor  $\boldsymbol{\tau}$  is defined by

$$tr\boldsymbol{\tau} \equiv \sum_{i=1}^3 \tau_{ii} = \tau_{11} + \tau_{22} + \tau_{33}. \quad (1.109)$$

An interesting observation for the tensor  $\boldsymbol{\tau}$  of Example 1.5.5 is that its trace is the same (equal to 2) in both coordinate systems defined by  $\{\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}\}$  and  $\{\mathbf{n}_1, \mathbf{n}_2, \mathbf{n}_3\}$ . Actually, it can be shown that the trace of a tensor is independent of the coordinate system to which its components are referred. Such quantities are called *invariants* of a tensor.<sup>3</sup> There are three independent invariants of a second-order tensor  $\boldsymbol{\tau}$ :

$$I \equiv tr\boldsymbol{\tau} = \sum_{i=1}^3 \tau_{ii}, \quad (1.110)$$

$$II \equiv tr\boldsymbol{\tau}^2 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}\tau_{ji}, \quad (1.111)$$

$$III \equiv tr\boldsymbol{\tau}^3 = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \tau_{ij}\tau_{jk}\tau_{ki}, \quad (1.112)$$

where  $\boldsymbol{\tau}^2 = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}$  and  $\boldsymbol{\tau}^3 = \boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}^2$ . Other invariants can be formed by simply taking combinations of  $I$ ,  $II$  and  $III$ . Another common set of independent invariants is the following:

$$I_1 = I = tr\boldsymbol{\tau}, \quad (1.113)$$

$$I_2 = \frac{1}{2}(I^2 - II) = \frac{1}{2}[(tr\boldsymbol{\tau})^2 - tr\boldsymbol{\tau}^2], \quad (1.114)$$

$$I_3 = \frac{1}{6}(I^3 - 3I II + 2III) = \det \boldsymbol{\tau}. \quad (1.115)$$

$I_1$ ,  $I_2$  and  $I_3$  are called *basic invariants* of  $\boldsymbol{\tau}$ . The characteristic equation of  $\boldsymbol{\tau}$  can be written as<sup>4</sup>

$$\lambda^3 - I_1\lambda^2 + I_2\lambda - I_3 = 0. \quad (1.116)$$

If  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  are the eigenvalues of  $\boldsymbol{\tau}$ , the following identities hold:

$$I_1 = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = tr\boldsymbol{\tau}, \quad (1.117)$$

$$I_2 = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = \frac{1}{2}[(tr\boldsymbol{\tau})^2 - tr\boldsymbol{\tau}^2], \quad (1.118)$$

$$I_3 = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = \det \boldsymbol{\tau}. \quad (1.119)$$

The theorem of Cayley-Hamilton states that a square matrix (or a tensor) is a root of its characteristic equation, i.e.,

$$\boldsymbol{\tau}^3 - I_1\boldsymbol{\tau}^2 + I_2\boldsymbol{\tau} - I_3\mathbf{I} = \mathbf{O}. \quad (1.120)$$

<sup>3</sup>From a vector  $\mathbf{v}$ , only one independent invariant can be constructed. This is the magnitude  $v = \sqrt{\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}}$  of  $\mathbf{v}$ .

<sup>4</sup>The component matrices of a tensor in two different coordinate systems are *similar*. An important property of similar matrices is that they have the same characteristic polynomial; hence, the coefficients  $I_1$ ,  $I_2$  and  $I_3$  and the eigenvalues  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  and  $\lambda_3$  are invariant under a change of coordinate system.



Note that in the last equation, the boldface quantities  $\mathbf{I}$  and  $\mathbf{O}$  are the unit and zero tensors, respectively. As implied by its name, the *zero tensor* is the tensor whose all components are zero.

### Example 1.5.6. The first invariant

Consider the tensor

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \mathbf{ik} + 2\mathbf{jj} + \mathbf{ki},$$

encountered in Example 1.5.5. Its first invariant is

$$I \equiv \text{tr}\boldsymbol{\tau} = 0 + 2 + 0 = 2.$$

Verify that the value of  $I$  is the same in cylindrical coordinates.

*Solution:*

Using the relations of Table 1.1, we have

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\tau} &= \mathbf{ik} + 2\mathbf{jj} + \mathbf{ki} \\ &= (\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \mathbf{e}_z + 2(\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta)(\sin\theta \mathbf{e}_r + \cos\theta \mathbf{e}_\theta) \\ &\quad + \mathbf{e}_z(\cos\theta \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_\theta) \\ &= 2\sin^2\theta \mathbf{e}_r \mathbf{e}_r + 2\sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_r \mathbf{e}_\theta + \cos\theta \mathbf{e}_r \mathbf{e}_z + \\ &\quad 2\sin\theta \cos\theta \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_r + 2\cos^2\theta \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_\theta - \sin\theta \mathbf{e}_\theta \mathbf{e}_z + \\ &\quad \cos\theta \mathbf{e}_z \mathbf{e}_r - \sin\theta \mathbf{e}_z \mathbf{e}_\theta + 0 \mathbf{e}_z \mathbf{e}_z. \end{aligned}$$

Therefore, the component matrix of  $\boldsymbol{\tau}$  in cylindrical coordinates  $\{\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z\}$  is

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} 2\sin^2\theta & 2\sin\theta \cos\theta & \cos\theta \\ 2\sin\theta \cos\theta & 2\cos^2\theta & -\sin\theta \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 \end{bmatrix}.$$

Notice that  $\boldsymbol{\tau}$  remains symmetric. Its first invariant is

$$I = \text{tr}\boldsymbol{\tau} = 2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) + 0 = 2,$$

as it should be. □

### 1.5.5 Συμβολισμός δεικτών και η σύμβαση άθροισης

So far, we have used three different ways for representing tensors and vectors:

- (a) the compact *symbolic notation*, e.g.,  $\mathbf{u}$  for a vector and  $\boldsymbol{\tau}$  for a tensor;
- (b) the so-called *Gibbs' notation*, e.g.,

$$\sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i \quad \text{and} \quad \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j$$

for  $\mathbf{u}$  and  $\boldsymbol{\tau}$ , respectively; and

- (c) the *matrix notation*, e.g.,

$$\boldsymbol{\tau} = \begin{bmatrix} \tau_{11} & \tau_{12} & \tau_{13} \\ \tau_{21} & \tau_{22} & \tau_{23} \\ \tau_{31} & \tau_{32} & \tau_{33} \end{bmatrix}$$

for  $\boldsymbol{\tau}$ .

Very frequently, in the literature, use is made of the *index notation* and the so-called *Einstein's summation convention*, in order to simplify expressions involving vector and tensor operations by omitting the summation symbols.

In index notation, a vector  $\mathbf{v}$  is represented as

$$v_i \equiv \sum_{i=1}^3 v_i \mathbf{e}_i = \mathbf{v}. \quad (1.121)$$

A tensor  $\boldsymbol{\tau}$  is represented as

$$\tau_{ij} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \tau_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\tau}. \quad (1.122)$$

The nabla operator, for example, is represented as

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla, \quad (1.123)$$

where  $x_i$  is the general Cartesian coordinate taking on the values of  $x$ ,  $y$  and  $z$ . The unit tensor  $\mathbf{I}$  is represented by Kronecker's delta:

$$\delta_{ij} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \delta_{ij} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{I}. \quad (1.124)$$

It is evident that an explicit statement must be made when the tensor  $\tau_{ij}$  is to be distinguished from its  $(i, j)$  element.

With Einstein's summation convention, if an index appears twice in an expression, then summation is implied with respect to the *repeated* index, over the range of that index. The number of the *free indices*, i.e., the indices that appear only once, is the number of directions associated with an expression; it thus determines whether an expression is a scalar, a vector or a tensor. In the following expressions, there are no free indices, and thus these are scalars:

$$u_i v_i \equiv \sum_{i=1}^3 u_i v_i = \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}, \quad (1.125)$$

$$\tau_{ii} \equiv \sum_{i=1}^3 \tau_{ii} = \text{tr} \boldsymbol{\tau}, \quad (1.126)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = \nabla \cdot \mathbf{u}, \quad (1.127)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_i} \text{ or } \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = \nabla^2 f, \quad (1.128)$$

where  $\nabla^2$  is the *Laplacian operator* to be discussed in more detail in Section 1.4. In the following expression, there are two sets of double indices, and summation must be performed over both sets:

$$\sigma_{ij} \tau_{ji} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sigma_{ij} \tau_{ji} = \boldsymbol{\sigma} : \boldsymbol{\tau}. \quad (1.129)$$

The following expressions, with one free index, are vectors:

$$\epsilon_{ijk}u_iv_j \equiv \sum_{k=1}^3 \left( \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \epsilon_{ijk}u_iv_j \right) \mathbf{e}_k = \mathbf{u} \times \mathbf{v}, \quad (1.130)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathbf{e}_i = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = \nabla f, \quad (1.131)$$

$$\tau_{ij}v_j \equiv \sum_{i=1}^3 \left( \sum_{j=1}^3 \tau_{ij}v_j \right) \mathbf{e}_i = \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{v} \quad (1.132)$$

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} \left( \sum_i u_i \mathbf{e}_i \right) = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} \quad (1.133)$$

$$\frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} = \sum_i \left( \sum_j \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i = \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (1.134)$$

$$u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = \sum_i \left( \sum_j u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) \mathbf{e}_i = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (1.135)$$

Finally, the following quantities, having two free indices, are tensors:

$$u_iv_j \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 u_iv_j \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \mathbf{u} \mathbf{v}, \quad (1.136)$$

$$\sigma_{ik}\tau_{kj} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \left( \sum_{k=1}^3 \sigma_{ik}\tau_{kj} \right) \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\tau}, \quad (1.137)$$

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_i} \equiv \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j = \nabla \mathbf{u}. \quad (1.138)$$

Note that  $\nabla \mathbf{u}$  in the last equation is a dyadic tensor.<sup>5</sup>

It is easy to show that the continuity and momentum equations,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0 \quad (1.139)$$

and

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}, \quad (1.140)$$

in index notation become

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_i)}{\partial x_i} = 0 \quad (1.141)$$

and

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (1.142)$$

---

<sup>5</sup>Some authors use even simpler expressions for the nabla operator. For example,  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  is also represented as  $\partial_i u_i$  or  $u_{i,i}$ , with a comma to indicate the derivative, and the dyadic  $\nabla u$  is represented as  $\partial_i u_j$  or  $u_{i,j}$ .

## 1.6 Ολοκληρωτικά θεωρήματα

Στην παράγραφο αυτή, θα συζητήσουμε δύο θεμελιώδη θεωρήματα της διανυσματικής ανάλυσης: το **θεώρημα του Stokes** και το **θεώρημα της απόκλισης** (divergence theorem) ή **θεώρημα του Gauss**.

### 1.6.1 Το θεώρημα του Stokes

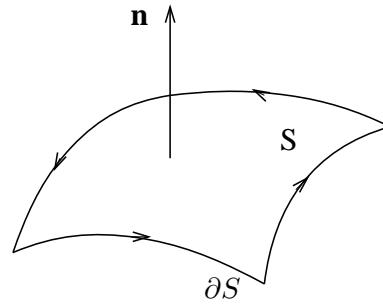
Θεωρούμε ότι ο αναγνώστης είναι εξοικειωμένος με την έννοια του **προσανατολισμού** μιας φραγμένης επιφάνειας  $S$  καθώς και του κλειστού συνόρου της  $\partial S$ . Μια τέτοια επιφάνεια φαίνεται στο Σχήμα 1.6. Έστω  $\mathbf{F}$  ένα διανυσματικό πεδίο. Υπενθυμίζουμε ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

καλείται **ροή του  $\mathbf{F}$  διαμέσου της επιφάνειας  $S$** , ενώ το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad \text{ή} \quad \oint_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$$

καλείται **κυκλοφορία του  $\mathbf{F}$  γύρω από την κλειστή καμπύλη  $\partial S$** . Το θεώρημα του Stokes μας λέει ότι η ροή **στροβιλισμού** ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  διά μέσου μιας επιφάνειας  $S$  ισούται με την **κυκλοφορία του  $\mathbf{F}$  γύρω από το σύνορο  $\partial S$  της  $S$** .



Σχήμα 1.6: Προσανατολισμένη φραγμένη επιφάνεια με προσανατολισμένο σύνορο.

#### Θεώρημα 1.6.1 Θεώρημα Stokes (Stokes theorem)

Έστω  $S$  μια προσανατολισμένη επιφάνεια και  $\partial S$  το επίσης προσανατολισμένο της σύνορο. Αν το  $\mathbf{F}$  είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο, τότε

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \quad (1.143)$$

#### Παρατήρηση

Επειδή  $d\mathbf{S} = \mathbf{n} dS$ , όπου  $\mathbf{n}$  το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια  $S$  (βλ. Σχήμα 1.6) και  $d\mathbf{r} = \mathbf{t} ds$ , όπου  $\mathbf{t}$  το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα στην καμπύλη  $\partial S$  και  $ds$  το στοιχειώδες μήκος τόξου, η (1.143) γράφεται επίσης ως εξής:

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds \quad (1.144)$$

Η σχέση (1.144) μας λέει ότι το ολοκλήρωμα της κάθετης συνιστώσας του **στροβιλισμού** ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  πάνω σε μια επιφάνεια  $S$  ισούται με το ολοκλήρωμα της **εφαπτομενικής συνιστώσας του  $\mathbf{F}$  πάνω στο (προσανατολισμένο) σύνορο  $\partial S$  της  $S$** .

#### Παράδειγμα 1.6.1

Θα δείξουμε με δύο τρόπους ότι το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} = ye^z \mathbf{i} + xe^z \mathbf{j} + xye^z \mathbf{k}$  είναι **συντηρητικό** (conservative).

**1ος τρόπος**

Αρκεί να δείξουμε ότι η κυκλοφορία του  $\mathbf{F}$  γύρω από οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη  $C$  είναι μηδέν:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

Έστω λοιπόν μια τυχούσα κλειστή καμπύλη  $C$  και  $S$  μια επιφάνεια που έχει σαν σύνορο τη  $C$ , δηλ.  $\partial S = C$ . Σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes (με την προϋπόθεση ότι οι  $C$  και  $S$  είναι προσανατολισμένες) έχουμε:

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

Όμως

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = (xe^z - xe^z)\mathbf{i} - (ye^z - ye^z)\mathbf{j} + (e^z - e^z)\mathbf{k} = \mathbf{0}.$$

Συνεπώς:

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0.$$

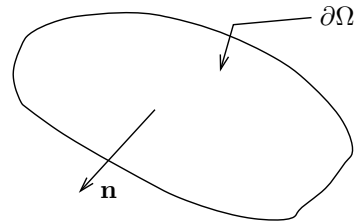
Άρα το πεδίο  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό.

### 2ος τρόπος

Θα δείξουμε ότι το  $\mathbf{F}$  είναι πεδίο κλίσεων, δηλ. ότι υπάρχει βαθμωτό πεδίο  $\phi(x, y, z)$  τέτοιο ώστε  $\mathbf{F} = \nabla\phi$ . Παρατηρούμε ότι ένα τέτοιο πεδίο είναι το  $\phi = xye^z$ . Άρα το  $\mathbf{F}$  είναι συντηρητικό.  $\square$

### 1.6.2 Το θεώρημα της απόκλισης

Έστω  $\Omega$  ένα τρισδιάστατο φραγμένο χωρίο και  $\partial\Omega$  η κλειστή επιφάνεια που το φράσσει. Ως γνωστό, επιφάνειες αυτής της μορφής προσανατολίζονται έτσι ώστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να δείχνει προς τα έξω, όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.



Προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια.

Το θεώρημα της απόκλισης μας λέει ότι το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης ενός διανυσματικού πεδίου  $\mathbf{F}$  σ'ένα τρισδιάστατο φραγμένο χωρίο  $\Omega$  είναι ίσο με τη ροή του  $\mathbf{F}$  διά μέσου της επιφάνειας  $\partial\Omega$  του  $\Omega$ .

#### Θεώρημα 1.6.2 Θεώρημα της απόκλισης ή θεώρημα του Gauss

Έστω  $\Omega$  ένα τρισδιάστατο φραγμένο χωρίο και  $\partial\Omega$  η προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια που φράσσει το  $\Omega$ . Αν  $\mathbf{F}$  είναι ένα λείο διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο  $\Omega$ , τότε

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad (1.145)$$

Επειδή  $d\mathbf{S} = \mathbf{n}dS$ , η (1.145) παίρνει επίσης τη μορφή

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.146)$$

Το θεώρημα της απόκλισης επεκτείνεται και σε τανυστικά πεδία.

**Θεώρημα 1.6.3 Θεώρημα της απόκλισης για τανυστές**

Έστω  $\Omega$  ένα τρισδιάστατο φραγμένο χωρίο και  $\partial\Omega$  η προσανατολισμένη κλειστή επιφάνεια που φράσσει το  $\Omega$ . Αν  $\boldsymbol{\tau}$  είναι ένα λείο τανυστικό πεδίο ορισμένο στο  $\Omega$ , τότε

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} dV = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.147)$$

**Παράδειγμα 1.6.2**

Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα  $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$  όπου  $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$  και  $S$  η επιφάνεια της μοναδιαίας σφαίρας που ορίζεται από την  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

Από το θεώρημα του Gauss έχουμε

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

όπου  $\Omega$  η μοναδιαία σφαίρα. Ο απευθείας υπολογισμός του επιφανειακού ολοκληρώματος είναι άβολος. Προτιμούμε λοιπόν να υπολογίσουμε το χωρικό ολοκλήρωμα.

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_{\Omega} 2(1 + y + z) dV = 2 \int_{\Omega} dV + 2 \int_{\Omega} y dV + 2 \int_{\Omega} z dV.$$

Λόγω συμμετρίας, τα δύο τελευταία ολοκληρώματα μηδενίζονται. Συνεπώς

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = 2 \int_{\Omega} dV = 2V = \frac{8\pi}{3},$$

αφού η μοναδιαία σφαίρα έχει όγκο  $4\pi/3$ . □

**Παράδειγμα 1.6.3**

Έστω  $\mathbf{F}$  και  $\mathbf{G}$  διανυσματικά πεδία κλάσης  $C^1$  στο τρισδιάστατο χωρίο  $\Omega$  που φράσσεται από την απλή κλειστή επιφάνεια  $\partial\Omega$ . Θεωρούμε ότι σε κάθε σημείο της  $\partial\Omega$  το διανυσματικό πεδίο  $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$  είναι εφαπτόμενο της  $\partial\Omega$ . Θα δείξουμε ότι

$$\int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} dV = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} dV \quad (1.148)$$

**Απόδειξη**

Από τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} \quad (1.149)$$

έχουμε:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) dV = \int_{\Omega} [\mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}] dV$$

Από το θεώρημα του Gauss παίρνουμε:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} dS$$

Το πεδίο  $\mathbf{F} \times \mathbf{G}$  εφαπτεται της  $\partial\Omega$ , άρα αυτό είναι κάθετο στο  $\mathbf{n}$ :

$$(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) \cdot \mathbf{n} = 0.$$

Παρατηρούμε ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα μηδενίζεται και έτσι

$$0 = \int_{\Omega} \nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) dV = \int_{\Omega} [\mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G}] dV \implies$$

$$\int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot \nabla \times \mathbf{G} dV = \int_{\Omega} \mathbf{G} \cdot \nabla \times \mathbf{F} dV .$$

□

#### Παράδειγμα 1.6.4. Η εξίσωση συνέχειας

Θεωρούμε ένα τρισδιάστατο σταθερό και φραγμένο όγκο ρευστού  $\Omega$  σ'ένα πεδίο ροής. Ο ρυθμός ροής μάζας ρευστού διαμέσου της  $\partial\Omega$  είναι

$$\frac{dm}{dt} = \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS$$

όπου  $m$  η μάζα,  $\rho$  η πυκνότητα και  $\mathbf{u}$  το διάνυσμα της ταχύτητας. Από το θεώρημα της απόκλισης έχουμε:

$$\frac{dm}{dt} = \int_{\partial\Omega} \rho \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} dV . \quad (1.150)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ιδιαίτερα χρήσιμο στην απόδειξη της εξίσωσης συνέχειας. Μπορούμε πάντως να παρατηρήσουμε ότι αν το ρευστό είναι ασυμπίεστο και το χωρίο  $\Omega$  σταθερό (δηλαδή μη κινούμενο), η μάζα που περιχλείεται στο  $\Omega$  είναι σταθερή. Άρα

$$\frac{dm}{dt} = 0 \implies \int_{\Omega} \nabla \cdot \rho \mathbf{u} dV = 0 \implies \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{u} dV = 0$$

(αφού η  $\rho$  είναι σταθερή). Επειδή το χωρίο  $\Omega$  είναι αυθαίρετο, συμπεραίνουμε ότι

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 . \quad (1.151)$$

Αποδείξαμε έτσι την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή. □

#### Ο τύπος του Ostrogradsky

Ο τύπος του Ostrogradsky είναι στην ουσία το θεώρημα της απόκλισης διατυπωμένο σε καρτεσιανές συντεταγμένες. Τον μνημονεύουμε εδώ διότι είναι χρήσιμος σε αρκετές εφαρμογές. Για την απόδειξη του τύπου θα χρησιμοποιήσουμε τις εξής σχέσεις για τη στοιχειώδη επιφάνεια  $dS$  και τον στοιχειώδη όγκο  $dV$ :

$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{i} dS = dydz , \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{j} dS = dx dz , \quad \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} dS = dx dy$$

και

$$dV = dx dy dz .$$

Αν  $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ , τότε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} .$$

Απομένει να μετασχηματίσουμε τον όρο  $\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$  που εμφανίζεται στο επιφανειακό ολοκλήρωμα του θεωρήματος της απόκλισης:

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = F_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + F_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + F_3 \mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \implies$$

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = F_1 dydz + F_2 dx dz + F_3 dx dy .$$

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω σχέσεις στην (1.146), παίρνουμε τον **τύπο του Ostrogradsky**:

$$\int_{\Omega} \left( \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dx dy dz = \int_{\partial\Omega} (F_1 dydz + F_2 dx dz + F_3 dx dy) \quad (1.152)$$

**Παράδειγμα 1.6.5**

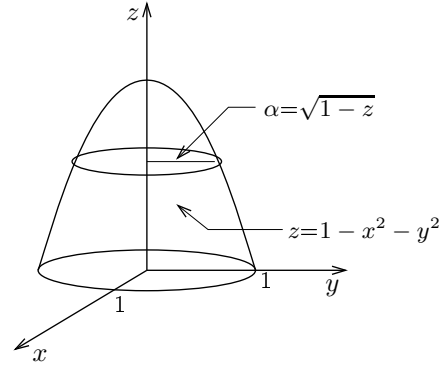
Θα υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_S x \, dydz + y \, dx dz + 2z \, dx dy$$

όπου  $S$  η κλειστή επιφάνεια που ορίζεται από το παραβόλοειδές

$$x^2 + y^2 + z = 1, \quad 0 < z < 1$$

και το επίπεδο  $z=0$  (βλ. διπλανό σχήμα).



$H \in \text{πιφ. } \acute{\alpha}\text{εια } S.$

Με τον τύπο του Ostrogradsky, έχουμε για το ολοκλήρωμα  $I$ :

$$I = \int_V (1 + 1 + 2) \, dx dy dz = 4 \int_V \, dx dy dz.$$

Παρατηρούμε ότι

$$I = 4 \int_0^1 dz \iint \, dx dy = 4 \int_0^1 \pi \alpha^2 \, dz = 4\pi \int_0^1 (1-z) \, dz = 4\pi \left[ z - \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 2\pi$$

□

**Παράδειγμα 1.6.6**

Θα υπολογίσουμε το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$I = \int_S x^2 \, dydz + y^2 \, dx dz + z^2 \, dx dy$$

πάνω στην εξωτερική όψη της σφαίρας  $x^2 + y^2 + z^2 = \alpha^2$ . Από τον τύπο του Ostrogradsky, έχουμε:

$$I = \int_V (2x + 2y + 2z) \, dx dy dz$$

όπου  $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq \alpha^2\}$ . Αν και μπορούμε να δούμε αμέσως ότι το  $I$  είναι μηδέν λόγω συμμετρίας, θα το υπολογίσουμε σαν άσκηση στην αλλαγή συντεταγμένων. Θα εργαστούμε λοιπόν σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ . Γνωρίζουμε ότι

$$x = r \sin \theta \cos \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad \text{και} \quad z = r \cos \theta$$

όπου

$$0 \leq r \leq \alpha, \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi \quad \text{και} \quad 0 \leq \theta \leq \pi$$

Για το στοιχειώδη όγκο  $dV$  έχουμε

$$dV = dx dy dz = \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \phi)} \right| dr d\theta d\phi = r^2 \sin \theta \, dr d\theta d\phi.$$



Συνεπώς το τριπλό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\alpha \int_0^\pi \int_0^{2\pi} 2r(\sin \theta \cos \phi + \sin \theta \sin \phi + \cos \theta) r^2 \sin \theta dr d\theta d\phi \\
 &= 2 \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi (\sin^2 \theta \cos \phi + \sin^2 \theta \sin \phi + \sin \theta \cos \theta) d\theta \int_0^\alpha r^3 dr \\
 &= \frac{\alpha^4}{2} \int_0^{2\pi} d\phi \left[ \left( \frac{1}{2}\theta - \frac{1}{4} \sin 2\theta \right) (\sin \phi + \cos \phi) + \frac{\sin^2 \theta}{2} \right]_0^\pi \\
 &= \frac{\alpha^4}{2} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{\pi}{2} (\sin \phi + \cos \phi) + 0 \right] d\phi = \frac{\pi \alpha^4}{4} [-\cos \phi + \sin \phi]_0^{2\pi} = \frac{\pi \alpha^4}{4} (-1 + 1 + 0) = 0
 \end{aligned}$$

□

### Οι ταυτότητες του Green

Έχουμε ήδη δει ότι το θεώρημα της απόκλισης είναι πολύ χρήσιμο στη μετατροπή τριπλών ολοκληρωμάτων σε επιφανειακά όταν τα δεύτερα αποδεικνύονται ευκολότερα και αντίστροφα. Όμως η χρησιμότητα του δεν περιορίζεται μόνο σ' αυτό το γεγονός, αφού με αυτό μπορούμε να μελετήσουμε τη φυσική σημασία της λαπλασιανής και αρκετές μερικές διαφορικές εξισώσεις. Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε τις ταυτότητες του Green.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα  $C^2$  βαθμωτό πεδίο  $\phi(x, y, z)$  καλείται **αρμονικό** (harmonic) αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace, δηλ. αν  $\nabla^2 \phi = 0$ . Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση:

$$\mathbf{F} = \phi \nabla \psi \quad (1.153)$$

όπου  $\phi$  και  $\psi$  βαθμωτά πεδία. Από τη διανυσματική ταυτότητα

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) = f\nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f$$

θέτοντας  $f = \phi$  και  $\mathbf{F} = \nabla \psi$  βρίσκουμε για την απόκλιση του  $\mathbf{F}$ :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi \quad (1.154)$$

Ολοκληρώνοντας την (1.154) πάνω στο φραγμένο τρισδιάστατο χωρίο  $V$  έχουμε:

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \int_V [\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi] dV. \quad (1.155)$$

Από το θεώρημα της απόκλισης ισχύει:

$$\int_V \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) dV = \int_S \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.156)$$

όπου  $S$  η επιφάνεια που φράσσει το  $V$ . Συνδυάζοντας τις (1.155) και (1.156) παίρνουμε την **πρώτη ταυτότητα του Green**:

$$\boxed{\int_V (\nabla \phi \cdot \nabla \psi + \phi \nabla^2 \psi) dV = \int_S \phi \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS.} \quad (1.157)$$

Εναλλάσσοντας τα  $\phi$  και  $\psi$  στην πιο πάνω σχέση, παίρνουμε:

$$\int_V (\nabla \psi \cdot \nabla \phi + \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_S \psi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.158)$$

Αφαιρώντας την (1.158) από την (1.157), παίρνουμε τη **δεύτερη ταυτότητα του Green** η οποία είναι επίσης γνωστή ως **συμμετρικό θεώρημα** (symmetrical theorem):

$$\int_V (\phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi) dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.159)$$

Στην πιο πάνω απόδειξη υποθέσαμε ότι τα  $\phi$  και  $\psi$  έχουν συνεχείς δεύτερες παραγώγους. Τα  $V$  και  $S$  ικανοποιούν τις συνθήκες του θεωρήματος της απόκλισης. Σημειώνουμε επίσης ότι η (1.159) μπορεί ν'αποδειχθεί αν θέσουμε

$$\mathbf{F} = \phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi \quad (1.160)$$

και εργαστούμε όπως στο πρώτο μέρος (άσκηση).

### Παράδειγμα 1.6.7

Αν η συνάρτηση  $\psi$  είναι λύση της εξίσωσης Laplace σε κάποιο χωρίο  $V$  που φράσσεται από την επιφάνεια  $S$ , τότε:

$$\int_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0 \quad (1.161)$$

### Απόδειξη

Θέτοντας  $\phi = 1$  στην πρώτη ταυτότητα Green παίρνουμε

$$\int_V (\mathbf{0} \cdot \nabla \psi + 1 \nabla^2 \psi) dV = \int_S 1 \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS$$

ή

$$\int_V \nabla^2 \psi dV = \int_S \nabla \psi \cdot \mathbf{n} dS$$

Όμως  $\nabla^2 \psi = 0$  και  $\nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \partial \psi / \partial n$ , οπότε

$$\int_S \frac{\partial \psi}{\partial n} dS = 0.$$

□

### Παράδειγμα 1.6.8

Αν οι  $\phi$  και  $\psi$  είναι αρμονικές, το χωρικό ολοκλήρωμα της δεύτερης ταυτότητας του Green είναι μηδέν, οπότε

$$\int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \mathbf{n} dS = 0$$

Επειδή  $\nabla \psi \cdot \mathbf{n} = \partial \psi / \partial n$  και  $\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = \partial \phi / \partial n$ , έχουμε τελικά:

$$\int_S \left( \phi \frac{\partial \psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial \phi}{\partial n} \right) dS = 0.$$

□

### Παρατήρηση

Το θεώρημα της απόκλισης,

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS \quad (1.162)$$

μετασχηματίζει ένα χωρικό ολοκλήρωμα μιας διαφορισμένης ποσότητας σ'ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα στο οποίο ο διαφορικός τελεστής του έχει απαλειφθεί. Το θεώρημα του Stokes,

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} dS = \int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{t} ds \quad (1.163)$$

μετασχηματίζει ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα σε επικαμπύλιο απαλείφοντας ξανά το διαφορικό τελεστή. Από το διανυσματικό λογισμό γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\int_C \nabla \phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(P_2) - \phi(P_1) \quad (1.164)$$

όπου  $\phi$  ένα βαθμωτό πεδίο και  $C$  μια προσανατολισμένη καμπύλη με άκρα τα  $P_1$  και  $P_2$ . Αν συμφωνήσουμε ότι τα απομονωμένα σημεία  $P_1$  και  $P_2$  είναι μηδενοδιάστατα, τότε η εξίσωση (1.164) ακολουθεί το μοτίβο των προηγούμενων θεωρημάτων. Έχουμε δηλαδή αναγωγή κατά ένα της διάστασης του ολοκληρώματος και απαλοιφή του διαφορικού τελεστή. Στην πραγματικότητα, όλα αυτά τα θεωρήματα μπορούν να θεωρηθούν σαν ανάλογα σε περισσότερες διαστάσεις του θεμελιώδους θεωρήματος του Διαφορικού Λογισμού:

$$\int_{x_1}^{x_2} \frac{df}{dx} dx = f(x_2) - f(x_1). \quad (1.165)$$

## 1.7 Το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds

Το **Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds** (Reynolds transport theorem) είναι ένα ιδιαίτερα χρήσιμο θεώρημα για την απόδειξη των **νόμων διατήρησης** (conservation laws), όπως για παράδειγμα οι εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής. Το θεώρημα αυτό μπορεί να θεωρηθεί ως η επέκταση του **ολοκληρωτικού κανόν α του Leibniz** (Leibniz integral rule) από τη μια χωρική διάσταση στον τρισδιάστατο χώρο. Θα ξεκινήσουμε πρώτα από τον κανόνα του Leibniz τον οποίο δίνουμε χωρίς απόδειξη.

### Θεώρημα 1.7.1 Κανόνας του Leibniz (Leibniz integral rule)

Αν η  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση και οι  $a, b : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  είναι επίσης συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx + f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt}. \quad (1.151)$$

### Παρατηρήσεις

1. Γράψαμε  $f : \mathbf{R} \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  και όχι  $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}$  για να διαχωρίσουμε την χωρική μεταβλητή από τον χρόνο.
2. Αν τα άκρα  $a$  και  $b$  του διαστήματος ολοκλήρωσης είναι σταθερά τότε ο τύπος (1.151) απλοποιείται στον πιο κάτω:

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx.$$

Ο πιο πάνω τύπος μας λέει ότι η σειρά παραγωγίσιμης και ολοκλήρωσης μπορεί να αντιστραφεί όταν το διάστημα ολοκλήρωσης είναι σταθερό.

3. Αν η  $f$  δεν είναι συνάρτηση του χρόνου,  $f=f(x)$ , παίρνουμε την πιο κάτω ειδική μορφή του κανόνα του Leibniz:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx = f(b(t)) \frac{db}{dt} - f(a(t)) \frac{da}{dt}. \quad (1.152)$$

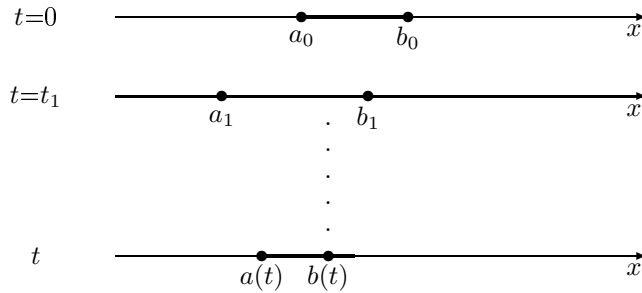
Η απόδειξη της (1.152) είναι γνωστή από τον Ολοκληρωτικό Λογισμό. Αν  $F$  είναι η παράγουσα της  $f$ , αν δηλαδή  $F'(x)=f(x)$  τότε

$$\int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx = [F(x)]_{a(t)}^{b(t)} = F(b(t)) - F(a(t)) \quad \implies$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx = \frac{d}{dt} [F(b(t)) - F(a(t))] = F'(b(t)) \frac{db}{dt} - F'(a(t)) \frac{da}{dt} \quad \implies$$

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x) dx = f(b(t)) \frac{db}{dt} - f(a(t)) \frac{da}{dt}.$$

4. Στη γενική περίπτωση, το διάστημα ολοκλήρωσης  $I(t)=[a(t), b(t)]$  είναι κινητό με μεταβλητό μήκος όπως φαίνεται παραστατικά στο πιο κάτω σχήμα.



Είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι τα εσωτερικά σημεία του  $I(t)$  είναι και αυτά συναρτήσεις του χρόνου και να ορίσουμε μια κατάλληλη συνάρτηση  $u(x(t))$  για την ταχύτητα κάθε σημείου του  $I(t)$ . Παρατηρούμε τότε ότι

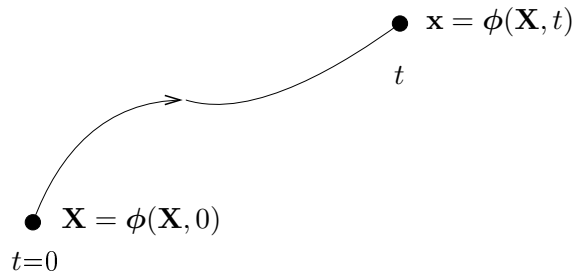
$$f(b(t), t) \frac{db}{dt} - f(a(t), t) \frac{da}{dt} = [f(x(t), t) u(x(t))]_{a(t)}^{b(t)} = \int_{a(t)}^{b(t)} \frac{\partial}{\partial x} [f(x(t), t) u(x(t))] dx .$$

Άρα μπορούμε να γράψουμε τον κανόνα του Leibniz στη μορφή:

$$\frac{d}{dt} \int_{a(t)}^{b(t)} f(x, t) dx = \int_{a(t)}^{b(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x} (fu) \right] dx . \tag{1.153}$$

Όπως θα δούμε πιο κάτω, η τελευταία αυτή μορφή είναι το μονοδιάστατο ανάλογο του Θεωρήματος μεταφοράς του Reynolds.

**Περιγραφές ροής κατά Lagrange και κατά Euler**



Σχήμα 1.9: Συντεταγμένες Lagrange  $\mathbf{X}, t$  και τροχιά ενός σωματιδίου.

Η κίνηση ενός ρευστού περιγράφεται θεωρώντας ότι κάθε σωματίδιο ρευστού καταλαμβάνει ένα σημείο στον χώρο. Στη λεγόμενη **θεώρηση Lagrange** (Lagrange approach) παρακολουθούμε τη ροή ακολουθώντας τις τροχιές των σωματιδίων του ρευστού (βλ. Σχήμα 1.9). Ένα σωματίδιο που βρίσκεται αρχικά στη θέση  $\mathbf{X}=(X_1, X_2, X_3)$  μετά από χρόνο  $t$  θα βρίσκεται στη θέση  $\mathbf{x}=(x_1, x_2, x_3)$ . Η τροχιά του σωματιδίου μπορεί να περιγραφεί από μια εξίσωση της μορφής:

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t) . \tag{1.154}$$

Η πιο πάνω εξίσωση μας δίνει λοιπόν για κάθε χρονική στιγμή  $t$  τη θέση του σωματιδίου με θέση αναφοράς  $\mathbf{X}$ . Τα  $\mathbf{X}, t$  καλούνται **συντεταγμένες Lagrange** (Lagrangian coordinates) ή ακόμα **μεταφερόμενες** ή **υλικές συντεταγμένες** (convected or material derivatives).

Συνήθως όμως δεν ενδιαφερόμαστε για την κίνηση κάθε ξεχωριστού σωματιδίου ρευστού αλλά για την κατάσταση της ροής και τη μεταβολή της με το χρόνο. Στη λεγόμενη **θεώρηση Euler** (Euler approach) εργαζόμαστε με τις **συντεταγμένες Euler** (Eulerian coordinates):  $\mathbf{x}$  και  $t$ . Έτσι η ταχύτητα  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  είναι η ταχύτητα του σωματιδίου ρευστού που περνά από το σημείο  $\mathbf{x}$  τη χρονική στιγμή  $t$ . Μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t),$$

όπου  $\mathbf{x}=\phi(\mathbf{X}, t)$ .

Η εξίσωση (1.154) ορίζει ένα μετασχηματισμό από τις συντεταγμένες Lagrange στις συντεταγμένες Euler. Η **Ιακωβιανή** (Jacobian) του μετασχηματισμού είναι η

$$J = \frac{\partial(x_1, x_2, x_3)}{\partial(X_1, X_2, X_3)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial X_1} & \frac{\partial x_1}{\partial X_2} & \frac{\partial x_1}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial X_1} & \frac{\partial x_2}{\partial X_2} & \frac{\partial x_2}{\partial X_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial X_1} & \frac{\partial x_3}{\partial X_2} & \frac{\partial x_3}{\partial X_3} \end{vmatrix} \quad (1.155)$$

(Θεωρούμε ότι η διανυσματική συνάρτηση  $\phi$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμη.)

Θεωρούμε στην εξίσωση (1.154) ότι η κίνηση του σωματιδίου είναι συνεχής και μονοσήμαντη (single-valued) και ότι η απεικόνιση  $\phi$  είναι αντιστρέψιμη έτσι ώστε

$$\mathbf{X} = \phi^{-1}(\mathbf{x}, t).$$

Η πιο πάνω σχέση δίνει την αρχική θέση (δηλ. τις συντεταγμένες Lagrange) του σωματιδίου που είναι στη θέση  $\mathbf{x}$  κατά τη χρονική στιγμή  $t$ . Η  $\phi^{-1}$  είναι επίσης συνεχής και μονοσήμαντη. Από φυσικής άποψης, αυτό σημαίνει ότι ένα συνεχές τόξο σωματιδίων παραμένει συνεχές κατά τη ροή ή ακόμα ότι τα σωματίδια που βρίσκονται στη γειτονιά ενός δοσμένου σωματιδίου παραμένουν στη γειτονιά του κατά τη ροή. Το μονοσήμαντο της συνάρτησης  $\phi$  σημαίνει ότι ένα σωματίδιο δεν μπορεί να διασπαστεί και να καταλάβει δύο θέσεις, ενώ το μονοσήμαντο της  $\phi^{-1}$  εξασφαλίζει ότι δύο ξεχωριστά σωματίδια δεν καταλαμβάνουν ποτέ την ίδια θέση. Αναγκαία και ικανή συνθήκη για την αντιστρεψιμότητα της  $\phi$  είναι να μη μηδενίζεται η Ιακωβιανή  $J$  του μετασχηματισμού συντεταγμένων.

Ας θεωρήσουμε τώρα ένα φυσικό μέγεθος  $f$  (π.χ. την πυκνότητα ή τη θερμοκρασία) που μεταφέρεται από τα κινούμενα σωματίδια του ρευστού. Στη θεώρηση Lagrange το μέγεθος αυτό παρατηρείται σαν  $f(\mathbf{X}, t)$ . Αυτή η έκφραση περιγράφει την τιμή της  $f$  που συνδέεται στο ξεχωριστό σωματίδιο ρευστού που αντιστοιχεί στα  $\mathbf{X}$  και  $t$ .

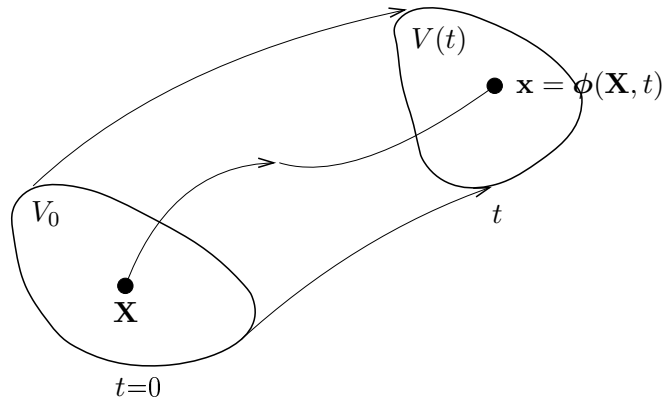
Από την άλλη, στη θεώρηση Euler το μέγεθος  $f$  παριστάνεται με τη συνάρτηση  $f(\mathbf{x}, t)$ , η οποία δηλώνει την τιμή του μεγέθους στο σημείο  $\mathbf{x}$  στο χρόνο  $t$ . Εφόσον η τροχιά ενός σωματιδίου ρευστού περιγράφεται από την εξίσωση (1.154), μπορούμε να εκφράσουμε τον ρυθμό μεταβολής του μεγέθους  $f(\mathbf{x}, t)$  ως εξής:

$$\begin{aligned} \frac{df(\mathbf{x}, t)}{dt} &= \frac{df(\phi(\mathbf{X}, t), t)}{dt} \\ &= \frac{\partial f(\phi(\mathbf{X}, t), t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(\phi(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial \phi_x(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \\ &\quad + \frac{\partial f}{\partial y}(\phi(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial \phi_y(\mathbf{X}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial z}(\phi(\mathbf{X}, t), t) \frac{\partial \phi_z(\mathbf{X}, t)}{\partial t} \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x}, t) u_x(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x}, t) u_y(\mathbf{x}, t) + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x}, t) u_z(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t) \end{aligned}$$

Ο ρυθμός μεταβολής του μεγέθους  $f$  δεν είναι άλλος από την υλική παράγωγο που ορίσαμε στα προηγούμενα:

$$\frac{Df(\mathbf{x}, t)}{Dt} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, t)}{\partial t} + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \cdot \nabla f(\mathbf{x}, t).$$

Η τοπική παράγωγος  $\partial f/\partial t$  προκύπτει από την εξάρτηση του  $f$  από τον χρόνο, ενώ η  $\mathbf{u} \cdot \nabla f$  είναι η λεγόμενη μεταφερόμενη παράγωγος (convective derivative) που είναι αποτέλεσμα της μεταφοράς της ποσότητας  $f$  από το κινούμενο ρευστό. Με αυτή την έννοια η υλική παράγωγος αναφέρεται μερικές φορές σαν η παράγωγος κατά μήκος της τροχιάς ενός σωματιδίου.



Σχήμα 1.10: Υλικός όγκος ελέγχου.

### Υλικός όγκος ελέγχου

Η έννοια του υλικού όγκου ελέγχου (material control volume) είναι σημαντική στην απόδειξη των νόμων διατήρησης στη Ρευστοδυναμική. Θεωρούμε τη ροή ρευστού στον χώρο και ένα νοητό, συνεκτικό και φραγμένο τρισδιάστατο χωρίο  $V_0$  το οποίο σε χρόνο  $t=0$  περικλείει ένα δεδομένο σύνολο σωματιδίων. Τα σωματίδια αυτά κινούνται μαζί με τη ροή και έτσι το χωρίο  $V(t)$  που καταλαμβάνουν σε κάθε χρονική στιγμή κινείται και παραμορφώνεται όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.10. Το χωρίο  $V(t)$  που κινείται μαζί με τη ροή και περιέχει τα ίδια σωματίδια ρευστού σε κάθε χρονική στιγμή καλείται υλικός όγκος ελέγχου. Έτσι, αν ένα σωματίδιο βρίσκεται στον αρχικό όγκο ελέγχου  $V_0$  αυτό θα βρίσκεται και στον  $V(t)$ . Είναι φανερό ότι η μάζα που περιέχεται στον όγκο ελέγχου είναι σταθερή, αφού εξ ορισμού κανένα σωματίδιο δεν φεύγει από τον υλικό όγκο ελέγχου ούτε εισέρχεται σ'αυτόν. Με διαφορετικά λόγια μπορούμε να πούμε ότι ο ρυθμός ροής μάζας διά μέσου της επιφάνειας του υλικού όγκου ελέγχου είναι εξ ορισμού μηδέν:

$$\int_{\partial V(t)} \rho \mathbf{u} dS = \mathbf{0}.$$

Αν  $V(t)$  είναι ένας υλικός όγκος ελέγχου που αντιστοιχεί στον αρχικό όγκο ελέγχου  $V_0$ , τότε μπορούμε να γράψουμε:

$$V(t) = \{ \mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in V_0 \}. \quad (1.156)$$

Ισχύει προφανώς  $V(0)=V_0$  αφού  $\mathbf{X}=\phi(\mathbf{X}, 0)$ . Σύμφωνα με το θεώρημα αλλαγής μεταβλητών του Δια-υσματικού Λογισμού για τον στοιχειώδη υλικό όγκο  $dV(t)$  ισχύει

$$dV(t) = J dV_0, \quad (1.157)$$

όπου  $J$  η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Αν θεωρήσουμε ένα στοιχειώδες παραλληλεπίπεδο γύρω από ένα δοσμένο σημείο  $\mathbf{X}$  στον αρχικό χρόνο  $t=0$ , τότε αυτό κινείται και παραμορφώνεται λόγω της ροής αλλά δεν μπορεί να διασπαστεί εφόσον η ροή είναι συνεχής. Στον χρόνο  $t$ , το παραμορφωμένο παραλληλεπίπεδο θα είναι η γειτονιά του σημείου  $\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$ . Από την πιο πάνω εξίσωση, ο όγκος του θα είναι  $dV=JdV_0$  και έτσι

$$J = \frac{dV}{dV_0}.$$

Η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού είναι λοιπόν ο λόγος του στοιχειώδους υλικού όγκου  $dV(t)$  προς τον αρχικό όγκο  $V_0$ . Γι'αυτό το λόγο η  $J$  καλείται επίσης **διαστολή** (dilation or dilatation or expansion). Για τον όγκο του  $V(t)$  ισχύει:

$$V(t) = \int_{V(t)} dV = \int_{V_0} J dV_0,$$

όπου καταχρηστικά χρησιμοποιούμε το σύμβολο  $V(t)$  τόσο για το χωρίο που αντιστοιχεί στον υλικό όγκο ελέγχου όσο και για τον όγκο του.

Πριν διατυπώσουμε το Θεώρημα Μεταφοράς δίνουμε πρώτα μια χρήσιμη πρόταση και επισημαίνουμε ότι **κάθε ρυθμός μεταβολής  $d \cdot / dt$  που αναφέρεται σε κάποιο υλικό όγκο ελέγχου ταυτίζεται με την υλική παράγωγο  $D \cdot / Dt$ . Από την άλλη κάθε ρυθμός μεταβολής  $d \cdot / dt$  που αναφέρεται σ'ένα σταθερό όγκο ελέγχου ταυτίζεται με τη μερική παράγωγο  $\partial \cdot / \partial t$ .**

#### Πρόταση 1.7.2

Αν  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  είναι το πεδίο ταχύτητας και  $J$  είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού των συντεταγμένων Euler στις συντεταγμένες Lagrange, τότε

$$\frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} J. \quad (1.158)$$

#### Απόδειξη

Αν  $S_3$  είναι το σύνολο των μεταθέσεων  $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$  των φυσικών  $\{1, 2, 3\}$ , μπορούμε να γράφουμε την Ιακωβιανή στη μορφή

$$J = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) \frac{\partial x_1}{\partial X_{\sigma_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{\sigma_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{\sigma_3}}.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{dJ}{dt} = \sum_{\sigma \in S_3} \text{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) & \left[ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_{\sigma_1}} \right) \frac{\partial x_2}{\partial X_{\sigma_2}} \frac{\partial x_3}{\partial X_{\sigma_3}} + \right. \\ & \left. \frac{\partial x_1}{\partial X_{\sigma_1}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_2}{\partial X_{\sigma_2}} \right) \frac{\partial x_3}{\partial X_{\sigma_3}} + \frac{\partial x_1}{\partial X_{\sigma_1}} \frac{\partial x_2}{\partial X_{\sigma_2}} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_3}{\partial X_{\sigma_3}} \right) \right]. \end{aligned}$$

Για την πρώτη χρονική παράγωγο στο δεξιό μέλος έχουμε:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial x_1}{\partial X_{\sigma_1}} \right) = \frac{\partial}{\partial X_{\sigma_1}} \left( \frac{dx_1}{dt} \right) = \frac{\partial u_1}{\partial X_{\sigma_1}} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial X_{\sigma_1}} + \frac{\partial u_1}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial X_{\sigma_1}} + \frac{\partial u_1}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial X_{\sigma_1}}$$

(χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα της αλυσίδας). Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται σαν άσκηση.  $\square$

Η (1.158) μπορεί να γραφεί επίσης στη μορφή

$$\frac{d(\ln J)}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}.$$

Παίρνουμε έτσι μια σημαντική φυσική ερμηνεία για την απόκλιση της ταχύτητας. Είναι ο σχετικός ρυθμός διαστολής κατά μήκος της τροχιάς ενός σωματιδίου ρευστού. Επειδή για ασυμπύεστη ροή ο ρυθμός αυτός είναι μηδενικός, ισχύει τότε  $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ .



**Θεώρημα 1.7.3 Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds (Reynolds Transport Theorem)****- Βαθμωτή μορφή**Αν οι  $f : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$  και  $\phi : \mathbf{R}^3 \times \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}^3$  είναι συνεχώς παραγωγίσιμες,

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \phi}{\partial t}(\mathbf{X}, t),$$

και ο  $V(t)$  είναι ένας υλικός όγκος ελέγχου,

$$V(t) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^3 \mid \mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t), \mathbf{X} \in V_0\}, \quad (1.159)$$

τότε

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right] dV \quad (1.160)$$

και

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \frac{\partial f}{\partial t} dV + \int_{S(t)} f\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (1.161)$$

όπου  $S(t) = \partial V(t)$  η επιφάνεια που φράσσει τον  $V(t)$  και  $\mathbf{n}$  το προς τα έξω κάθετο στην  $S(t)$  μοναδιαίο διάνυσμα.**Απόδειξη**

Με την αλλαγή συντεταγμένων

$$\mathbf{x} = \phi(\mathbf{X}, t)$$

το χωρικό ολοκλήρωμα γράφεται:

$$\int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} f(\phi(\mathbf{X}, t), t) J dV_0,$$

όπου  $V_0$  ο αρχικός όγκος ελέγχου και  $J$  η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού. Αφού το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος είναι πάνω στο σταθερό χωρίο  $V_0$ , παραγωγίζουμε εύκολα ως προς τον χρόνο και βρίσκουμε:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \frac{d}{dt} \int_{V_0} f(\phi(\mathbf{X}, t), t) J dV_0 = \int_{V_0} \left[ \frac{df}{dt} J + f \frac{dJ}{dt} \right] dV_0.$$

Αντικαθιστώντας την  $dJ/dt$  από την εξίσωση (1.158) παίρνουμε:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V_0} \left( \frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) J dV_0.$$

Επιστρέφουμε τώρα στον υλικό όγκο ελέγχου  $V(t)$ , δηλαδή στις συντεταγμένες Euler:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left( \frac{df}{dt} + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV.$$

Επειδή ο ρυθμός μεταβολής σ'ένα όγκο ελέγχου ταυτίζεται με την υλική παράγωγο,

$$\frac{df}{dt} = \frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f,$$

βρίσκουμε τελικά:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left( \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla f + f \nabla \cdot \mathbf{u} \right) dV \quad (1.162)$$

ή

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial f}{\partial t} + \nabla \cdot (f\mathbf{u}) \right] dV$$

Με εφαρμογή του θεωρήματος του Gauss,

$$\int_{V(t)} \nabla \cdot (f\mathbf{u}) dV = \int_{S(t)} f \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

προκύπτει αμέσως η (1.161). □

Το Θεώρημα Μεταφοράς συσχετίζει την ολική μεταβολή της ποσότητας  $f$  στον όγκο ελέγχου  $V(t)$  με την τοπική μεταβολή του  $f$  με τον χρόνο και τη μεταβολή του  $f$  λόγω του ρυθμού ροής του διανυσματικού πεδίου  $\rho\mathbf{u}$  διά μέσου της επιφάνειας  $S(t)$  του  $V(t)$ . Συγκρίνοντας την (1.151) με την (1.161) ή την (1.153) με την (1.160) βλέπουμε πράγματι ότι ο κανόνας του Leibniz είναι ειδική περίπτωση της βαθμωτής μορφής του Θεωρήματος Μεταφοράς. Παραθέτουμε τώρα τη **διανυσματική μορφή** του θεωρήματος.

#### Θεώρημα 1.7.4 Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds - Διανυσματική μορφή

Με τις προϋποθέσεις του Θ. 1.7.3, ισχύει

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(f\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(f\mathbf{u}) + (f\mathbf{u})\nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV. \quad (1.163)$$

#### Απόδειξη

Αν γράψουμε την ταχύτητα στη μορφή

$$\mathbf{u} = \sum_{i=1}^3 u_i \mathbf{e}_i$$

έχουμε

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV = \sum_{i=1}^3 \mathbf{e}_i \frac{d}{dt} \int_{V(t)} f u_i dV.$$

Η ολοκλήρωση της απόδειξης αφήνεται σαν άσκηση. □

Στα παραδείγματα που ακολουθούν δίνονται οι ρυθμοί μεταβολής σημαντικών μεγεθών σ'ένα υλικό όγκο ελέγχου με την υπενθύμιση ότι αυτοί ταυτίζονται με την υλική παράγωγο:

(α) ο ρυθμός μεταβολής του όγκου ελέγχου,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV.$$

Αυτός μηδενίζεται στην περίπτωση που το ρευστό είναι ασυμπίεστο (εφόσον η μάζα που περικλείεται στον όγκο ελέγχου είναι σταθερή).

(β) ο ρυθμός μεταβολής της μάζας που περικλείεται σ'ένα υλικό όγκο έλεγχου ο οποίος είναι εξ ορισμού ίσος με μηδέν:

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (1.164)$$

(γ) ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ορμής  $\mathbf{J}$  του ρευστού που περιέχεται σ'ένα υλικό όγκο ελέγχου  $V(t)$ , ο οποίος σύμφωνα με τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα είναι ίσος με τη συνισταμένη  $\mathbf{F}$  των δυνάμεων που ασκούνται πάνω στον  $V(t)$ :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho\mathbf{u} dV = \mathbf{F}. \quad (1.165)$$

Θα συναντήσουμε τους πιο πάνω ρυθμούς μεταβολής στη συνέχεια όταν θα αποδείξουμε τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας και της ορμής. Στον Πίνακα 1.8 συγκρίνουμε τους πιο πάνω ρυθμούς με τους

	Μεταφορά στερεού σώματος $V$ : όγκος στερεού $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$	Ροή ρευστού $V=V(t)$ : υλικός όγκος ελέγχου $\mathbf{u}=\mathbf{u}(x, y, z, t)$
Όγκος	$V = \int_V dV$	
Μάζα	$m = \int_V \rho dV$ . Αν $\rho = \text{const.}$ , τότε $m = \rho V$	
Ορμή	$\mathbf{J} = \int_V \rho \mathbf{u} dV = m \mathbf{u}$	$\mathbf{J} = \int_V \rho \mathbf{u} dV$
Ρυθμός μεταβολής όγκου	$\frac{dV}{dt} = 0$	$\frac{dV}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V dV$
Ρυθμός μεταβολής μάζας	$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV = 0$	
Ρυθμός μεταβολής ορμής	$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt}(m\mathbf{u}) = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} = m \mathbf{a}$	$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV$
Δεύτερος νόμος του Newton	$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = m \mathbf{a}$	$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV$

Πίνακας 1.8: Διάφορα μεγέθη και ρυθμοί μεταβολής που αφορούν στην μεταφορά στερεού σώματος (*rigid body translation*) και στη ροή ρευστού.

αντίστοιχους στην περίπτωση μεταφοράς στερεού σώματος (rigid body translation), όπου  $\mathbf{u}=\mathbf{u}(t)$  και οι διάφορες εκφράσεις απλοποιούνται σε γνωστούς τύπους της Φυσικής.

### Παράδειγμα 1.7.1

Θέτοντας  $f=1$  στη βαθμωτή μορφή του Θεωρήματος Μεταφοράς έχουμε:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} dV = \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{u} dV. \quad (1.166)$$

Η πιο πάνω σχέση μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου είναι ίσος με το ολοκλήρωμα της απόκλισης της ταχύτητας  $\mathbf{u}$  και μας δείχνει ξανά την φυσική ερμηνεία που δώσαμε για την απόκλιση διανυσματικού πεδίου. Αν μάλιστα η  $\nabla \cdot \mathbf{u}$  είναι σταθερή, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{1}{V(t)} \frac{dV(t)}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (1.167)$$

Στην περίπτωση που το ρευστό είναι ασυμπίεστο ( $\rho=\text{const.}$ ), από την διατήρηση της μάζας προκύπτει ότι

$$0 = \rho \frac{dV(t)}{dt} = \rho \int_{V(t)} \nabla \cdot \mathbf{u} dV$$

Επειδή η πιο πάνω σχέση ισχύει για κάθε υλικό όγκο ελέγχου, συμπεραίνουμε ότι

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0.$$

Αν θεωρήσουμε τώρα την εναλλακτική μορφή (1.161) του Θεωρήματος Μεταφοράς βρίσκουμε:

$$\frac{dV(t)}{dt} = \int_{S(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS.$$

Η σχέση αυτή μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής του όγκου είναι ίσος με τον ρυθμό ροής όγκου διά μέσου του συνόρου  $S(t)$  του όγκου ελέγχου. Στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής,  $dV(t)/dt=0$ , και έτσι

$$\int_{S(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0.$$

Η τελευταία αυτή σχέση μας λέει ότι σε περίπτωση ασυμπίεστης ροής ο ρυθμός ροής όγκου διά μέσου της  $S(t)$  είναι μηδέν, ή ακόμα ότι ο ρυθμός ροής μάζας διά μέσου της  $S(t)$  είναι μηδέν:

$$\rho \frac{dV(t)}{dt} = \rho \int_{S(t)} \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} dS = 0,$$

το οποίο φυσικά εξασφαλίζεται από τον ορισμό του υλικού όγκου ελέγχου.  $\square$

### Παράδειγμα 1.7.2

Θεωρώντας ότι ισχύει η εξίσωση συνέχειας,

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} = 0, \quad (1.168)$$

και η

$$\mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho. \quad (1.169)$$

(η απόδειξη της αφήνεται σαν άσκηση), θα δείξουμε ότι για το ρυθμό μεταβολής της ορμής ισχύει:

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV. \quad (1.170)$$

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε τη διανυσματική μορφή του Θεωρήματος Μεταφοράς θέτοντας  $f=\rho$ :

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) + (\rho \mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV.$$

Αντικαθιστώντας την (1.169) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{J}}{dt} &= \int_{V(t)} \left[ \rho \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV \\ &= \int_{V(t)} \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \mathbf{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} \right) \right] dV \\ &= \int_{V(t)} \left[ \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} + \mathbf{u} \left( \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right) \right] dV \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση συνέχειας παίρνουμε τελικά

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV .$$

□

## 1.8 Προβλήματα

1. Ποια μορφή παίρνει το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{u} = (x^2 + y^2) \mathbf{i} + xy \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

σε κυλινδρικές συντεταγμένες;

2. Δείξτε την πιο κάτω ταυτότητα για το τριπλό διανυσματικό γινόμενο:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

**Σημείωση:** Τα  $\mathbf{a}$ ,  $\mathbf{b}$  και  $\mathbf{c}$  είναι διανυσματικά πεδία.

3. Αν

$$\mathbf{u} = x(2y - 1) \mathbf{i} - y^2 \mathbf{j} + (z + 1) \mathbf{k}$$

είναι το διάνυσμα της ταχύτητας:

- (α) Βρείτε τον **στροβιλισμό**  $\boldsymbol{\omega}$ . Είναι η ροή **στροβιλή**;  
 (β) Είναι η ροή **ασυμπύεστη**;  
 (γ) Βρείτε τον **τανυστή κλίσεων της ταχύτητας**  $\nabla \mathbf{u}$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

4. Δείξτε ότι για κάθε διανυσματικό πεδίο ισχύει

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$$

(η απόκλιση κάθε στροβιλισμού είναι μηδέν).

**Σημείωση:** Θεωρούμε ότι ορίζονται όλες οι μερικές παράγωγοι που εμφανίζονται στην πιο πάνω έκφραση.

5. Αν  $\mathbf{r}$  είναι το **διάνυσμα θέσης** να βρεθεί η κλίση  $\nabla f$  όταν

(α)  $f = \log \|\mathbf{r}\|$

(β)  $f = \frac{1}{\|\mathbf{r}\|}$

6. Δείξτε ότι για τον **τελεστή κλίσης** ισχύουν τα εξής:

- (α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.171)$$

- (β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.172)$$

- (γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (1.173)$$

7. **Εξίσωση συνέχειας για ασυμπύεστη ροή.**

Η εξίσωση συνέχειας για ασυμπύεστη ροή είναι η

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (1.174)$$

όπου το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας  $\mathbf{u}$  είναι  $C^1$ . Δείξτε ότι η εξίσωση συνέχειας παίρνει τις πιο κάτω μορφές:

- (α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.175)$$

(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad (1.176)$$

(γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}(\sin \theta u_\theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0 \quad (1.177)$$

### 8. Κλίση πίεσης.

Δείξτε ότι η  $\nabla p$ , όπου  $p$  η πίεση, παίρνει τις ακόλουθες μορφές.

(α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial p}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{k} \quad (1.178)$$

(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial p}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (1.179)$$

(γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\nabla p = \frac{\partial p}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi \quad (1.180)$$

9. Η **ροϊκή συνάρτηση** (τεξτλατιστρεαμφυνστιον)  $\psi(x, y)$  σε διδιάστατη ροή σε καρτεσιανές συντεταγμένες ορίζεται από τις

$$u_x = \frac{\partial \psi}{\partial y} \quad \text{kai} \quad u_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Θεωρώντας ότι  $u_z=0$ , δείξτε ότι η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή ικανοποιείται αυτόματα.

10. Η **ροϊκή συνάρτηση**  $\psi(r, z)$  που ορίζεται από τις

$$u_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z} \quad \text{kai} \quad u_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

χρησιμοποιείται για την περιγραφή ροών με αξονική συμμετρία σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Ποια συνθήκη πρέπει να ισχύει για την συνιστώσα  $u_\theta$  της ταχύτητας για να ικανοποιείται αυτόματα η εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή;

11. Το **διανυσματικό πεδίο της επιτάχυνσης**.

Το διανυσματικό πεδίο της επιτάχυνσης ορίζεται ως εξής:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{u}}{dt} \quad (1.181)$$

όπου  $\mathbf{u}$  το διανυσματικό πεδίο της ταχύτητας

$$\mathbf{u} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \quad (1.182)$$

και

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (1.183)$$

το διάνυσμα θέσης.

Να δειχθούν τα εξής:

(α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\mathbf{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \quad (1.184)$$

(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\mathbf{a} = \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r + \left( r \frac{d^2\theta}{dt^2} + 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} \right) \mathbf{e}_\theta + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{e}_z \quad (1.185)$$

(γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\begin{aligned} \mathbf{a} = & \left[ \frac{d^2r}{dt^2} - r \left( \frac{d\theta}{dt} \right)^2 - r \sin^2 \theta \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_r \\ & + \left[ 2 \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} + r \frac{d^2\theta}{dt^2} - r \sin \theta \cos \theta \left( \frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \mathbf{e}_\theta \\ & + \left( 2 \sin \theta \frac{dr}{dt} \frac{d\phi}{dt} + 2r \cos \theta \frac{d\theta}{dt} \frac{d\phi}{dt} + r \sin \theta \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.186)$$

## 12. Ο τελεστής $\mathbf{u} \cdot \nabla$

Δείξτε ότι για τον τελεστή  $\mathbf{u} \cdot \nabla$  ισχύουν τα εξής:

(α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.187)$$

(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.188)$$

(γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\mathbf{u} \cdot \nabla = u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.189)$$

## 13. Το διανυσματικό πεδίο $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$

Δείξτε ότι για το διανυσματικό πεδίο  $(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u}$  ισχύουν τα εξής:

(α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = & \left( u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) \mathbf{i} \\ & + \left( u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ & + \left( u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.190)$$

(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = & \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) \mathbf{e}_r \\ & + \left( u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) \mathbf{e}_\theta \\ & + \left( u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.191)$$



(γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\begin{aligned} (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} &= \left( u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) \mathbf{e}_r \\ &+ \left( u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left( u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\phi}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.192)$$

#### 14. Τελεστής υλικής παραγώγου

Δείξτε ότι για τον τελεστή υλικής παραγώγου,

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla, \quad (1.193)$$

όπου  $\mathbf{u}$  το διανυσματικό πεδίο ταχύτητας ισχύουν τα εξής:

(α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_x \frac{\partial}{\partial x} + u_y \frac{\partial}{\partial y} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.194)$$

(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial}{\partial z} \quad (1.195)$$

(γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.196)$$

15. Αν  $\rho$  η πυκνότητα, να βρεθεί η υλική της παράγωγος

$$\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho \quad (1.197)$$

στα τρία συστήματα συντεταγμένων.

16. Αν  $\mathbf{u}$  η ταχύτητα, να βρεθεί η υλική της παράγωγος

$$\frac{D\mathbf{u}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \quad (1.198)$$

στα τρία συστήματα συντεταγμένων.

**Σημείωση:** Αποδεικνύεται ότι

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot (\nabla \mathbf{u}) \quad (1.199)$$

όπου  $\nabla \mathbf{u}$  ο τανυστής κλίσεων της ταχύτητας (πρόβλημα 19).

17. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής για ανιξώδη ροή παίρνει τη μορφή:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \rho \mathbf{g} \quad (1.200)$$

όπου  $\mathbf{g}$  το διάνυσμα επιτάχυνσης της βαρύτητας.

Γράψτε αναλυτικά τις συνιστώσες της (1.200) στα τρία συστήματα συντεταγμένων.

18. Βρείτε τις συνιστώσες του **τανυστή κλίσεων**  $\tau$  **αχύτητας**,  $\nabla \mathbf{u}$ , στα τρία συστήματα συντεταγμένων. Στη συνέχεια βρείτε τις συνιστώσες του **τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης**,

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1.201)$$

και του **τανυστή στροβιλισμού**,

$$\mathbf{\Omega} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} - (\nabla \mathbf{u})^T], \quad (1.202)$$

(στα τρία συστήματα συντεταγμένων).

19. Εργαζόμενοι σε καρτεσιανές συντεταγμένες δείξτε ότι

$$(\mathbf{u} \cdot \nabla) \mathbf{u} = \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (1.203)$$

20. Δείξτε ότι η απόκλιση του τανυστή τάσεων παίρνει τις πιο κάτω μορφές:

(α) Σε καρτεσιανές συντεταγμένες  $(x, y, z)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \left( \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right) \mathbf{i} \\ &+ \left( \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right) \mathbf{j} \\ &+ \left( \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right) \mathbf{k} \end{aligned} \quad (1.204)$$

(β) Σε κυλινδρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, z)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_r \\ &+ \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (1.205)$$

(γ) Σε σφαιρικές συντεταγμένες  $(r, \theta, \phi)$ :

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} &= \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] \mathbf{e}_r \\ &+ \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right] \mathbf{e}_\theta \\ &+ \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + \frac{2 \cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right] \mathbf{e}_\phi \end{aligned} \quad (1.206)$$

21. Η **εξίσωση διατήρησης της ορμής** για οποιαδήποτε ροή παίρνει τη μορφή:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (1.207)$$

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των προβλημάτων (17) και (20), βρείτε της συνιστώσες της (1.207) στα τρία συστήματα συντεταγμένων.

22. Αν τα  $\mathbf{a}$  και  $\mathbf{b}$  είναι διανύσματα, ο  $\boldsymbol{\tau}$  τανυστής και  $\mathbf{I}$  ο ταυτοτικός τανυστής ναδειχθούν οι εξής ταυτότητες:

(α)  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{a} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{a}$

- (β)  $\mathbf{I} : (\mathbf{ab}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$   
 (γ)  $\mathbf{I} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I}$   
 (δ)  $\mathbf{I} : \mathbf{I} = 3$   
 (ε)  $\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{I} = \mathbf{I} \cdot \boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}$   
 (στ)  $\boldsymbol{\tau} : \mathbf{ab} = (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{a}) \cdot \mathbf{b}$

23. Να δειχθούν οι εξής ταυτότητες:

- (α)  $\mathbf{I} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot \mathbf{u}$   
 (β)  $\nabla \cdot (s\mathbf{I}) = \nabla s$ , όπου  $s$  βαθμωτό πεδίο.  
 (γ)  $\nabla \cdot (s\boldsymbol{\tau}) = \nabla s \cdot \boldsymbol{\tau} + s \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}$ , όπου  $s$  βαθμωτό πεδίο.

24. Αν ο τανυστής  $\boldsymbol{\tau}$  είναι συμμετρικός δείξτε ότι

$$\boldsymbol{\tau} : \nabla \mathbf{u} = \nabla \cdot (\boldsymbol{\tau} \cdot \mathbf{u}) - \mathbf{u} \cdot (\nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) \quad (1.208)$$

25. Η καταστατική εξίσωση **ασυμπίεστου Νευτώνειου ρευστού** είναι:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D}, \quad (1.209)$$

όπου  $\eta$  το ιξώδες και

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (1.210)$$

ο τανυστής ρυθμών παραμόρφωσης. Βρείτε τις εκφράσεις των συνιστωσών του  $\boldsymbol{\tau}$  στα τρία συστήματα συντεταγμένων.

26. Δείξτε ότι για **ασυμπίεστο Νευτώνειο ρευστό** ισχύει:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (1.211)$$

Με βάση το πιο πάνω αποτέλεσμα η εξίσωση διατήρησης της ορμής ανάγεται στην πασίγνωστη **εξίσωση Navier-Stokes**:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g} \quad (1.212)$$

Βρείτε της συνιστώσες της (1.212) στα τρία συστήματα συντεταγμένων.

27. Να αποδειχθεί η Πρόταση 1.6.2:

Αν  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  είναι το πεδίο ταχύτητας και  $J$  είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού των συντεταγμένων Euler στις συντεταγμένες Lagrange, τότε

$$\frac{dJ}{dt} = \nabla \cdot \mathbf{u} J.$$

28. Αν  $J$  είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού των συντεταγμένων Euler σε συντεταγμένες Lagrange, δείξτε ότι για **μόνιμη ροή** (steady flow) ισχύει:

$$\frac{d^2 J}{dt^2} = J \nabla \cdot \{(\nabla \cdot \mathbf{u}) \mathbf{u}\}. \quad (1.213)$$

**Υπόδειξη:** Η ολική παράγωγος  $d \cdot / dt$  ταυτίζεται εδώ με την υλική  $D \cdot / Dt$ .

29. Χρησιμοποιήστε τη βαθμωτή μορφή του Θεωρήματος Μεταφοράς του Reynolds για να αποδείξετε τον Κανόνα του Leibniz.

30. Αποδείξτε τη διανυσματική μορφή του Θεωρήματος Μεταφοράς του Reynolds:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} f(\mathbf{x}, t) \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(f\mathbf{u})}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla(f\mathbf{u}) + (f\mathbf{u}) \nabla \cdot \mathbf{u} \right] dV.$$

31. Δείξτε ότι

$$\mathbf{u} \cdot \nabla(\rho \mathbf{u}) = \rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{u} \cdot \nabla \rho. \quad (1.214)$$

32. (α) Έστω  $S(t)$  κλειστή υλική επιφάνεια σ'ένα πεδίο ροής  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  και  $\mathbf{a}$  ένα  $C^1$  διανυσματικό πεδίο ορισμένο στο πεδίο ροής. Δείξτε ότι για τη μεταβολή του ρυθμού ροής του  $\mathbf{a}$  διά μέσου της  $S(t)$  ισχύει:

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(t)} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (1.215)$$

(β) Αποδείξτε εκ νέου την (1.215) χρησιμοποιώντας το **Θεώρημα Μεταφοράς Ρυθμού Ροής** (flux transport theorem):

$$\frac{d}{dt} \int_{S(t)} \mathbf{a} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{S(t)} \left( \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial t} + \mathbf{u} \nabla \cdot \mathbf{a} \right) \cdot \mathbf{n} dS + \int_{C(t)} (\mathbf{a} \times \mathbf{u}) \cdot d\mathbf{r}, \quad (1.216)$$

όπου  $S(t)$  ανοικτή υλική επιφάνεια με σύνορο την (υλική) καμπύλη  $C(t)$ .

33. Αν η ταχύτητα σε μια Νευτώνεια ροή δίνεται από την

$$\mathbf{u} = c(x^2 + y^2) \mathbf{k}$$

- (α) Ελέγξτε αν η  $\mathbf{u}$  ικανοποιεί την εξίσωση συνέχειας για ασυμπίεστη ροή.
- (β) Βρείτε το στροβιλισμό της ταχύτητας. Είναι η ροή στροβιλή;
- (γ) Βρείτε τις συνιστώσες της ταχύτητας σε κυλινδρικές συντεταγμένες.
- (δ) Βρείτε τον τανυστή κλίσεων της ταχύτητας.
- (ε) Βρείτε τον τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης.
- (στ) Βρείτε τον τανυστή ιξωδών τάσεων.

34. Να επαναληφθεί το πιο πάνω πρόβλημα για την ταχύτητα

$$\mathbf{u} = x \mathbf{i} - y \mathbf{j}$$

35. Έστω ο τανυστής τάσεων

$$\boldsymbol{\tau} = 5y \mathbf{ij} + 5y \mathbf{ji} + 5x^2 \mathbf{jk} + 5x^2 \mathbf{kj} + 10xz \mathbf{kk}$$

Να βρεθεί το διάνυσμα τάσης στο σημείο  $(3, 4, 5)$  της κυλινδρικής επιφάνειας  $x^2 + y^2 = 25$ .

36. Βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τις συνιστώσες του τανυστή τάσεων σε καρτεσιανές συντεταγμένες με τις συνιστώσες του σε σφαιρικές συντεταγμένες και αντίστροφα.

37. Θεωρούμε την επίπεδη ροή σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\mathbf{u} = u_x(x, y) \mathbf{i} + u_y(x, y) \mathbf{j}$$

(α) Βρείτε την έκφραση που ισχύει για τη δεύτερη αναλλοίωτη  $\Pi_{\mathbf{D}}$  του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης.

(β) Βρείτε τη μορφή που παίρνει η  $\Pi_{\mathbf{D}}$  όταν η ροή είναι μονοκατευθυντική,

$$\mathbf{u} = u_x(y) \mathbf{i},$$

και υπολογίστε το μέγεθος του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2\Pi_{\mathbf{D}}}$$

38. Θεωρούμε την επίπεδη ροή σε κυλινδρικές συντεταγμένες:

$$\mathbf{u} = u_r(r, \theta) \mathbf{e}_r + u_\theta(r, \theta) \mathbf{e}_\theta$$

(α) Βρείτε την έκφραση που ισχύει για τη δεύτερη αναλλοίωτη  $II_D$  του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης.

(β) Βρείτε τη μορφή που παίρνει η  $II_D$  όταν η ροή είναι μονοκατευθυντική,

$$\mathbf{u} = u_\theta(r) \mathbf{e}_\theta,$$

και υπολογίστε το μέγεθος του τανυστή ρυθμών παραμόρφωσης

$$\dot{\gamma} = \sqrt{2II_D}$$

39. Έστω ο τανυστής τάσεων

$$\boldsymbol{\tau} = 4 \mathbf{ii} - \mathbf{ij} - \mathbf{ji} + 4 \mathbf{jj} + \mathbf{kk}$$

(α) Βρείτε τις κύριες τάσεις του.

(β) Βρείτε τις αναλλοίωτες  $I$ ,  $II$  και  $III$ .

(γ) Βρείτε τις αναλλοίωτες  $I_1$ ,  $I_2$  και  $I_3$ .

40. Έστω ο τανυστής τάσεων

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{ii} - 2 \mathbf{ik} + 3 \mathbf{jj} - 2 \mathbf{kj} - 2 \mathbf{kk}$$

(α) Βρείτε τις κύριες τάσεις του.

(β) Βρείτε τις κύριες διευθύνσεις του  $\boldsymbol{\tau}$ .

(γ) Βρείτε τις αναλλοίωτες  $I$ ,  $II$  και  $III$ .

(δ) Βρείτε τον πίνακα περιστροφής που διαγωνοποιεί τον  $\boldsymbol{\tau}$ .

41. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Ένα ρευστό είναι ασυμπίεστο (δηλ. έχει σταθερή πυκνότητα  $\rho$ ).

(β)  $D\rho/Dt=0$ .

(γ)  $\nabla \cdot \mathbf{u}=0$  όπου  $\mathbf{u}$  η ταχύτητα.

(δ)  $J=1$  όπου  $J$  η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από τις συντεταγμένες Lagrange στις συντεταγμένες Euler.

42. Αν  $J$  είναι η Ιακωβιανή του μετασχηματισμού από τις συντεταγμένες Lagrange στις συντεταγμένες Euler και  $\rho$  η πυκνότητα, δείξτε ότι

$$\rho(\phi(\mathbf{X}, t), t) J = \rho(\mathbf{x}, 0) \quad (1.217)$$

όπου  $(\mathbf{X}, t)$  και  $(\mathbf{x}, t)$  οι συντεταγμένες Lagrange και Euler αντίστοιχα.

43. Αν  $\mathbf{u}$  είναι το διάνυσμα της ταχύτητας και  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα θέσης, ναδειχθούν οι ταυτότητες:

(α)

$$\nabla(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = -\mathbf{u} \times \mathbf{I} + \mathbf{r} \times \nabla \mathbf{u}$$

(β)

$$\frac{D}{Dt}(\mathbf{r} \times \mathbf{u}) = \mathbf{r} \times \frac{D\mathbf{u}}{Dt}$$

## 1.9 Βιβλιογραφία

1. T. Papanastasiou, G. Georgiou and A. Alexandrou, *Viscous Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, 1999.
2. J. Marsden και A. Tromba, *Διανυσματικός Λογισμός* (Μετάφραση: Α. Γιαννόπουλος), Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης, Ηράκλειο, 1992.
3. H.F. Davis and A.D. Snider, *Vector Analysis*, 6th ed., Universal Book Stall, New Delhi, 1992.
4. R. Aris, *Vectors, Tensors, and the Basic Equations of Fluid Mechanics*, Dover, New York, 1962.
5. M.R. Spiegel, *Vector Analysis and an Introduction to Tensor Analysis*, Schaum's Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1959.
6. G. Strang, *Linear Algebra and its Applications*, Academic Press, Inc., Orlando, 1980.
7. R.B. Bird, W.E. Stewart and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, John Wiley & Sons, New York, 1960.
8. H.M. Schey, *Div, Grad, Curl, and All That*, Norton and Company, New York, 1973.
9. R.L. Panton, *Incompressible Flow*, John Wiley & Sons, New York, 1996.
10. M.M. Lipschutz, *Differential Geometry*, Schaum's Outline Series in Mathematics, McGraw-Hill, New York, 1969.
11. G.E. Mase, *Theory and Problems of Continuum Mechanics*, Schaum's Outline Series in Engineering, McGraw-Hill, New York, 1970.
12. R.B. Bird, R.C. Armstrong and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids*, John Wiley & Sons, New York, 1987.
13. A.J. Chorin and J.E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1980.

# Κεφάλαιο 2

## Οι εξισώσεις κίνησης

# Περιεχόμενα

<b>2</b>	<b>ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ</b>	<b>63</b>
2.1	Ισοζύγια μάζας και γραμμικής ορμής . . . . .	63
2.1.1	Ακίνητος όγκος ελέγχου . . . . .	63
2.1.2	Υλικός όγκος ελέγχου . . . . .	66
2.1.3	Διαφορικές μορφές των εξισώσεων διατήρησης . . . . .	67
2.2	Εξισώσεις διατήρησης για οποιοδήποτε ρευστό . . . . .	69
2.3	Οι εξισώσεις <b>Navier-Stokes</b> . . . . .	75
2.4	Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων κίνησης . . . . .	81
2.5	Προβλήματα . . . . .	83
2.6	Βιβλιογραφία . . . . .	83





## Κεφάλαιο 2

# ΟΙ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

### 2.1 Ισοζύγια μάζας και γραμμικής ορμής

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε τις διαφορικές μορφές των εξισώσεων που διέπουν την ισόθερμη ροή ενός ρευστού. Αυτές είναι:

- η εξίσωση διατήρησης της μάζας, και
- η εξίσωση διατήρησης της γραμμικής ορμής.

Για τον σκοπό αυτό θεωρούμε ένα **όγκο ελέγχου** (control volume). Αυτός μπορεί να είναι ακίνητος ή να κινείται μαζί με το ρευστό έτσι ώστε να περιέχει σε κάθε χρονική στιγμή τα ίδια σωματίδια ρευστού. Όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, σ' αυτή τη δεύτερη περίπτωση ο όγκος ελέγχου καλείται **υλικός όγκος ελέγχου** (material control volume) και ισχύει το Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds. Τα ισοζύγια μάζας και ορμής σ' ένα (ακίνητο ή υλικό) όγκο ελέγχου μας δίνουν τις λεγόμενες **ολοκληρωτικές μορφές** των εξισώσεων διατήρησης. Οι **διαφορικές μορφές** θα αποδειχθούν στη συνέχεια.

#### 2.1.1 Ακίνητος όγκος ελέγχου

Είναι φανερό ότι τα σωματίδια ρευστού που καταλαμβάνουν ένα ακίνητο όγκο ελέγχου είναι γενικά διαφορετικά σε κάθε χρονική αφού το ρευστό ρέει διά μέσου της επιφάνειάς του.

##### Διατήρηση της μάζας

Θεωρούμε έναν αυθαίρετο ακίνητο όγκο ελέγχου  $V$  που φράσσεται από την επιφάνεια  $S$ , όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.1. Σύμφωνα με τον νόμο διατήρησης της μάζας ο ρυθμός αύξησης της μάζας του ρευστού μέσα στον όγκο ελέγχου  $V$  είναι ίσος με τον ρυθμό ροής ρευστού διά μέσου της επιφάνειας  $S$ :

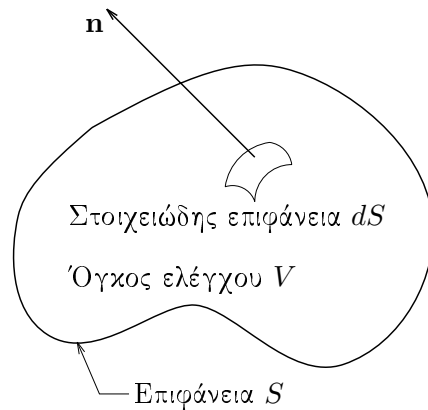
$$\left[ \begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{αύξησης} \\ \text{της μάζας} \\ \text{στον } V \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{εισροής} \\ \text{μάζας} \\ \text{διαμέσου} \\ \text{της } S \end{array} \right]. \quad (2.1)$$

Ο ρυθμός αύξησης της μάζας είναι

$$\frac{dm}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho dV. \quad (2.2)$$

Επειδή ο όγκος ελέγχου  $V$  είναι σταθερός, η χρονική παράγωγος μπορεί να μπει μέσα στο ολοκλήρωμα:

$$\frac{dm}{dt} = \int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV. \quad (2.3)$$



Σχήμα 2.1: Ακίνητος όγκος ελέγχου σε πεδίο ροής.

(Παρατηρούμε εδώ ότι η χρονική παράγωγος  $d/dt$  ταυτίζεται με την τοπική παράγωγο  $\partial/\partial t$ .) Ο ρυθμός ροής μάζας διά μέσου της επιφάνειας  $S$  δίνεται από την

$$- \int_S (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS,$$

όπου  $\mathbf{n}$  το προς τα έξω κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι αν η ροή είναι προς τα έξω, αν δηλαδή το  $(\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n}$  είναι θετικό, τότε έχουμε μείωση της μάζας του ρευστού που βρίσκεται στον όγκο ελέγχου. Αντικαθιστώντας στην εξίσωση (2.1) παίρνουμε την πιο κάτω ολοκληρωτική εξίσωση για τη διατήρηση της μάζας σε σταθερό όγκο ελέγχου:

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S (\rho \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS. \quad (2.4)$$

### Διατήρηση της γραμμικής ορμής

Σύμφωνα με τον νόμο κίνησης του Newton ο ρυθμός μεταβολής της γραμμικής ορμής ισούται με τη συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στον όγκο ελέγχου. Επειδή ο όγκος ελέγχου  $V$  είναι σταθερός έχουμε επίσης μεταβολή της ορμής λόγω της εισροής (ή εκροής) ρευστού διά μέσου της επιφάνειας  $S$ . Από την άλλη, οι δυνάμεις που ασκούνται διακρίνονται σε **σωματικές** και **επιφανειακές** (body and surface forces).

Οι σωματικές δυνάμεις προέρχονται από την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με εξωτερικά πεδία δυνάμεων και ασκούνται πάνω σε όλο το σώμα του όγκου ελέγχου, όπως δηλώνει και η ονομασία τους. Οι δυνάμεις αυτές ασκούνται στα κέντρα μάζας των σωματιδίων και είναι ανάλογες προς τη μάζα τους. Συνήθεις σωματικές δυνάμεις είναι αυτή της βαρύτητας και οι ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις. Οι επιφανειακές δυνάμεις προέρχονται από την αλληλεπίδραση του όγκου ελέγχου με το άμεσο περιβάλλον, δηλαδή αυτό με το οποίο βρίσκεται σε άμεση φυσική επαφή. Έτσι η αλληλεπίδραση αυτή γίνεται διαμέσου της επιφάνειας  $S$  που φράσσει τον όγκο ελέγχου και οι δυνάμεις που αναπτύσσονται ασκούνται πάνω σε αυτή όπως δηλώνει και η ονομασία τους. Οι επιφανειακές δυνάμεις είναι: (α) η δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια  $S$  λόγω της υδροστατικής πίεσης, και (β) η δύναμη τριβής που ασκείται από το περιβάλλον ρευστό στο ρευστό που βρίσκεται μέσα στον όγκο ελέγχου. Η δεύτερη αυτή υδροδυναμική δύναμη που ασκείται στην επιφάνεια  $S$  οφείλεται στις μοριακές κινήσεις και αλληλεπιδράσεις και είναι ακριβώς αυτή που προνοεί η **αρχή δράσης-αντίδρασης** (τρίτος Νόμος του Newton).

Ο νόμος διατήρησης της γραμμικής ορμής μπορεί να διατυπωθεί λοιπόν ως εξής:

$$\begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{αύξησης} \\ \text{γραμμικής} \\ \text{ορμής} \\ \text{στον } V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Ρυθμός} \\ \text{εισοχής} \\ \text{γραμμικής} \\ \text{ορμής} \\ \text{διαμέσου} \\ \text{της } S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Συνισταμένη} \\ \text{επιφανειακών} \\ \text{δυνάμεων που} \\ \text{ασκούνται} \\ \text{στην } S \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Συνισταμένη} \\ \text{σωματικών} \\ \text{δυνάμεων που} \\ \text{ασκούνται} \\ \text{στον } V \end{bmatrix}. \quad (2.5)$$

Η ορμή  $\mathbf{J}$  του ρευστού που περιέχεται στον όγκο ελέγχου δίνεται από την

$$\mathbf{J} = \int_V \rho \mathbf{u} dV, \quad (2.6)$$

και έτσι

$$\frac{d\mathbf{J}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_V \rho \mathbf{u} dV = \int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV. \quad (2.7)$$

Υπενθυμίζουμε για άλλη μια φορά ότι στην περίπτωση ακίνητου χωρίου η χρονική παράγωγος  $d\cdot/dt$  ταυτίζεται με την τοπική παράγωγο  $\partial\cdot/\partial t$ .

Ο ρυθμός προσθήκης ορμής λόγω της ροής διά μέσου της  $S$  είναι

$$- \int_S (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS.$$

Το αρνητικό πρόσημο προκύπτει από το γεγονός ότι το περιεχόμενο του όγκου ελέγχου αυξάνει όταν το διάνυσμα της ταχύτητας  $\mathbf{u}$  δείχνει προς το εσωτερικό του  $V$ . Ο δυαδικός τανυστής  $\rho \mathbf{u} \mathbf{u}$  είναι ως γνωστό ο (συμμετρικός) τανυστής μεταφερόμενης ορμής.

Η επιπρόσθετη ροή ορμής λόγω των επιφανειακών δυνάμεων είναι επίσης ένας συμμετρικός τανυστής, ο **ολικός τανυστής τάσεων** (total stress tensor):

$$\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}, \quad (2.8)$$

όπου  $p$  η πίεση και  $\boldsymbol{\tau}$  ο **τανυστής ιξωδών τάσεων** (viscous stress tensor). Έτσι, ο ρυθμός αύξησης της ορμής λόγω των επιφανειακών δυνάμεων είναι:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\sigma} dS = \int_S \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dS. \quad (2.9)$$

Μέσω του ανισότροπου τανυστή ιξωδών τάσεων  $\boldsymbol{\tau}$  λαμβάνεται υπόψη η σχετική κίνηση των σωματιδίων του ρευστού. Σε στατική ισορροπία, η μόνη μη μηδενική συνεισφορά στη ροή ορμής προέρχεται από την υδροστατική πίεση  $p$ . Το διάνυσμα  $\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}$  είναι η **έλξη** (traction) που παράγεται από τη δράση του  $\mathbf{T}$  σε ένα στοιχείο επιφάνειας με προσανατολισμό  $\mathbf{n}$ .

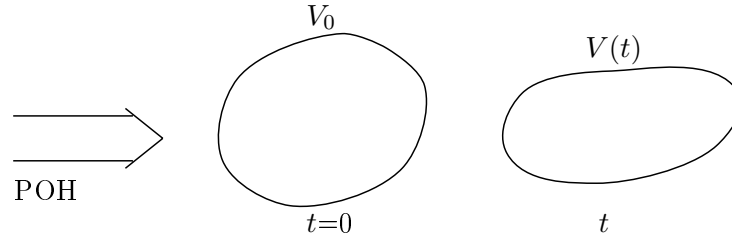
Στη συνέχεια θα θεωρήσουμε ότι η μόνη σωματική δύναμη που ασκείται στο ρευστό που βρίσκεται στον όγκο ελέγχου  $V$  είναι αυτή της βαρύτητας:

$$\int_V \rho \mathbf{g} dV.$$

Αντικαθιστώντας τις πιο πάνω εκφράσεις στην εξίσωση (2.13) παίρνουμε την πιο κάτω ολοκληρωτική εξίσωση για τη διατήρηση της ορμής σε σταθερό όγκο ελέγχου:

$$\boxed{\int_V \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} dV = - \int_S (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) \cdot \mathbf{n} dS + \int_S \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dS + \int_V \rho \mathbf{g} dV.} \quad (2.10)$$

Τα επιφανειακά ολοκληρώματα στις εξισώσεις (2.4) και (2.10) μπορούν να μετατραπούν φυσικά σε ολοκληρώματα όγκου με εφαρμογή του Θεωρήματος του Gauss.

Σχήμα 2.2: Υλικός όγκος ελέγχου  $V(t)$ .

### 2.1.2 Υλικός όγκος ελέγχου

Θεωρούμε τώρα την περίπτωση υλικού όγκου ελέγχου  $V(t)$ , όπου ο όγκος ελέγχου κινείται μαζί με τη ροή (βλ. Σχήμα 2.2).

#### Διατήρηση της μάζας

Η μάζα του ρευστού που περιέχεται σ'ένα υλικό όγκο ελέγχου είναι εξ ορισμού σταθερή. Άρα για το μακροσκοπικό ισοζύγιο μάζας έχουμε:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός} \\ \text{αύξησης} \\ \text{της μάζας} \\ \text{στον } V \end{array} \right] = 0. \quad (2.11)$$

Έτσι η ολοκληρωτική εξίσωση για τη διατήρηση της μάζας σε υλικό όγκο ελέγχου είναι η:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0. \quad (2.12)$$

#### Διατήρηση της γραμμικής ορμής

Εφόσον ο υλικός όγκος ελέγχου κινείται μαζί με τη ροή δεν έχουμε εισροή γραμμικής ορμής διά μέσου της επιφάνειάς του  $S(t)$ . Έτσι το μακροσκοπικό ισοζύγιο γραμμικής ορμής παίρνει την μορφή:

$$\left[ \begin{array}{l} \text{Ρυθμός} \\ \text{αύξησης} \\ \text{γραμμικής} \\ \text{ορμής} \\ \text{στον } V \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη} \\ \text{επιφανειακών} \\ \text{δυνάμεων που} \\ \text{ασκούνται} \\ \text{στην } S \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{l} \text{Συνισταμένη} \\ \text{σωματικών} \\ \text{δυνάμεων που} \\ \text{ασκούνται} \\ \text{στον } V \end{array} \right] \quad (2.13)$$

με αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση την:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV. \quad (2.14)$$

#### Διατήρηση της στροφορμής

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής μας λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής σ' ένα υλικό όγκο

ελέγχου είναι ίσος με το άθροισμα των ροπών που ασκούνται πάνω σε αυτόν:

$$\left[ \begin{array}{c} \text{Ρυθμός} \\ \text{αύξησης} \\ \text{στροφορμής} \\ \text{στον } V \end{array} \right] = \left[ \begin{array}{c} \text{Ροπή} \\ \text{επιφανειακών} \\ \text{δυνάμεων που} \\ \text{ασκούνται} \\ \text{στην } S \end{array} \right] + \left[ \begin{array}{c} \text{Ροπή} \\ \text{σωματικών} \\ \text{δυνάμεων που} \\ \text{ασκούνται} \\ \text{στον } V \end{array} \right]. \quad (2.15)$$

Η αντίστοιχη ολοκληρωτική εξίσωση έχει ως εξής:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{S(t)} \mathbf{r} \times [\mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau})] dS + \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \quad (2.16)$$

όπου  $\mathbf{r}$  το διάνυσμα θέσης.

### 2.1.3 Διαφορικές μορφές των εξισώσεων διατήρησης

Θα αποδείξουμε τώρα τις διαφορικές μορφές των εξισώσεων διατήρησης μάζας και ορμής.

#### Πρόταση 2.1.1 Εξίσωση συνέχειας

Η διαφορική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της μάζας είναι:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.17)$$

#### Απόδειξη

α) Απόδειξη με σταθερό όγκο ελέγχου

Για αυθαίρετο σταθερό όγκο ελέγχου  $V$  στο πεδίο ροής έχουμε από την (2.4):

$$\int_V \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = - \int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dS.$$

Όμως από το Θεώρημα του Gauss ισχύει:

$$\int_S \mathbf{n} \cdot (\rho \mathbf{u}) dS = \int_V \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) dV$$

και έτσι

$$\int_V \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV = 0.$$

Επειδή το χωρίο  $V$  είναι αυθαίρετο παίρνουμε

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

β) Απόδειξη με υλικό όγκο ελέγχου

Για αυθαίρετο υλικό όγκο ελέγχου  $V(t)$  στο πεδίο ροής έχουμε από την (2.12):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = 0.$$

Από τη βαθμωτή μορφή του Θεωρήματος Μεταφοράς έχουμε

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) \right] dV$$

Επειδή το χωρίο  $V(t)$  είναι αυθαίρετο παίρνουμε ξανά

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0.$$

□

**Πρόταση 2.1.2** Εξίσωση διατήρησης της γραμμικής ορμής

Η διαφορική μορφή της εξίσωσης διατήρησης της γραμμικής ορμής είναι:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.18)$$

**Απόδειξη**

Για αυθαίρετο υλικό όγκο ελέγχου  $V(t)$  στο πεδίο ροής έχουμε από την (2.14):

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dS + \int_{V(t)} \rho \mathbf{g} dV. \quad (i)$$

Στο Παράδειγμα 1.7.2 δείξαμε χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Μεταφοράς του Reynolds και την εξίσωση συνέχειας ότι

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} dV = \int_{V(t)} \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) dV. \quad (ii)$$

Από το Θεώρημα Gauss για τανυστές έχουμε επίσης:

$$\int_{S(t)} \mathbf{n} \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dS = \int_{V(t)} \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) dV = \int_{V(t)} (-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau}) dV, \quad (iii)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε ως γνωστή την ταυτότητα  $\nabla \cdot (p\mathbf{I}) = \nabla p$ . Αντικαθιστώντας τις (ii) και (iii) στην (i) παίρνουμε:

$$\int_{V(t)} \left[ \rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \mathbf{g} \right] dV = \mathbf{0}.$$

Επειδή το χωρίο  $V(t)$  είναι αυθαίρετο παίρνουμε:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) + \nabla p - \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} - \rho \mathbf{g} = \mathbf{0}$$

ή

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}.$$

□

**Συμμετρία του τανυστή ιξωδών τάσεων**

Η αρχή διατήρησης της στροφορμής είναι ανεξάρτητη από αυτή της διατήρησης της γραμμικής ορμής. Μαζί με αυτή συνεπάγεται τη συμμετρία του τανυστή ιξωδών τάσεων,  $\boldsymbol{\tau}$ .

**Πρόταση 2.1.3**

Ο τανυστής ιξωδών τάσεων είναι συμμετρικός.

**Απόδειξη**

Θα δείξουμε ότι ο ολικός τανυστής τάσεων

$$\mathbf{T} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$$

είναι συμμετρικός. Από την αρχή διατήρησης της στροφορμής σ' ένα υλικό όγκο ελέγχου [Εξίσωση (2.16)] ισχύει

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{S(t)} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) dS + \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{g} dV \quad (i)$$

Από το θεώρημα μεταφοράς του Reynolds ισχύει:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \left[ \frac{\partial(\mathbf{r} \times \rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{r} \times \mathbf{u}) (\mathbf{r} \times \rho \mathbf{u}) \right] dV$$

Μετά από κάποιες πράξεις (άσκηση) βρίσκουμε:

$$\frac{d}{dt} \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \rho \mathbf{u} dV = \int_{V(t)} \mathbf{r} \times \left[ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot \rho \mathbf{u} \mathbf{u} \right] dV \quad (ii)$$

Από το θεώρημα της απόκλισης βρίσκουμε (άσκηση):

$$\int_{S(t)} \mathbf{r} \times (\mathbf{n} \cdot \mathbf{T}) dS = \int_{V(t)} [\mathbf{r} \times \nabla \cdot \mathbf{T} - \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T}] dV \quad (iii)$$

όπου  $\boldsymbol{\epsilon}$  ο τανυστής μετάθεσης ο οποίος είναι τανυστής 3ης τάξης και ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (2.19)$$

Από τις (i)-(iii) παίρνουμε:

$$\int_{V(t)} \left\{ \mathbf{r} \times \left[ \frac{\partial(\rho \mathbf{u})}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) - \nabla \cdot \mathbf{T} - \rho \mathbf{g} \right] + \boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T} \right\} dV = 0.$$

Επειδή ο υλικός όγκος ελέγχου είναι αυθαίρετος και η παράσταση στις αγκύλες μηδενίζεται λόγω της εξίσωσης διατήρησης της γραμμικής ορμής (Πρ. 2.1.2), βρίσκουμε ότι

$$\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T} = \mathbf{0}. \quad (2.20)$$

Η τελευταία σχέση συνεπάγεται ότι ο  $\mathbf{T}$  είναι συμμετρικός (άσκηση). Άρα και ο  $\boldsymbol{\tau}$  είναι συμμετρικός.  $\square$

## 2.2 Εξισώσεις διατήρησης για οποιοδήποτε ρευστό

Μια ισόθερμη ροή διέπεται από τις εξισώσεις διατήρησης της μάζας (conservation of mass) και διατήρησης της ορμής (conservation of momentum). Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, η εξίσωση διατήρησης της μάζας είναι μια βαθμωτή εξίσωση και είναι γνωστή ως εξίσωση συνέχειας (continuity equation):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.21)$$

όπου  $\rho$  η πυκνότητα και  $\mathbf{u}$  η ταχύτητα. Η εξίσωση διατήρησης της ορμής (momentum equation) είναι μια διανυσματική εξίσωση και μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.22)$$

όπου  $p$  η πίεση,  $\boldsymbol{\tau}$  ο τανυστής ιξωδών τάσεων (viscous stress tensor) και  $\mathbf{g}$  το διάνυσμα επιτάχυνσης της βαρύτητας.



**Παράδειγμα 2.2.1. Εναλλακτικές μορφές της εξίσωσης συνέχειας**

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει τις πιο κάτω εναλλακτικές μορφές της εξίσωσης συνέχειας (2.21):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.23)$$

και

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.24)$$

Με συμβολισμό δεικτών (index notation) η εξίσωση συνέχειας γράφεται ως εξής:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \frac{\partial u_i}{\partial x_i} = 0. \quad (2.25)$$

□

**Παράδειγμα 2.2.2. Εναλλακτικές μορφές της εξίσωσης διατήρησης της ορμής**

Η εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.22) γράφεται επίσης ως εξής:

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g} \quad (2.26)$$

ή

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot (-p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}) + \rho \mathbf{g} \quad (2.27)$$

ή ακόμα

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{g} \quad (2.28)$$

όπου  $\boldsymbol{\sigma} = -p\mathbf{I} + \boldsymbol{\tau}$  ο ολικός τανυστής τάσεων.

Με συμβολισμό δεικτών η εξίσωση διατήρησης της ορμής παίρνει τη μορφή:

$$\rho \left( \frac{\partial u_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial \tau_{ji}}{\partial x_j} + \rho g_i. \quad (2.29)$$

□

Οι εξισώσεις διατήρησης (2.21) και (2.22) είναι γενικές με την έννοια ότι ισχύουν για κάθε ρευστό (συμπιεστό ή ασυμπιεστό, Νευτώνειο ή μη Νευτώνειο). Η εξίσωση συνέχειας και οι τρεις συνιστώσες της εξίσωσης διατήρησης της ορμής (για οποιοδήποτε σύστημα συντεταγμένων) μας δίνουν ένα σύστημα τεσσάρων βαθμωτών εξισώσεων οι οποίες αντιστοιχούν στα τέσσερα άγνωστα πεδία: την πίεση  $p$  και τις τρεις συνιστώσες της ταχύτητας  $\mathbf{u}$  (π.χ. τις  $u_x$ ,  $u_y$  και  $u_z$  σε καρτεσιανές συντεταγμένες). Οι τέσσερις αυτές εξισώσεις είναι γνωστές σαν *εξισώσεις κίνησης* (equations of motion). Είναι φανερό ότι το σύστημα των τεσσάρων αυτών εξισώσεων είναι ανοικτό αφού αυτές περιέχουν ένα επιπλέον άγνωστο πεδίο: τον τανυστή ιξωδών τάσεων  $\boldsymbol{\tau}$ . Εξάιρεση αποτελεί φυσικά η ειδική περίπτωση *ανιξιδούς ροής* (inviscid flow) αφού τότε

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0},$$

και η εξίσωση διατήρησης της ορμής (2.22) ανάγεται στην λεγόμενη **εξίσωση Euler**:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \rho \mathbf{g}. \quad (2.30)$$

**Παράδειγμα 2.2.3. Εξισώσεις κίνησης για ανιξιδή ροή**

Οι εξισώσεις κίνησης για ανιξιδή ροή σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι οι πιο κάτω:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0, \quad (2.31)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g_x, \quad (2.32)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y, \quad (2.33)$$

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z. \quad (2.34)$$

□

Στην περίπτωση **ιξώδους ροής** (viscous flow), για να κλείσει το σύστημα των εξισώσεων (2.21) και (2.22) απαιτείται μια ταυσιτική εξίσωση που να συνδέει τον ταυσιτή ιξωδών τάσεων  $\boldsymbol{\tau}$  με το διάλυσμα της ταχύτητας  $\mathbf{u}$ , ή, ακριβέστερα, με τον **ταυσιτή ρυθμών παραμόρφωσης** (rate of deformation tensor):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2} [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T], \quad (2.35)$$

όπου  $\nabla \mathbf{u}$  ο **ταυσιτής κλίσεων της ταχύτητας** (velocity gradient tensor). Η απαιτούμενη αυτή ταυσιτική εξίσωση,

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}) = \mathbf{0}, \quad (2.36)$$

εξαρτάται από το ρευστό και είναι γνωστή ως **καταστατική εξίσωση** ή **υλική σχέση** (constitutive equation). Η απλούστερη καταστατική εξίσωση αντιστοιχεί στα **Νευτώνεια ρευστά** (Newtonian fluids). Όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, η αντικατάσταση της Νευτώνειας καταστατικής εξίσωσης στην εξίσωση (2.22) οδηγεί στην εξίσωση Navier-Stokes. Σε επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε επίσης με πιο περίπλοκες καταστατικές εξισώσεις που αφορούν σε **μη-Νευτώνεια** (non-Newtonian fluids) και **ιξωδοελαστικά ρευστά** (viscoelastic fluids).

Οι εξισώσεις κίνησης αποτελούν ένα σύστημα μερικών διαφορικών εξισώσεων το οποίο μόνο σπάνια επιδέχεται αναλυτική λύση. Ακόμα και η αριθμητική επίλυση των εξισώσεων αυτών παρουσιάζει σοβαρές δυσκολίες στη γενική περίπτωση. Ευτυχώς όμως σε πολλά προβλήματα ροής αυτές μπορούν να απλουστευθούν με παραδοχές οι οποίες βασίζονται στις συνθήκες ροής, τη γεωμετρία και τα χαρακτηριστικά του υπό μελέτη ρευστού. Οι παραδοχές αυτές είναι αποδεκτές μόνο αν η λύση του απλοποιημένου προβλήματος είναι μια καλή προσέγγιση της λύσης του αρχικού προβλήματος ροής. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε τις πιο συνηθισμένες παραδοχές οι οποίες αναπόφευκτα οδηγούν σε διαφορετικό τύπο ροής.

### Ασυμπίεστες και συμπίεστες ροές

Αν η πυκνότητα είναι σταθερή,

$$\rho = \text{const.}$$

τότε έχουμε **ασυμπίεστη ροή** (incompressible flow). Διαφορετικά λέμε ότι η ροή είναι **συμπίεστη**<sup>1</sup> (compressible flow). Η παραδοχή ασυμπίεστότητας είναι πολύ συνηθισμένη στην περίπτωση ισόθερμων ροών υγρών αλλά όχι σε ανισόθερμες ροές (λόγω της εξάρτησης της πυκνότητας από τη θερμοκρασία) και σε ροές αερίων (λόγω της ισχυρής εξάρτησης της πυκνότητας από την πίεση).

Στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής η εξίσωση συνέχειας (2.21) απλοποιείται στην

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0. \quad (2.37)$$

Στους Πίνακες 2.1-2.3 δίνονται οι εξισώσεις κίνησης στα τρία βασικά συστήματα συντεταγμένων. Σ'αυτούς φαίνεται τόσο η γενική μορφή της εξίσωσης συνέχειας (2.21) για συμπίεστη ροή όσο και η απλοποιημένη μορφή (2.37) για ασυμπίεστη ροή. Αν και στους πίνακες αυτούς δεν φαίνεται άμεση διαφοροποίηση

<sup>1</sup>Αρκετά συχνά αντί του ορθού **συμπίεστη και ασυμπίεστη ροή** χρησιμοποιούνται οι όροι **ασυμπίεστο και συμπίεστο ρευστό**. Ο όρος **ασυμπίεστη ροή** είναι πιο ακριβής αφού σε μια ροή ένα ρευστό μπορεί να θεωρηθεί ασυμπίεστο ενώ σε μια άλλη ροή το ίδιο ρευστό μπορεί να είναι συμπίεστο.

Εξίσωση συνέχειας

(α) Συμπιεστή ροή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u_x) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho u_y) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$$

(β) Ασυμπιεστή ροή

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Εξίσωση διατήρησης της ορμής*x*-συνιστώσα:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x \end{aligned}$$

*y*-συνιστώσα:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \left[ \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} \right] + \rho g_y \end{aligned}$$

*z*-συνιστώσα:

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \\ &= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[ \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z \end{aligned}$$

Πίνακας 2.1: Οι εξισώσεις κίνησης σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

<p><b>Εξίσωση συνέχειας</b></p> <p>(α) Συμπιεστή ροή</p> $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(\rho r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}(\rho u_\theta) + \frac{\partial}{\partial z}(\rho u_z) = 0$ <p>(β) Ασυμπιεστή ροή</p> $\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ <p><b>Εξίσωση διατήρησης της ορμής</b></p> <p>r-συνιστώσα:</p> $\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) =$ $= -\frac{\partial p}{\partial r} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rr}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} - \frac{\tau_{\theta\theta}}{r} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} \right] + \rho g_r$ <p>θ-συνιστώσα:</p> $\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) =$ $= -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r}(r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} \right] + \rho g_\theta$ <p>z-συνιστώσα:</p> $\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) =$ $= -\frac{\partial p}{\partial z} + \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r \tau_{rz}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{zz}}{\partial z} \right] + \rho g_z$
--

Πίνακας 2.2: Οι εξισώσεις κίνησης σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

**Εξίσωση συνέχειας**

(α) Συμπιεστή ροή

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (\rho r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\rho u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} (\rho u_\phi) = 0$$

(β) Ασυμπιεστή ροή

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

**Εξίσωση διατήρησης της ορμής***r*-συνιστώσα:

$$\rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = -\frac{\partial p}{\partial r}$$

$$+ \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{rr}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{r\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{r\phi}}{\partial \phi} - \frac{\tau_{\theta\theta} + \tau_{\phi\phi}}{r} \right] + \rho g_r$$

*θ*-συνιστώσα:

$$\rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta}$$

$$+ \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\theta}) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (\tau_{\theta\theta} \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\theta}}{r} - \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\phi\phi} \right] + \rho g_\theta$$

*φ*-συνιστώσα:

$$\rho \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) =$$

$$= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \left[ \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 \tau_{r\phi}) + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta\phi}}{\partial \theta} + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \tau_{\phi\phi}}{\partial \phi} + \frac{\tau_{r\phi}}{r} + 2 \frac{\cot \theta}{r} \tau_{\theta\phi} \right] + \rho g_\phi$$

Πίνακας 2.3: Οι εξισώσεις κίνησης σε σφαιρικές συντεταγμένες.

των συνιστωσών της εξίσωσης διατήρησης της ορμής στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής, θα πρέπει να σημειωθεί ότι αυτές απλοποιούνται μερικώς μέσω της καταστατικής εξίσωσης (2.36).

#### Μόνιμες και χρονομεταβαλλόμενες ροές

Αν μια ροή δεν παρουσιάζει μεταβολές με την πάροδο του χρόνου, αν δηλαδή οι χρονικές παράγωγοι όλων των πεδίων που εμφανίζονται στις εξισώσεις κίνησης είναι μηδέν,

$$\frac{\partial \cdot}{\partial t} = 0,$$

λέμε ότι η ροή είναι σε **μόνιμη ή στάσιμη κατάσταση** (steady-state) ή ακόμα ότι η ροή είναι **μόνιμη ή στάσιμη** (steady flow). Διαφορετικά, αν δηλαδή κάποιο πεδίο εξαρτάται από τον χρόνο, λέμε ότι η ροή είναι **χρονομεταβαλλόμενη ή μη μόνιμη ή μη στάσιμη** (time-dependent or nonsteady or unsteady flow) ή **μεταβατική** (transient flow).

Στην περίπτωση μόνιμης ροής οι εξισώσεις συνέχειας και διατήρησης της ορμής απλοποιούνται στις

$$\nabla \cdot (\rho \mathbf{u}) = 0, \quad (2.38)$$

$$\rho \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.39)$$

#### Ανιζώδεις και ιζώδεις ροές

Σε αρκετές περιπτώσεις ροών αερίων, όπου οι ιζώδεις όροι είναι μικροί σε σχέση με τους **όρους αδράνειας** (inertia terms), δηλαδή τους όρους στο αριστερό μέλος της εξίσωσης διατήρησης της ορμής, μπορούμε να αμελήσουμε τη συνεισφορά του ταυυστή τάσεων  $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$ , θεωρώντας ότι το ιζώδες είναι πρακτικά μηδενικό. Σ' αυτή την περίπτωση η ροή καλείται **ανιζώδης ή μη ιζώδης** (inviscid or non-viscous flow) ή ακόμα **ιδανική ή τέλεια** (ideal or perfect flow). Διαφορετικά λέμε ότι η ροή είναι **ιζώδης** (viscous flow). Στην περίπτωση ανιζώδους ροής, η εξίσωση διατήρησης της ορμής ανάγεται στην εξίσωση Euler στην οποία έχουμε ήδη αναφερθεί.

Μια άλλη περίπτωση την οποία συναντούμε κυρίως σε υγρά και τήγματα, είναι όταν η ροή είναι πολύ αργή με αποτέλεσμα οι αδρανειακοί όροι να έχουν αμελητέα συνεισφορά σε σχέση με αυτήν του ολικού ταυυστή τάσεων. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι η ροή είναι **καθαρά ιζώδης** (purely viscous flow). Σε τόσο αργές ροές αμελούμε επίσης και την επιτάχυνση της βαρύτητας. Επειδή ακόμα αυτές οι ροές είναι συνήθως ασυμπίεστες, οι εξισώσεις συνέχειας και διατήρησης της ορμής απλοποιούνται στις

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (2.40)$$

$$-\nabla p + \nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}. \quad (2.41)$$

Μια καθαρά ιζώδης Νευτώνεια ροή καλείται επίσης και **ροή Stokes**.

Στα επόμενα κεφάλαια θα δούμε ότι αξιοσημείωτες απλοποιήσεις των εξισώσεων κίνησης μπορεί να γίνουν με την παραδοχή ότι μια ή δύο συνιστώσες της ταχύτητας είναι μηδέν (**μονοκατευθυντικές και δικατευθυντικές ροές**) και με την παραδοχή ότι οι μη μηδενικές συνιστώσες της ταχύτητας και η πίεση είναι συναρτήσεις μόνο μιας ή δύο χωρικών μεταβλητών (**μονοδιάστατες και διδιάστατες ροές**).

## 2.3 Οι εξισώσεις Navier-Stokes

Όπως ήδη αναφέραμε το σύστημα των εξισώσεων συνέχειας και διατήρησης της ορμής κλείνει με την **καταστατική εξίσωση** (constitutive equation) που είναι χαρακτηριστική για κάθε ρευστό. Η καταστατική εξίσωση εκφράζει τον ταυυστή ιζωδών τάσεων  $\boldsymbol{\tau}$  σαν συνάρτηση του ταυυστή ρυθμών παραμόρφωσης  $\mathbf{D}$ :

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\tau}, \mathbf{D}) = \mathbf{0}. \quad (2.42)$$

Η απλούστερη καταστατική εξίσωση είναι αυτή του **Νευτώνειου ρευστού**:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} + \left( \kappa - \frac{2}{3}\eta \right) \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}, \quad (2.43)$$

όπου  $\eta$  το **ιξώδες** (το οποίο είναι σταθερό),  $\kappa$  το **διασταλτικό ιξώδες** (dilatational viscosity) και  $\mathbf{I}$  ο μοναδιαίος ταυυστής. Το διασταλτικό ιξώδες είναι ταυτοτικά ίσο με μηδέν στην περίπτωση μονοατομικών αερίων με μικρή πυκνότητα. Στις περισσότερες εφαρμογές μπορεί να αμεληθεί, οπότε η καταστατική εξίσωση απλοποιείται στην:

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} - \frac{2}{3}\eta \nabla \cdot \mathbf{u} \mathbf{I}. \quad (2.44)$$

Αξίζει να σημειώσουμε ότι  $\nabla \cdot \mathbf{u} = \text{tr} \mathbf{D}$  οπότε οι εξισώσεις (2.43) και (2.44) είναι συμβιβαστές με τη γενική εξίσωση (2.42).

Στην περίπτωση ασυμπίεστης ροής ( $\nabla \cdot \mathbf{u} = 0$ ), η εξίσωση (2.43) απλοποιείται στην

$$\boldsymbol{\tau} = 2\eta \mathbf{D} = \eta [\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T] \quad (2.45)$$

ή σε συμβολισμό δεικτών:

$$\tau_{ij} = \eta \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right). \quad (2.46)$$

Οι συνιστώσες του ταυυστή ιξωδών τάσεων  $\boldsymbol{\tau}$  για ασυμπίεστη Νευτώνεια ροή σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες δίνονται στον Πίνακα 2.4.

Αποδεικνύεται εύκολα (άσκηση) ότι για ασυμπίεστη ροή ισχύει

$$\nabla \cdot \boldsymbol{\tau} = \eta \nabla^2 \mathbf{u}. \quad (2.47)$$

Αντικαθιστώντας τη Νευτώνεια καταστατική εξίσωση στην εξίσωση διατήρησης της ορμής παίρνουμε την περίφημη **εξίσωση Navier-Stokes**:

$$\rho \left( \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} \right) = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} + \rho \mathbf{g}. \quad (2.48)$$

Οι συνιστώσες της εξίσωσης Navier-Stokes σε καρτεσιανές, κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες δίνονται στους Πίνακες 2.5-2.7.

### Παράδειγμα 2.3.1

Βρείτε την  $x$ -συνιστώσα της εξίσωσης Navier-Stokes (σε καρτεσιανές συντεταγμένες) για ασυμπίεστη ροή.

Λύση:

Από τον Πίνακα 2.1, έχουμε:

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \left[ \frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} \right] + \rho g_x.$$

Αντικαθιστώντας τις τρεις συνιστώσες του ταυυστή τάσεων από τον Πίνακα 2.4,

$$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}, \quad \tau_{yx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right), \quad \tau_{zx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right),$$

παίρνουμε

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) =$$

Καρτεσιανές συντεταγμένες $(x, y, z)$	Κυλινδρικές συντεταγμένες $(r, \theta, z)$
$\tau_{xx} = 2\eta \frac{\partial u_x}{\partial x}$ $\tau_{yy} = 2\eta \frac{\partial u_y}{\partial y}$ $\tau_{zz} = 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z}$ $\tau_{xy} = \tau_{yx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right)$ $\tau_{xz} = \tau_{zx} = \eta \left( \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \right)$ $\tau_{yz} = \tau_{zy} = \eta \left( \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \right)$	$\tau_{rr} = 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r}$ $\tau_{\theta\theta} = 2\eta \left( \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right)$ $\tau_{zz} = 2\eta \frac{\partial u_z}{\partial z}$ $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$ $\tau_{rz} = \tau_{zr} = \eta \left[ \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{\partial u_r}{\partial z} \right]$ $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \eta \left[ \frac{\partial u_\theta}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} \right]$
Σφαιρικές συντεταγμένες $(r, \theta, \phi)$	
$\tau_{rr} = 2\eta \frac{\partial u_r}{\partial r}$ $\tau_{\theta\theta} = 2\eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r}{r} \right]$ $\tau_{\phi\phi} = 2\eta \left[ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_r}{r} + \frac{u_\theta \cot\theta}{r} \right]$ $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \eta \left[ r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\theta}{r} \right) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} \right]$ $\tau_{r\phi} = \tau_{\phi r} = \eta \left[ \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + r \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{u_\phi}{r} \right) \right]$ $\tau_{\theta\phi} = \tau_{\phi\theta} = \eta \left[ \frac{\sin\theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \frac{u_\theta}{\sin\theta} \right) + \frac{1}{r \sin\theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right]$	

Πίνακας 2.4: Συνιστώσες του τανυστή ιξωδών τάσεων  $\tau$  για ασυμπίεστη Νευτώνεια ροή σε διάφορα συστήματα συντεταγμένων.



$$\begin{aligned}
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( 2\frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z \partial x} \right) + \rho g_x \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x + \eta \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right).
\end{aligned}$$

Από την εξίσωση συνέχειας παρατηρούμε ότι ο τελευταίος όρος είναι ταυτοτικά ίσος με το μηδέν. Έτσι,

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x.$$

□

### Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

### Εξίσωση διατήρησης της ορμής

*x*-συνιστώσα

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) &= \\
&= -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x
\end{aligned}$$

*y*-συνιστώσα

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial u_y}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_y}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_y}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_y}{\partial z} \right) &= \\
&= -\frac{\partial p}{\partial y} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} \right) + \rho g_y
\end{aligned}$$

*z*-συνιστώσα

$$\begin{aligned}
\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_z}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_z}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) &= \\
&= -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right) + \rho g_z
\end{aligned}$$

Πίνακας 2.5: Οι εξισώσεις κίνησης για ασυμπίεστη Νευτώνεια ροή σε καρτεσιανές συντεταγμένες.

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$$

Εξίσωση διατήρησης της ορμής

$r$ -συνιστώσα

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta^2}{r} + u_z \frac{\partial u_r}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_r) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_r}{\partial \theta^2} - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_r}{\partial z^2} \right] + \rho g_r \end{aligned}$$

$\theta$ -συνιστώσα

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_r u_\theta}{r} + u_z \frac{\partial u_\theta}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[ \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(ru_\theta) \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial \theta^2} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial z^2} \right] + \rho g_\theta \end{aligned}$$

$z$ -συνιστώσα

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z \end{aligned}$$

Πίνακας 2.6: Οι εξισώσεις κίνησης για ασυμπίεστη Νευτώνεια ροή σε κυλινδρικές συντεταγμένες.

Εξίσωση συνέχειας

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 u_r) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (u_\theta \sin \theta) + \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} = 0$$

Εξίσωση διατήρησης της ορμής

*r*-συνιστώσα

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_r}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_r}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} - \frac{u_\theta^2 + u_\phi^2}{r} \right) = \\ = -\frac{\partial p}{\partial r} + \eta \left[ \nabla^2 u_r - \frac{2}{r^2} u_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} - \frac{2}{r^2} u_\theta \cot \theta - \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_r \end{aligned}$$

*θ*-συνιστώσα

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\theta}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\theta}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} + \frac{u_r u_\theta}{r} - \frac{u_\phi^2 \cot \theta}{r} \right) = \\ = -\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \eta \left[ \nabla^2 u_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u_r}{\partial \theta} - \frac{u_\theta}{r^2 \sin^2 \theta} - \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} \right] + \rho g_\theta \end{aligned}$$

*φ*-συνιστώσα

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial u_\phi}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_\phi}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_\phi}{\partial \theta} + \frac{u_\phi}{r \sin \theta} \frac{\partial u_\phi}{\partial \phi} + \frac{u_\phi u_r}{r} + \frac{u_\theta u_\phi}{r} \cot \theta \right) = \\ = -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial p}{\partial \phi} + \eta \left[ \nabla^2 u_\phi - \frac{u_\phi}{r^2 \sin^2 \theta} + \frac{2}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial u_r}{\partial \phi} + \frac{2 \cos \theta}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial u_\theta}{\partial \phi} \right] + \rho g_\phi \end{aligned}$$

όπου

$$\nabla^2 u_i = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial u_i}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin \theta \frac{\partial u_i}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 u_i}{\partial \phi^2}$$

Πίνακας 2.7: Οι εξισώσεις κίνησης για ασυμπίεστη Νευτώνεια ροή σε σφαιρικές συντεταγμένες.

## 2.4 Αδιαστατοποίηση των εξισώσεων κίνησης

Για την εισαγωγή του αναγνώστη στη διαστατική ανάλυση (dimensional analysis) θα θεωρήσουμε τις εξισώσεις κίνησης στην περίπτωση ασυμπίεστης Νευτώνειας ροής σε καρτεσιανές συντεταγμένες με τον άξονα των  $z$  να δείχνει προς τα πάνω:

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0 \quad (2.49)$$

και

$$\rho \frac{D\mathbf{u}}{Dt} = -\nabla p + \eta \nabla^2 \mathbf{u} - \rho g \mathbf{k} \quad (2.50)$$

Συνήθως σ' ένα πρόβλημα ροής υπάρχει ένα χαρακτηριστικό μήκος και μια χαρακτηριστική ταχύτητα τα οποία θα συμβολίσουμε με  $L_s$  και  $U_s$  αντίστοιχα. Μπορούμε τότε να ορίσουμε σαν χαρακτηριστικό χρόνο της ροής τον

$$t_s = \frac{L_s}{U_s} \quad (2.51)$$

Μπορούμε ακόμα να ορίσουμε σαν χαρακτηριστική πίεση (ή τάση) την

$$p_s = \frac{\eta U_s}{L_s} \quad (2.52)$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι τα  $t_s$  και  $p_s$  έχουν μονάδες χρόνου και πίεσης αντίστοιχα. Συνοψίζοντας, τα  $L_s$  και  $t_s$  είναι οι κλίμακες (scales) που θα χρησιμοποιήσουμε για να αδιαστατοποιήσουμε τις ανεξάρτητες μεταβλητές

$$\mathbf{r}^* = \frac{\mathbf{r}}{L_s} \iff x^* = \frac{x}{L_s}, \quad y^* = \frac{y}{L_s}, \quad z^* = \frac{z}{L_s} \quad (2.53)$$

και

$$t^* = \frac{t}{t_s} = \frac{t}{L_s/U_s} \quad (2.54)$$

όπου οι αστερίσκοι σημαίνουν ότι οι αντίστοιχες μεταβλητές είναι αδιάστατες. Ομοίως, οι  $U_s$  και  $p_s$  είναι οι κλίμακες για τις εξαρτημένες μεταβλητές:

$$\mathbf{u}^* = \frac{\mathbf{u}}{U_s} \quad (2.55)$$

και

$$p^* = \frac{p}{p_s} = \frac{p}{\eta U_s / L_s} \quad (2.56)$$

Παρατηρούμε επίσης ότι εκτός από τις ανεξάρτητες και τις εξαρτημένες μεταβλητές στις εξισώσεις (2.49) και (2.50) εμφανίζονται τρεις σταθερές παράμετροι: η πυκνότητα  $\rho$ , το ιξώδες  $\eta$  και η επιτάχυνση της βαρύτητας  $g$ .

Πριν αδιαστατοποιήσουμε τις εξισώσεις (2.49) και (2.50) θα αδιαστατοποιήσουμε για ευκολία τους τελεστές της κλίσης και της υλικής παραγώγου. Για τον πρώτο έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla &= \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z} \mathbf{k} = \frac{\partial}{\partial(x^* L_s)} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial(y^* L_s)} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial(z^* L_s)} \mathbf{k} = \frac{1}{L_s} \left( \frac{\partial}{\partial x^*} \mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y^*} \mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z^*} \mathbf{k} \right) \implies \\ &\nabla = \frac{1}{L_s} \nabla^* \end{aligned} \quad (2.57)$$

όπου  $\nabla^*$  ο αδιαστατοποιημένος τελεστής κλίσης. Ομοίως για τον τελεστή της υλικής παραγώγου έχουμε:

$$\begin{aligned} \frac{D}{Dt} &= \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial(t^* L_s / U_s)} + \mathbf{u}^* U_s \cdot \frac{1}{L_s} \nabla^* = \frac{U_s}{L_s} \left( \frac{\partial}{\partial t^*} + \mathbf{u}^* \cdot \nabla^* \right) \implies \\ \frac{D}{Dt} &= \frac{U_s}{L_s} \frac{D^*}{Dt^*} \end{aligned} \quad (2.58)$$

Για την εξίσωση συνέχειας τώρα βρίσκουμε:

$$0 = \nabla \cdot \mathbf{u} = \frac{1}{L_s} \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* U_s \implies \nabla^* \cdot \mathbf{u}^* = 0. \quad (2.59)$$

Η εξίσωση (2.59) είναι η αδιαστατοποιημένη εκδοχή της (2.49) με βάση τις κλίμακες που ορίσαμε πιο πάνω. Παρατηρούμε ότι δεν είχαμε καμία αλλαγή στη μορφή της εξίσωσης. Αυτό δεν ισχύει για την εξίσωση διατήρησης της ορμής:

$$\rho \frac{U_s}{L_s} \frac{D^* \mathbf{u}^*}{Dt^*} = -\frac{1}{L_s} \nabla^* \cdot (p^* \eta U_s / L_s) + \eta \frac{1}{L_s^2} \nabla^{*2} \mathbf{u}^* U_s - \rho g \mathbf{k} = \frac{\eta U_s}{L_s} (-\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{u}^*) - \rho g \mathbf{k} \implies \frac{\rho U_s L_s}{\eta} \frac{D^* \mathbf{u}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{u}^* - \frac{\rho g L_s^2}{\eta U_s} \mathbf{k}.$$

Ορίζουμε τώρα δύο **αδιάστατους αριθμούς** (dimensionless numbers), τον **αριθμό Reynolds**,

$$Re \equiv \frac{\rho U_s L_s}{\eta} \quad (2.60)$$

και τον **αριθμό Froude**,

$$Fr \equiv \frac{\rho g L_s^2}{\eta U_s} \quad (2.61)$$

οπότε παίρνουμε την πιο κάτω αδιαστατοποιημένη εκδοχή της εξίσωσης διατήρησης της ορμής:

$$Re \frac{D^* \mathbf{u}^*}{Dt^*} = -\nabla^* p^* + \nabla^{*2} \mathbf{u}^* - Fr \mathbf{k}. \quad (2.62)$$

Μετά την ολοκλήρωση της αδιαστατοποίησης οι αστερίσκοι συνήθως παραλείπονται για λόγους απλότητας.

Από τις αδιαστατοποιημένες μορφές των εξισώσεων διατήρησης παρατηρούμε ότι οι **παράγοντες κλίμακας** (scaling factors), δηλ. οι μεταβλητές που περιγράφουν το συνολικό μέγεθος και την ταχύτητα του συστήματος ροής καθώς και τις φυσικές ιδιότητες του ρευστού, συνοψίζονται σε δύο αδιάστατες ομάδες, τους αριθμούς Reynolds και Froude. Αν σε δυο συστήματα ροής οι παράγοντες κλίμακας είναι τέτοιοι ώστε οι δύο αυτοί αριθμοί να είναι ίσοι, τότε αμφότερα τα συστήματα ροής ικανοποιούν τις ίδιες αδιάστατες μερικές διαφορικές εξισώσεις. Αν επιπλέον, οι αδιάστατες αρχικές και συνοριακές συνθήκες είναι οι ίδιες (αυτό συμβαίνει μόνο αν τα δύο συστήματα είναι γεωμετρικά όμοια), τότε τα δύο συστήματα είναι από μαθηματική άποψη τα ίδια. Με διαφορετικά λόγια, τα αδιάστατα πεδία  $\mathbf{u}^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$  και  $p^*(x^*, y^*, z^*, t^*)$  στα δύο συστήματα ροής είναι τα ίδια. Τέτοια συστήματα καλούνται **δυναμικώς όμοια** (dynamically similar).

Θα πρέπει να επισημάνουμε ότι μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε διαφορετικό συνδυασμό κλιμάκων για να αδιαστατοποιήσουμε τις εξισώσεις κίνησης. Για παράδειγμα, μια χρονική κλίμακα που χρησιμοποιείται όταν δεν υπάρχει χαρακτηριστική ταχύτητα σ' ένα πρόβλημα ροής είναι η

$$t_s = \frac{\rho L_s^2}{\eta} = \frac{L_s^2}{\nu} \quad (2.63)$$

(ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει ότι η πιο πάνω παράσταση έχει μονάδες χρόνου). Ακόμα, συχνά χρησιμοποιούνται διαφορετικές κλίμακες μήκους για τις χωρικές ανεξάρτητες μεταβλητές. Για παράδειγμα αν έχουμε ροή σε μακρύ κυλινδρικό αγωγό ακτίνας  $R$  και μήκους  $L$ , τα  $r$  και  $z$  μπορούν να αδιαστατοποιηθούν ως εξής:

$$r^* = \frac{r}{R} \quad \text{και} \quad z^* = \frac{z}{L} \quad (2.64)$$

Σε μια τέτοια περίπτωση στις αδιαστατοποιημένες εξισώσεις θα εμφανιστεί ακόμα ένας αδιάστατος αριθμός, ο **λόγος μορφής** (aspect ratio):

$$\alpha \equiv \frac{R}{L} \quad (2.65)$$

## 2.5 Προβλήματα

1. Ναδειχθεί η ταυτότητα  $\nabla \cdot (\rho \mathbf{I}) = \nabla p$ .
2. Αποδείξτε την εξίσωση διατήρησης της ορμής με τη χρήση σταθερού όγκου ελέγχου.
3. Το σύμβολο μεταθέσεων ορίζεται ως εξής:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & ijk = 123, 231, 312 \\ -1 & ijk = 132, 213, 321 \\ 0 & \text{διαφορετικά} \end{cases} \quad (2.1)$$

και είναι χρήσιμο στον υπολογισμό οριζουσών. Για παράδειγμα για το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων  $\mathbf{u}$  και  $\mathbf{v}$  ισχύει

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} u_i v_j \mathbf{e}_k. \quad (2.2)$$

Ο **τανυστής μετάθεσης** είναι τανυστής 3ης τάξης και ορίζεται ως εξής:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 \sum_{k=1}^3 \epsilon_{ijk} \mathbf{e}_i \mathbf{e}_j \mathbf{e}_k. \quad (2.3)$$

- (α) Αν ο  $\mathbf{T}$  είναι τανυστής 2ης τάξης, να βρεθούν οι τρεις συνιστώσες του διανύσματος  $\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T}$ .
- (β) Αν  $\boldsymbol{\epsilon} : \mathbf{T} = \mathbf{0}$  δείξτε ότι ο  $\mathbf{T}$  είναι συμμετρικός.
4. Αδιαστατοποιήστε τις εξισώσεις Navier-Stokes και συνέχειας χρησιμοποιώντας τις πιο κάτω κλίμακες:

Για τα μήκη:	$l_s = L$ (χαρακτηριστικό μήκος)
Για τον χρόνο:	$t_s = \rho L^2 / \eta$
Για την $\mathbf{u}$ :	$U_s = \eta / (\rho L)$
Για την $p$ και τον $\boldsymbol{\tau}$ :	$p_s = \eta^2 / (\rho L^2)$

Πως ορίζονται με αυτή την αδιαστατοποίηση οι αριθμοί Reynolds και Froude;

**Σημείωση:** Η πιο πάνω αδιαστατοποίηση χρησιμοποιείται όταν στην ροή δεν υπάρχει *χαρακτηριστική ταχύτητα*.

## 2.6 Βιβλιογραφία

1. R.B. Bird, W.E. Stewart, and E.N. Lightfoot, *Transport Phenomena*, 2nd Ed., John Wiley, New York, 2002.
2. L.G. Leal, *Laminar Flow and Convective Transport Processes*, Butterworth-Heinemann, Boston, 1992.
3. Α.Θ. Παπαϊωάννου, *Μηχανική των Ρευστών*, Αθήνα, 1999.
4. T. Papanastasiou, G. Georgiou and A. Alexandrou, *Viscous Fluid Flow*, CRC Press, Boca Raton, 1999.



# Κεφάλαιο 3

## Μονοκατευθυντικές ροές με αναλυτική λύση



---

---

# Contents

<b>6</b>	<b>UNIDIRECTIONAL FLOWS</b>	<b>1</b>
6.1	Steady, One-Dimensional Rectilinear Flows	2
6.2	Steady, Axisymmetric Rectilinear Flows	19
6.3	Steady, Axisymmetric Torsional Flows	28
6.4	Steady, Axisymmetric Radial Flows	40
6.5	Steady, Spherically Symmetric Radial Flows	42
6.6	Transient One-Dimensional Unidirectional Flows	45
6.7	Steady Two-Dimensional Rectilinear Flows	65
6.8	Problems	74
6.9	References	81



# UNIDIRECTIONAL FLOWS

*Isothermal, laminar, incompressible Newtonian flow* is governed by a system of four scalar *partial differential equations* (PDEs); these are the continuity equation and the three components of the Navier-Stokes equation. The pressure and the three velocity components are the *primary unknowns*, which are, in general, functions of time and of spatial coordinates. This system of PDEs is amenable to analytical solution for limited classes of flow. Even in the case of relatively simple flows in regular geometries, the nonlinearities introduced by the convective terms rule out the possibility of finding analytical solutions. This explains the extensive use of numerical methods in Fluid Mechanics [1]. *Computational Fluid Dynamics (CFD)* is certainly the fastest growing branch of fluid mechanics, largely as a result of the increasing availability and power of computers, and the parallel advancement of versatile numerical techniques.

In this chapter, we study certain classes of incompressible flows, in which the Navier-Stokes equations are simplified significantly to lead to analytical solutions. These classes concern *unidirectional* flows, that is, flows which have only one nonzero velocity component,  $u_i$ . Hence, the number of the primary unknowns is reduced to two: the velocity component,  $u_i$ , and pressure,  $p$ . In many flows of interest, the PDEs corresponding to the two unknown fields are decoupled. As a result, one can first find  $u_i$ , by solving the corresponding component of the Navier-Stokes equation, and then calculate the pressure. Another consequence of the unidirectionality assumption, is that  $u_i$  is a function of at most two spatial variables and time. Therefore, in the worst case scenario of incompressible, unidirectional flow one has to solve a PDE with three independent variables, one of which is time.

The number of independent variables is reduced to two in

- (a) *transient one-dimensional* (1D) unidirectional flows in which  $u_i$  is a function of one spatial independent variable and time; and
- (b) *steady two-dimensional* (2D) unidirectional flows in which  $u_i$  is a function of two spatial independent variables.

The resulting PDEs in the above two cases can often be solved using various techniques, such as the *separation of variables* [2] and *similarity methods* [3].

In *steady, one-dimensional unidirectional flows*, the number of independent variables is reduced to one. In these flows, the governing equation for the nonzero velocity component is just a *linear, second-order ordinary differential equation (ODE)* which can be solved easily using well-known formulas and techniques. Such flows are studied in the first three sections of this chapter. In particular, in Sections 1 and 2, we study flows in which the streamlines are straight lines, i.e., one-dimensional *rectilinear flows* with  $u_x = u_x(y)$  and  $u_y = u_z = 0$  (Section 6.1), and *axisymmetric rectilinear flows* with  $u_z = u_z(r)$  and  $u_r = u_\theta = 0$  (Section 6.2). In Section 6.3, we study *axisymmetric torsional (or swirling) flows*, with  $u_\theta = u_\theta(r)$  and  $u_z = u_r = 0$ . In this case, the streamlines are circles centered at the axis of symmetry.

In Sections 6.4 and 6.5, we discuss briefly steady *radial flows*, with *axial* and *spherical symmetry*, respectively. An interesting feature of radial flows is that the nonzero radial velocity component,  $u_r = u_r(r)$ , is determined from the continuity equation rather than from the radial component of the Navier-Stokes equation. In Section 6.6, we study transient, one-dimensional unidirectional flows. Finally, in Section 6.7, we consider examples of steady, two-dimensional unidirectional flows.

Unidirectional flows, although simple, are important in a diversity of fluid transferring and processing applications. As demonstrated in examples in the following sections, once the velocity and the pressure are known, the nonzero components of the stress tensor, such as the shear stress, as well as other useful macroscopic quantities, such as the volumetric flow rate and the shear force (or *drag*) on solid boundaries in contact with the fluid, can be easily determined.

Let us point out that analytical solutions can also be found for a limited class of two-dimensional *almost unidirectional* or *bidirectional* flows by means of the *potential function* and/or the *stream function*, as demonstrated in Chapters 8 to 10. Approximate solutions for limiting values of the involved parameters can be constructed by *asymptotic* and *perturbation analyses*, which are the topics of Chapters 7 and 9, with the most profound examples being the *lubrication*, *thin-film*, and *boundary-layer* approximations.

## 6.1 Steady, One-Dimensional Rectilinear Flows

*Rectilinear* flows, i.e., flows in which the streamlines are straight lines, are usually described in Cartesian coordinates, with one of the axes being parallel to the flow direction. If the flow is axisymmetric, a cylindrical coordinate system with the z-axis

coinciding with the axis of symmetry of the flow is usually used.

Let us assume that a Cartesian coordinate system is chosen to describe a rectilinear flow, with the  $x$ -axis being parallel to the flow direction, as in Fig. 6.1, where the geometry of the flow in a channel of rectangular cross section is shown. Therefore,  $u_x$  is the only nonzero velocity component and

$$u_y = u_z = 0 . \quad (6.1)$$

From the continuity equation for incompressible flow,

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 ,$$

we find that

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 ,$$

which indicates that  $u_x$  does not change in the flow direction, i.e.,  $u_x$  is independent of  $x$ :

$$u_x = u_x(y, z, t) . \quad (6.2)$$

Flows satisfying Eqs. (6.1) and (6.2) are called *fully developed*. Flows in tubes of constant cross section, such as the one shown in Fig. 6.1, can be considered fully developed if the tube is *sufficiently long* so that entry and exit effects can be neglected.

Due to Eqs. (6.1) and (6.2), the x-momentum equation,

$$\rho \left( \frac{\partial u_x}{\partial t} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} + u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_z \frac{\partial u_x}{\partial z} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x ,$$

is reduced to

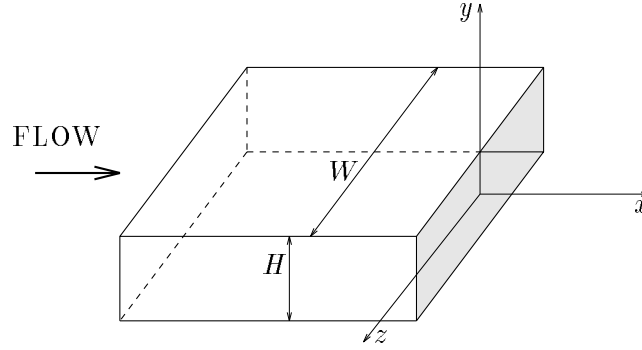
$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x . \quad (6.3)$$

If now the flow is steady, then the time derivative in the x-momentum equation is zero, and Eq. (6.3) becomes

$$- \frac{\partial p}{\partial x} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} \right) + \rho g_x = 0 . \quad (6.4)$$

The last equation which describes any steady, two-dimensional rectilinear flow in the  $x$ -direction is studied in Section 6.5. In many unidirectional flows, it can be assumed that

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} ,$$



**Figure 6.1.** Geometry of flow in a channel of rectangular cross section.

and  $u_x$  can be treated as a function of  $y$  alone, i.e.,

$$u_x = u_x(y). \quad (6.5)$$

With the latter assumption, the  $x$ -momentum equation is reduced to:

$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 u_x}{dy^2} + \rho g_x = 0. \quad (6.6)$$

The only nonzero component of the stress tensor is the shear stress  $\tau_{yx}$ ,

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du_x}{dy}, \quad (6.7)$$

in terms of which the  $x$ -momentum equation takes the form

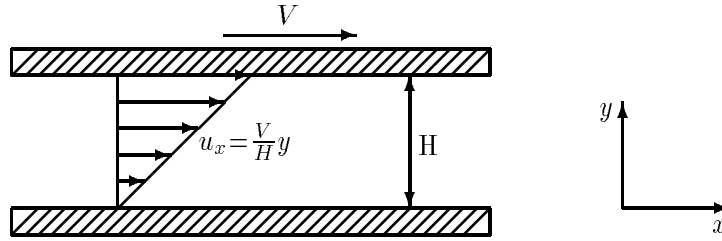
$$-\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{d\tau_{yx}}{dy} + \rho g_x = 0. \quad (6.8)$$

Equation (6.6) is a linear second-order ordinary differential equation and can be integrated directly if

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \text{const}. \quad (6.9)$$

Its general solution is given by

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y^2 + c_1 y + c_2. \quad (6.10)$$



**Figure 6.2.** *Plane Couette flow.*

Therefore, the velocity profile is a parabola and involves two constants,  $c_1$  and  $c_2$ , which are determined by applying appropriate boundary conditions for the particular flow. The shear stress,  $\tau_{yx} = \tau_{xy}$ , is linear, i.e.,

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du_x}{dy} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y + \eta c_1. \quad (6.11)$$

Note that the  $y$ - and  $z$ -momentum components do not involve the velocity  $u_x$ ; since  $u_y = u_z = 0$ , they degenerate to the hydrostatic pressure expressions

$$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0 \quad \text{and} \quad -\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0. \quad (6.12)$$

Integrating Eqs. (6.9) and (6.12), we obtain the following expression for the pressure:

$$p = \frac{\partial p}{\partial x} x + \rho g_y y + \rho g_z z + c, \quad (6.13)$$

where  $c$  is a constant of integration which may be evaluated in any particular flow problem by specifying the value of the pressure at a point.

In Table 6.1, we tabulate the assumptions, the governing equations, and the general solution for steady, one-dimensional rectilinear flows in Cartesian coordinates. Important flows in this category are:

1. *Plane Couette flow*, i.e., fully-developed flow between parallel flat plates of infinite dimensions, driven by the steady motion of one of the plates. (Such a flow is called *shear-driven flow*.) The geometry of this flow is depicted in Fig. 6.2, where the upper wall is moving with constant speed  $V$  (so that it remains in the same plane) while the lower one is fixed. The pressure gradient is zero everywhere and the gravity term is neglected. This flow is studied in Example 1.6.1.

Assumptions:	$u_y = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial x} = \text{const.}$
Continuity:	$\frac{\partial u_x}{\partial x} = 0 \quad \implies \quad u_x = u_x(y)$
$x$ -momentum:	$-\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{d^2 u_x}{dy^2} + \rho g_x = 0$
$y$ -momentum:	$-\frac{\partial p}{\partial y} + \rho g_y = 0$
$z$ -momentum:	$-\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g_z = 0$
<b><u>General solution:</u></b>	$u_x = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y^2 + c_1 y + c_2$ $\tau_{yx} = \tau_{xy} = \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y + \eta c_1$ $p = \frac{\partial p}{\partial x} x + \rho g_y y + \rho g_z z + c$

**Table 6.1.** *Governing equations and general solution for steady, one-dimensional rectilinear flows in Cartesian coordinates.*

2. *Fully-developed plane Poiseuille flow*, i.e., flow between parallel plates of infinite width and length, driven by a constant pressure gradient, imposed by a pushing or pulling device (a pump or vacuum, respectively), and/or gravity. This flow is an idealization of the flow in a channel of rectangular cross section, with the width  $W$  being much greater than the height  $H$  of the channel (see Fig. 6.1). Obviously, this idealization does not hold near the two lateral walls, where the flow is two-dimensional. The geometry of the plane Poiseuille flow is depicted in Fig. 6.4. This flow is studied in Examples 6.1.2 to 6.1.5, for



different boundary conditions.

3. *Thin film flow* down an inclined plane, driven by gravity (i.e., elevation differences), under the absence of surface tension. The pressure gradient is usually assumed to be everywhere zero. Such a flow is illustrated in Fig. 6.8, and is studied in Example 1.6.6.

All the above flows are rotational, with vorticity generation at the solid boundaries,

$$\boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}|_w = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ u_x & 0 & 0 \end{vmatrix}_w = - \left( \frac{\partial u_x}{\partial y} \right)_w \mathbf{k} \neq \mathbf{0} .$$

The vorticity diffuses away from the wall, and penetrates the main flow at a rate  $\nu(d^2u_x/dy^2)$ . The extensional stretching or compression along streamlines is zero, i.e.,

$$\dot{\epsilon} = \frac{\partial u_x}{\partial x} = 0$$

Material lines connecting two moving fluid particles traveling along different streamlines both rotate and stretch, where stretching is induced by rotation. However, the principal directions of strain rotate with respect to those of vorticity. Therefore, strain is relaxed, and the flow is weak.

### **Example 6.1.1. Plane Couette flow**

*Plane Couette flow*,<sup>1</sup> named after Couette who introduced it in 1890 to measure viscosity, is fully-developed flow induced between two infinite parallel plates, placed at a distance  $H$  apart, when one of them, say the upper one, is moving steadily with speed  $V$  relative to the other (Fig. 6.2). Assuming that the pressure gradient and the gravity in the  $x$ -direction are zero, the general solution for  $u_x$  is:

$$u_x = c_1 y + c_2 .$$

For the geometry depicted in Fig. 6.2, the boundary conditions are:

$$\begin{aligned} u_x = 0 & \quad \text{at} \quad y = 0 & \quad (\text{lower plate is stationary}); \\ u_x = V & \quad \text{at} \quad y = H & \quad (\text{upper plate is moving}). \end{aligned}$$

By means of the above two conditions, we find that  $c_2=0$  and  $c_1=V/H$ . Substituting the two constants into the general solution, yields

$$u_x = \frac{V}{H} y . \tag{6.14}$$

---

<sup>1</sup>Plane Couette flow is also known as *simple shear flow*.

The velocity  $u_x$  then varies linearly across the gap. The corresponding shear stress is constant,

$$\tau_{yx} = \eta \frac{V}{H}. \quad (6.15)$$

A number of macroscopic quantities, such as the volumetric flow rate and the shear stress at the wall, can be calculated. The volumetric flow rate per unit width is calculated by integrating  $u_x$  along the gap:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W} &= \int_0^H u_x dy = \int_0^H \frac{V}{H} y dy \quad \Rightarrow \\ \frac{Q}{W} &= \frac{1}{2} HV. \end{aligned} \quad (6.16)$$

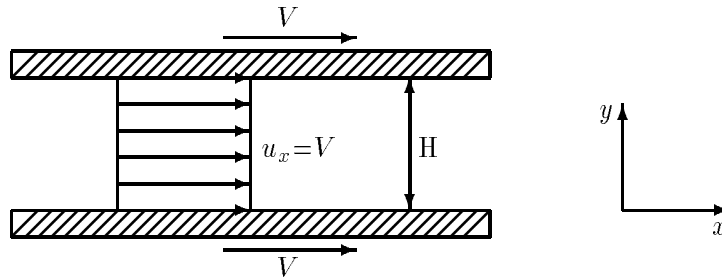
The shear stress  $\tau_w$  exerted by the fluid on the upper plate is

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H} = -\eta \frac{V}{H}. \quad (6.17)$$

The minus sign accounts for the upper wall facing the negative  $y$ -direction of the chosen system of coordinates. The shear force per unit width required to move the upper plate is then

$$\frac{F}{W} = -\int_0^L \tau_w dx = \eta \frac{V}{H} L,$$

where  $L$  is the length of the plate.



**Figure 6.3.** Plug flow.

Finally, let us consider the case where both plates move with the same speed  $V$ , as in Fig. 6.3. By invoking the boundary conditions

$$u_x(0) = u_x(H) = V,$$

we find that  $c_1=0$  and  $c_2=V$ , and, therefore,

$$u_x = V .$$

Thus, in this case, plane Couette flow degenerates into *plug flow*.  $\square$

### Example 6.1.2. Fully-developed plane Poiseuille flow

*Plane Poiseuille flow*, named after the channel experiments by Poiseuille in 1840, occurs when a liquid is forced between two stationary infinite flat plates, under constant pressure gradient  $\partial p/\partial x$  and zero gravity. The general steady-state solution is

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_1 y + c_2 \quad (6.18)$$

and

$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y + \eta c_1 . \quad (6.19)$$

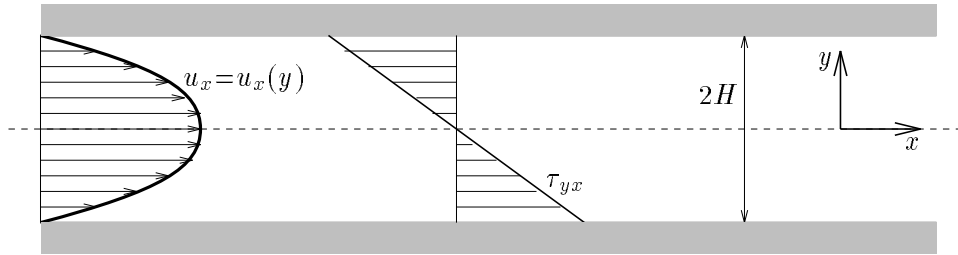


Figure 6.4. Plane Poiseuille flow.

By taking the origin of the Cartesian coordinates to be on the plane of symmetry of the flow, as in Fig. 6.4, and by assuming that the distance between the two plates is  $2H$ , the boundary conditions are:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} = \eta \frac{du_x}{dy} = 0 & \quad \text{at} \quad y = 0 \quad (\text{symmetry}); \\ u_x = 0 & \quad \text{at} \quad y = H \quad (\text{stationary plate}). \end{aligned}$$

Note that the condition  $u_x=0$  at  $y=-H$  may be used instead of any of the above conditions. By invoking the boundary conditions at  $y=0$  and  $H$ , we find that  $c_1=0$  and

$$c_2 = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 .$$

The two constants are substituted into the general solution to obtain the following parabolic velocity profile,

$$u_x = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2). \quad (6.20)$$

If the pressure gradient is negative, then the flow is in the positive direction, as in Fig. 6.4. Obviously, the velocity  $u_x$  attains its maximum value at the centerline ( $y=0$ ):

$$u_{x,max} = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^2.$$

The volumetric flow rate per unit width is

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W} &= \int_{-H}^H u_x dy = 2 \int_0^H -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2) dy \quad \Rightarrow \\ Q &= -\frac{2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 W. \end{aligned} \quad (6.21)$$

As expected, Eq. (6.21) indicates that the volumetric flow rate  $Q$  is proportional to the pressure gradient,  $\partial p/\partial x$ , and inversely proportional to the viscosity  $\eta$ . Note also that, since  $\partial p/\partial x$  is negative,  $Q$  is positive. The average velocity,  $\bar{u}_x$ , in the channel is:

$$\bar{u}_x = \frac{Q}{WH} = -\frac{2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^2.$$

The shear stress distribution is given by

$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y, \quad (6.22)$$

i.e.,  $\tau_{yx}$  varies linearly from  $y=0$  to  $H$ , being zero at the centerline and attaining its maximum absolute value at the wall. The shear stress exerted by the fluid on the wall at  $y=H$  is

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H} = -\frac{\partial p}{\partial x} H.$$

□

### **Example 6.1.3. Plane Poiseuille flow with slip**

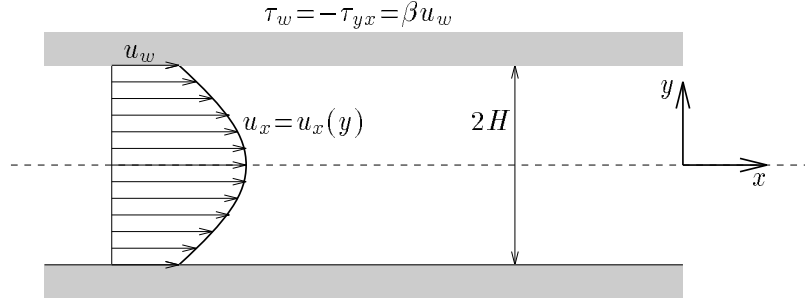
Consider again the fully-developed plane Poiseuille flow of the previous example, and assume that slip occurs along the two plates according to the slip law

$$\tau_w = \beta u_w \quad \text{at} \quad y = H,$$

where  $\beta$  is a material slip parameter,  $\tau_w$  is the shear stress exerted by the fluid on the plate,

$$\tau_w = -\tau_{yx}|_{y=H},$$

and  $u_w$  is the *slip velocity*. Calculate the velocity distribution and the volume flow rate per unit width.



**Figure 6.5.** Plane Poiseuille flow with slip.

*Solution:*

We first note that the flow is still symmetric with respect to the centerline. In this case, the boundary conditions are:

$$\begin{aligned} \tau_{yx} &= \eta \frac{du_x}{dy} = 0 & \text{at } y = 0, \\ \tau_w &= \beta u_w & \text{at } y = H. \end{aligned}$$

The condition at  $y=0$  yields  $c_1=0$ . Consequently,

$$u_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} y^2 + c_2,$$

and

$$\tau_{yx} = \frac{\partial p}{\partial x} y \quad \implies \quad \tau_w = -\frac{\partial p}{\partial x} H.$$

Applying the condition at  $y=H$ , we obtain

$$u_w = \frac{1}{\beta} \tau_w \quad \implies \quad u_x(H) = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H \quad \implies \quad \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 + c_2 = -\frac{1}{\beta} \frac{\partial p}{\partial x} H.$$

Consequently,

$$c_2 = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left( H^2 + \frac{2\eta H}{\beta} \right),$$

and

$$u_x = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \left( H^2 + \frac{2\eta H}{\beta} - y^2 \right). \quad (6.23)$$

Note that this expression reduces to the standard Poiseuille flow profile when  $\beta \rightarrow \infty$ . Since the slip velocity is inversely proportional to the slip coefficient  $\beta$ , the standard no-slip condition is recovered.

An alternative expression of the velocity distribution is

$$u_x = u_w - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2),$$

which indicates that  $u_x$  is just the superposition of the slip velocity  $u_w$  to the velocity distribution of the previous example.

For the volumetric flow rate per unit width, we obtain:

$$\begin{aligned} \frac{Q}{W} &= 2 \int_0^H u_x dy = 2u_w H - \frac{2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \quad \implies \\ Q &= -\frac{2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 \left( 1 + \frac{3\eta}{\beta H} \right) W. \end{aligned} \quad (6.24)$$

□

#### **Example 6.1.4. Plane Couette-Poiseuille flow**

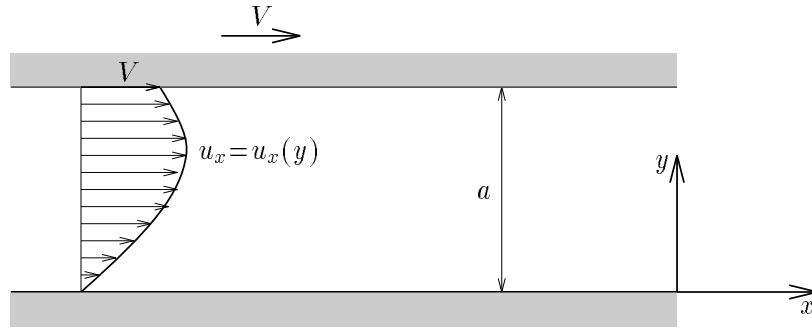
Consider again fully-developed plane Poiseuille flow with the upper plate moving with constant speed,  $V$  (Fig. 6.6). This flow is called *plane Couette-Poiseuille flow* or *general Couette flow*. In contrast to the previous two examples, this flow is not symmetric with respect to the centerline of the channel, and, therefore, having the origin of the Cartesian coordinates on the centerline is not convenient. Therefore, the origin is moved to the lower plate.

The boundary conditions for this flow are:

$$\begin{aligned} u_x &= 0 \quad \text{at} \quad y = 0, \\ u_x &= V \quad \text{at} \quad y = a, \end{aligned}$$

where  $a$  is the distance between the two plates. Applying the two conditions, we get  $c_2=0$  and

$$V = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} a^2 + c_1 a \quad \implies \quad c_1 = \frac{V}{a} - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} a,$$



**Figure 6.6.** *Plane Poiseuille flow with the upper plate moving with constant speed.*

respectively. Therefore,

$$u_x = \frac{V}{a}y - \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (ay - y^2). \quad (6.25)$$

The shear stress distribution is given by

$$\tau_{yx} = \eta \frac{V}{a} - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (a - 2y). \quad (6.26)$$

It is a simple exercise to show that Eq. (6.25) reduces to the standard Poiseuille velocity profile for stationary plates, given by Eq. (6.20). (Keep in mind that  $a=2H$  and that the  $y$ -axis has been translated by a distance  $H$ .) If instead, the pressure gradient is zero, the flow degenerates to the plane Couette flow studied in Example 1.6.1, and the velocity distribution is linear. Hence, the solution in Eq. (6.25) is the sum of the solutions to the above two separate flow problems. This superposition of solutions is a result of the linearity of the governing equation (6.6) and boundary conditions. Note also that Eq. (6.25) is valid not only when both the pressure gradient and the wall motion drive the fluid in the same direction, as in the present example, but also when they oppose each other. In the latter case, some reverse flow—in the negative  $x$  direction—can occur when  $\partial p/\partial x > 0$ .

Finally, let us find the point  $y^*$  where the velocity attains its maximum value. This point is a zero of the shear stress (or, equivalently, of the velocity derivative,  $du_x/dy$ ):

$$0 = \eta \frac{V}{a} - \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial x} (a - 2y^*) \quad \implies \quad y^* = \frac{a}{2} + \frac{\eta V}{a \left( \frac{\partial p}{\partial x} \right)}.$$

The flow is symmetric with respect to the centerline, if  $y^* = a/2$ , i.e., when  $V = 0$ . The maximum velocity  $u_{x,max}$  is determined by substituting  $y^*$  into Eq. (6.25).  $\square$

### Example 6.1.5. Poiseuille flow between inclined plates

Consider steady flow between two parallel inclined plates, driven by both constant pressure gradient and gravity. The distance between the two plates is  $2H$  and the chosen system of coordinates is shown in Fig. 6.7. The angle formed by the two plates and the horizontal direction is  $\theta$ .

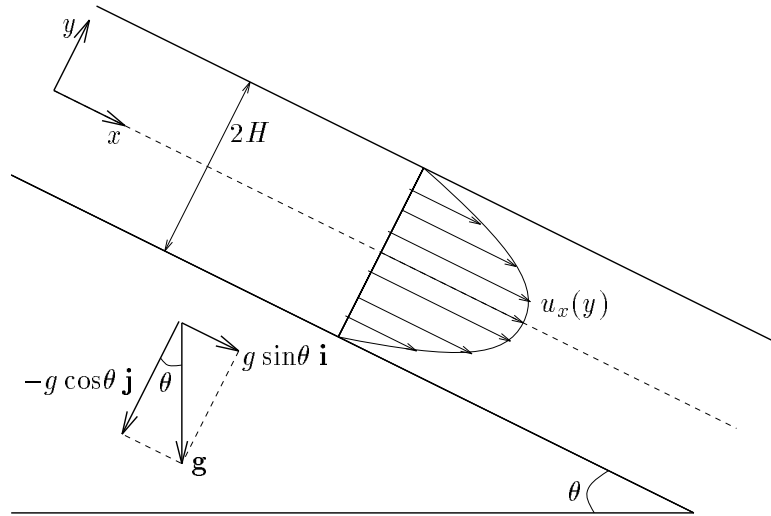


Figure 6.7. Poiseuille flow between inclined plates.

The general solution for  $u_x$  is given by Eq. (6.10):

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g_x \right) y^2 + c_1 y + c_2 .$$

Since,

$$g_x = g \sin \theta ,$$

we get

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial x} - \rho g \sin \theta \right) y^2 + c_1 y + c_2 .$$



Integration of this equation with respect to  $y$  and application of the boundary conditions,  $du_x/dy=0$  at  $y=0$  and  $u_x=0$  at  $y=H$ , give

$$u_x(y) = \frac{1}{2\eta} \left( -\frac{\partial p}{\partial x} + \rho g \sin\theta \right) (H^2 - y^2). \quad (6.27)$$

The pressure is obtained from Eq. (6.13) as

$$\begin{aligned} p &= \frac{\partial p}{\partial x} x + \rho g_y y + c \quad \implies \\ p &= \frac{\partial p}{\partial x} x + \rho g \cos\theta y + c \end{aligned} \quad (6.28)$$

□

### **Example 6.1.6. Thin film flow**

Consider a thin film of an incompressible Newtonian liquid flowing down an inclined plane (Fig. 6.8). The ambient air is assumed to be stationary, and, therefore, the flow is driven by gravity alone. Assuming that the surface tension of the liquid is negligible, and that the film is of uniform thickness  $\delta$ , calculate the velocity and the volumetric flow rate per unit width.

*Solution:*

The governing equation of the flow is

$$\eta \frac{d^2 u_x}{dy^2} + \rho g_x = 0 \quad \implies \quad \eta \frac{d^2 u_x}{dy^2} = -\rho g \sin\theta,$$

with general solution

$$u_x = -\frac{\rho g \sin\theta}{\eta} \frac{y^2}{2} + c_1 y + c_2.$$

As for the boundary conditions, we have no slip along the solid boundary,

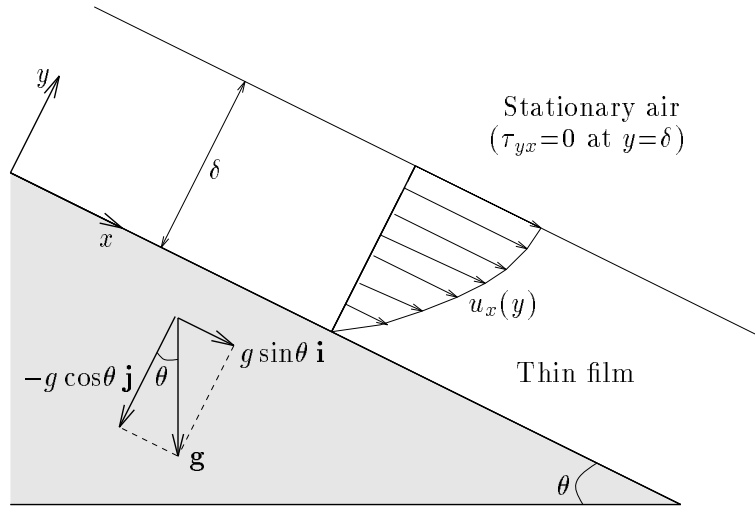
$$u_x = 0 \quad \text{at} \quad y = 0,$$

and no shearing at the free surface (the ambient air is stationary),

$$\tau_{yx} = \eta \frac{du_x}{dy} = 0 \quad \text{at} \quad y = \delta.$$

Applying the above two conditions, we find that  $c_2=0$  and  $c_1=\rho g \sin\theta/(\eta\delta)$ , and thus

$$u_x = \frac{\rho g \sin\theta}{\eta} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right). \quad (6.29)$$



**Figure 6.8.** *Film flow down an inclined plane.*

The velocity profile is semiparabolic, and attains its maximum value at the free surface,

$$u_{x,max} = u_x(\delta) = \frac{\rho g \sin\theta \delta^2}{2\eta}.$$

The volume flow rate per unit width is

$$\frac{Q}{W} = \int_0^\delta u_x dy = \frac{\rho g \sin\theta \delta^3}{3\eta}, \quad (6.30)$$

and the average velocity,  $\bar{u}_x$ , over a cross section of the film is given by

$$\bar{u}_x = \frac{Q}{W\delta} = \frac{\rho g \sin\theta \delta^2}{3\eta}.$$

Note that if the film is horizontal, then  $\sin\theta=0$  and  $u_x$  is zero, i.e., no flow occurs. If the film is vertical, then  $\sin\theta=1$ , and

$$u_x = \frac{\rho g}{\eta} \left( \delta y - \frac{y^2}{2} \right) \quad (6.31)$$

and

$$\frac{Q}{W} = \frac{\rho g \delta^3}{3\eta} . \quad (6.32)$$

By virtue of Eq. (6.13), the pressure is given by

$$p = \rho g_y y + c = -\rho g \cos\theta y + c .$$

At the free surface, the pressure must be equal to the atmospheric pressure,  $p_0$ , so

$$p_0 = -\rho g \cos\theta \delta + c$$

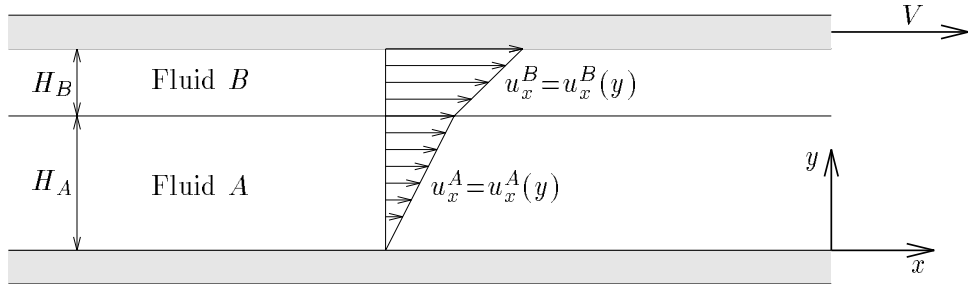
and

$$p = p_0 + \rho g (\delta - y) \cos\theta . \quad (6.33)$$

□

### **Example 6.1.7. Two-layer plane Couette flow**

Two immiscible incompressible liquids A and B of densities  $\rho_A$  and  $\rho_B$  ( $\rho_A > \rho_B$ ) and viscosities  $\eta_A$  and  $\eta_B$  flow between two parallel plates. The flow is induced by the motion of the upper plate which moves with speed  $V$ , while the lower plate is stationary (Fig. 6.9).



**Figure 6.9.** *Two-layer plane Couette flow.*

The velocity distributions in both layers obey Eq. (6.6) and are given by Eq. (6.10). Since the pressure gradient and gravity are both zero,

$$\begin{aligned} u_x^A &= c_1^A y + c_2^A, & 0 \leq y \leq H_A, \\ u_x^B &= c_1^B y + c_2^B, & H_A \leq y \leq H_A + H_B, \end{aligned}$$

where  $c_1^A$ ,  $c_2^A$ ,  $c_1^B$  and  $c_2^B$  are integration constants determined by conditions at the solid boundaries and the interface of the two layers. The no-slip boundary conditions at the two plates are applied first. At  $y=0$ ,  $u_x^A=0$ ; therefore,

$$c_2^A = 0 .$$

At  $y=H_A + H_B$ ,  $u_x^B=V$ ; therefore,

$$c_2^B = V - C_1^B (H_A + H_B) .$$

The two velocity distributions become

$$\begin{aligned} u_x^A &= c_1^A y , & 0 \leq y \leq H_A , \\ u_x^B &= V - c_1^B (H_A + H_B - y) , & H_A \leq y \leq H_A + H_B . \end{aligned}$$

At the interface ( $y=H_A$ ), we have two additional conditions:

(a) the velocity distribution is continuous, i.e.,

$$u_x^A = u_x^B \quad \text{at} \quad y = H_A ;$$

(b) momentum transfer through the interface is continuous, i.e.,

$$\begin{aligned} \tau_{yx}^A &= \tau_{yx}^B \quad \text{at} \quad y = H_A \quad \implies \\ \eta_A \frac{du_x^A}{dy} &= \eta_B \frac{du_x^B}{dy} \quad \text{at} \quad y = H_A . \end{aligned}$$

From the interface conditions, we find that

$$c_1^A = \frac{\eta_B V}{\eta_A H_B + \eta_B H_A} \quad \text{and} \quad c_1^B = \frac{\eta_A V}{\eta_A H_B + \eta_B H_A} .$$

Hence, the velocity profiles in the two layers are

$$u_x^A = \frac{\eta_B V}{\eta_A H_B + \eta_B H_A} y , \quad 0 \leq y \leq H_A , \quad (6.34)$$

$$u_x^B = V - \frac{\eta_A V}{\eta_A H_B + \eta_B H_A} (H_A + H_B - y) , \quad H_A \leq y \leq H_A + H_B . \quad (6.35)$$

If the two liquids are of the same viscosity,  $\eta_A=\eta_B=\eta$ , then the two velocity profiles are the same, and the results simplify to the linear velocity profile for one-layer Couette flow,

$$u_x^A = u_x^B = \frac{V}{H_A + H_B} y .$$

□

## 6.2 Steady, Axisymmetric Rectilinear Flows

*Axisymmetric flows* are conveniently studied in a cylindrical coordinate system,  $(r, \theta, z)$ , with the  $z$ -axis coinciding with the axis of symmetry of the flow. *Axisymmetry* means that there is no variation of the velocity with the angle  $\theta$ ,

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \theta} = \mathbf{0} . \quad (6.36)$$

There are three important classes of axisymmetric *unidirectional* flows (i.e., flows in which only one of the three velocity components,  $u_r$ ,  $u_\theta$  and  $u_z$ , is nonzero):

1. *Axisymmetric rectilinear flows*, in which only the axial velocity component,  $u_z$ , is nonzero. The streamlines are straight lines. Typical flows are fully-developed pressure-driven flows in cylindrical tubes and annuli, and open film flows down cylinders or conical pipes.
2. *Axisymmetric torsional flows*, in which only the azimuthal velocity component,  $u_\theta$ , is nonzero. The streamlines are circles centered on the axis of symmetry. These flows, studied in Section 6.3, are good prototypes of rigid-body rotation, flow in rotating mixing devices, and swirling flows, such as tornados.
3. *Axisymmetric radial flows*, in which only the radial velocity component,  $u_r$ , is nonzero. These flows, studied in Section 6.4, are typical models for radial flows through porous media, migration of oil towards drilling wells, and suction flows from porous pipes and annuli.

As already mentioned, in axisymmetric rectilinear flows,

$$u_r = u_\theta = 0 . \quad (6.37)$$

The continuity equation for incompressible flow,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 ,$$

becomes

$$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 .$$

From the above equation and the axisymmetry condition (6.36), we deduce that

$$u_z = u_z(r, t) . \quad (6.38)$$

Due to Eqs. (6.36)-(6.38), the  $z$ -momentum equation,

$$\rho \left( \frac{\partial u_z}{\partial t} + u_r \frac{\partial u_z}{\partial r} + \frac{u_\theta}{r} \frac{\partial u_z}{\partial \theta} + u_z \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left[ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} \right] + \rho g_z,$$

is simplified to

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho g_z. \quad (6.39)$$

For steady flow,  $u_z = u_z(r)$  and Eq. (6.39) becomes an ordinary differential equation,

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_z}{dr} \right) + \rho g_z = 0. \quad (6.40)$$

The only nonzero components of the stress tensor are the shear stresses  $\tau_{rz}$  and  $\tau_{zr}$ ,

$$\tau_{rz} = \tau_{zr} = \eta \frac{du_z}{dr}, \quad (6.41)$$

for which we have

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r \tau_{rz}) + \rho g_z = 0. \quad (6.42)$$

When the pressure gradient  $\partial p/\partial z$  is constant, the general solution of Eq. (6.39) is

$$u_z = \frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r^2 + c_1 \ln r + c_2. \quad (6.43)$$

For  $\tau_{rz}$ , we get

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r + \eta \frac{c_1}{r}. \quad (6.44)$$

The constants  $c_1$  and  $c_2$  are determined from the boundary conditions of the flow. The assumptions, the governing equations and the general solution for steady, axisymmetric rectilinear flows are summarized in Table 6.2.

### **Example 6.2.1. Hagen-Poiseuille flow**

*Fully-developed axisymmetric Poiseuille flow*, or *Hagen-Poiseuille flow*, studied experimentally by Hagen in 1839 and Poiseuille in 1840, is the pressure-driven flow in infinitely long cylindrical tubes. The geometry of the flow is shown in Fig. 6.10.

Assuming that gravity is zero, the general solution for  $u_z$  is

$$u_z = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + c_1 \ln r + c_2.$$

Assumptions:	$u_r = u_\theta = 0, \quad \frac{\partial u_z}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial z} = \text{const.}$
Continuity:	$\frac{\partial u_z}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad u_z = u_z(r)$
$z$ -momentum:	$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \left( r \frac{du_z}{dr} \right) + \rho g_z = 0$
$r$ -momentum:	$-\frac{\partial p}{\partial r} + \rho g_r = 0$
$\theta$ -momentum:	$-\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} + \rho g_\theta = 0$
<b>General solution:</b>	$u_z = \frac{1}{4\eta} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r^2 + c_1 \ln r + c_2$ $\tau_{rz} = \tau_{zr} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial p}{\partial z} - \rho g_z \right) r + \eta \frac{c_1}{r}$ $p = \frac{\partial p}{\partial z} z + c(r, \theta)$ <p>[ <math>c(r, \theta) = \text{const.}</math> when <math>g_r = g_\theta = 0</math> ]</p>

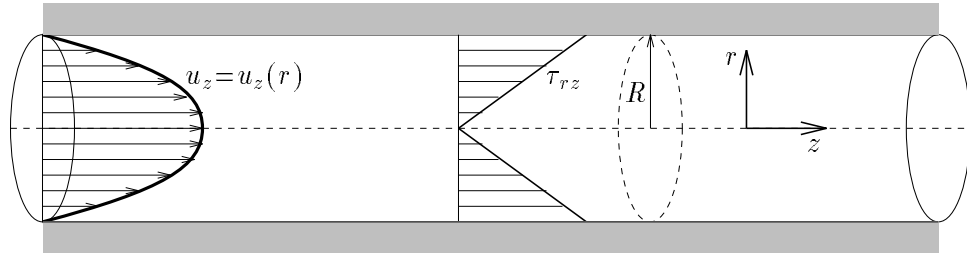
**Table 6.2.** *Governing equations and general solution for steady, axisymmetric rectilinear flows.*

The constants  $c_1$  and  $c_2$  are determined by the boundary conditions of the flow. Along the axis of symmetry, the velocity  $u_z$  must be finite,

$$u_z \text{ finite at } r = 0.$$

Since the wall of the tube is stationary,

$$u_z = 0 \quad \text{at} \quad r = R.$$



**Figure 6.10.** *Axisymmetric Poiseuille flow.*

By applying the two conditions, we get  $c_1=0$  and

$$c_2 = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2,$$

and, therefore,

$$u_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2), \quad (6.45)$$

which represents a parabolic velocity profile (Fig. 6.10). The shear stress varies linearly with  $r$ ,

$$\tau_{rz} = \frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} r,$$

and the shear stress exerted by the fluid on the wall is

$$\tau_w = -\tau_{rz}|_{r=R} = -\frac{1}{2} \frac{\partial p}{\partial z} R.$$

(Note that the contact area faces the negative  $r$ -direction.)

The maximum velocity occurs at  $r=0$ ,

$$u_{z,max} = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2.$$

For the volume flow rate, we get:

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R u_z 2\pi r dr = -\frac{\pi}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \int_0^R (R^2 - r^2)r dr \quad \implies \\ Q &= -\frac{\pi}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^4. \end{aligned} \quad (6.46)$$



Note that, since the pressure gradient  $\partial p/\partial z$  is negative,  $Q$  is positive. Equation (6.46) is the famous experimental result of Hagen and Poiseuille, also known as the *fourth-power law*. This basic equation is used to determine the viscosity from *capillary viscometer* data after taking into account the so-called *Bagley correction* for the inlet and exit pressure losses.

The average velocity,  $\bar{u}_z$ , in the tube is

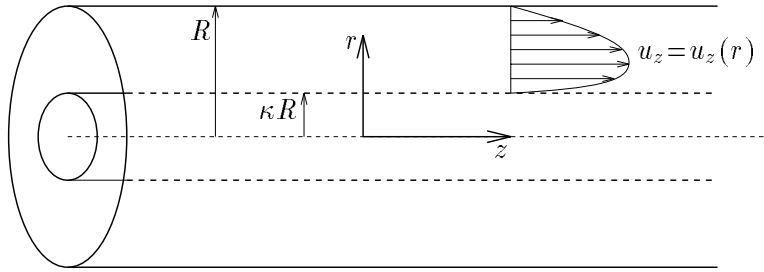
$$\bar{u}_z = \frac{Q}{\pi R^2} = -\frac{1}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 .$$

□

### **Example 6.2.2. Fully-developed flow in an annulus**

Consider fully-developed pressure-driven flow of a Newtonian liquid in a sufficiently long annulus of radii  $R$  and  $\kappa R$ , where  $\kappa < 1$  (Fig. 6.11). For zero gravity, the general solution for the axial velocity  $u_z$  is

$$u_z = \frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} r^2 + c_1 \ln r + c_2 .$$



**Figure 6.11.** Fully-developed flow in an annulus.

Applying the boundary conditions,

$$\begin{aligned} u_z &= 0 & \text{at} & \quad r = \kappa R , \\ u_z &= 0 & \text{at} & \quad r = R , \end{aligned}$$

we find that

$$c_1 = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)}$$

and

$$c_2 = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 - c_1 \ln R .$$

Substituting  $c_1$  and  $c_2$  into the general solution we obtain:

$$u_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \ln \frac{r}{R} \right] . \quad (6.47)$$

The shear stress is given by

$$\tau_{rz} = \frac{1}{4} \frac{\partial p}{\partial z} R \left[ 2 \left( \frac{r}{R} \right) - \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \left( \frac{R}{r} \right) \right] . \quad (6.48)$$

The maximum velocity occurs at the point where  $\tau_{rz}=0$  (which is equivalent to  $du_z/dr=0$ ), i.e., at

$$r^* = R \left[ \frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \right]^{1/2} .$$

Substituting into Eq. (6.47), we get

$$u_{z,max} = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left\{ 1 - \frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \left[ 1 - \ln \frac{1 - \kappa^2}{2 \ln(1/\kappa)} \right] \right\} .$$

For the volume flow rate, we have

$$\begin{aligned} Q &= \int_0^R u_z 2\pi r dr = -\frac{\pi}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \int_0^R \left[ 1 - \left( \frac{r}{R} \right)^2 + \frac{1 - \kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \ln \frac{r}{R} \right] r dr \quad \Rightarrow \\ Q &= -\frac{\pi}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^4 \left[ (1 - \kappa^4) - \frac{(1 - \kappa^2)^2}{\ln(1/\kappa)} \right] . \end{aligned} \quad (6.49)$$

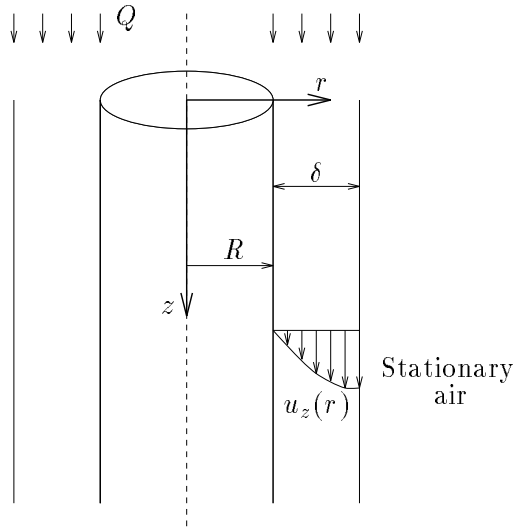
The average velocity,  $\bar{u}_z$ , in the annulus is

$$\bar{u}_z = \frac{Q}{\pi R^2 - \pi(\kappa R)^2} = -\frac{1}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ (1 + \kappa^2) - \frac{(1 - \kappa^2)}{\ln(1/\kappa)} \right] .$$

□

### **Example 6.2.3. Film flow down a vertical cylinder**

A Newtonian liquid is falling vertically on the outside surface of an infinitely long cylinder of radius  $R$ , in the form of a thin uniform axisymmetric film, in contact



**Figure 6.12.** *Thin film flow down a vertical cylinder.*

with stationary air (Fig. 6.12). If the volumetric flow rate of the film is  $Q$ , calculate its thickness  $\delta$ . Assume that the flow is steady, and that surface tension is zero.

*Solution:*

Equation (6.43) applies with  $\frac{\partial p}{\partial z}=0$ :

$$u_z = -\frac{1}{4\eta}\rho g_z r^2 + c_1 \ln r + c_2$$

Since the air is stationary, the shear stress on the free surface of the film is zero,

$$\tau_{rz} = \eta \frac{du_z}{dr} = 0 \quad \text{at} \quad r = R + \delta \quad \Rightarrow \quad c_1 = \rho g \frac{(R + \delta)^2}{2\eta}.$$

At  $r=R$ ,  $u_z=0$ ; consequently,

$$c_2 = \frac{1}{4\eta}\rho g R^2 - c_1 \ln R.$$

Substituting into the general solution, we get

$$u_z = \frac{1}{4\eta}\rho g \left[ R^2 - r^2 + 2(R + \delta)^2 \ln \frac{r}{R} \right]. \quad (6.50)$$

For the volume flow rate,  $Q$ , we have:

$$Q = \int_R^{R+\delta} u_z 2\pi r dr = \frac{\pi}{2\eta} \rho g \int_R^{R+\delta} \left[ R^2 - r^2 + 2(R + \delta)^2 \ln \frac{r}{R} \right] r dr .$$

After integration and some algebraic manipulations, we find that

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \rho g R^4 \left\{ 4 \left( 1 + \frac{\delta}{R} \right)^4 \ln \left( 1 + \frac{\delta}{R} \right) - \frac{\delta}{R} \left( 2 + \frac{\delta}{R} \right) \left[ 3 \left( 1 + \frac{\delta}{R} \right)^2 - 1 \right] \right\} . \quad (6.51)$$

When the annular film is very thin, it can be approximated as a thin planar film. We will show that this is indeed the case, by proving that for

$$\frac{\delta}{R} \ll 1 ,$$

Eq. (6.51) reduces to the expression found in Example 6.1.6 for a thin vertical planar film. Letting

$$\epsilon = \frac{\delta}{R}$$

leads to the following expression for  $Q$ ,

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \rho g R^4 \left\{ 4(1 + \epsilon)^4 \ln(1 + \epsilon) - \epsilon(2 + \epsilon) \left[ 3(1 + \epsilon)^2 - 1 \right] \right\} .$$

Expanding  $\ln(1 + \epsilon)$  into Taylor series, we get

$$\ln(1 + \epsilon) = \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{4} + O(\epsilon^5) .$$

Thus

$$\begin{aligned} (1 + \epsilon)^4 \ln(1 + \epsilon) &= (1 + 4\epsilon + 6\epsilon^2 + 4\epsilon^3 + \epsilon^4) \left[ \epsilon - \frac{\epsilon^2}{2} + \frac{\epsilon^3}{3} - \frac{\epsilon^4}{4} + O(\epsilon^5) \right] \\ &= \epsilon + \frac{7}{2}\epsilon^2 + \frac{13}{3}\epsilon^3 + \frac{25}{12}\epsilon^4 + O(\epsilon^5) \end{aligned}$$

Consequently,

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \rho g R^4 \left\{ 4 \left[ \epsilon + \frac{7}{2}\epsilon^2 + \frac{13}{3}\epsilon^3 + \frac{25}{12}\epsilon^4 + O(\epsilon^5) \right] - (4\epsilon + 14\epsilon^2 + 12\epsilon^3 + 3\epsilon^4) \right\} ,$$

or

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \rho g R^4 \left[ \frac{16}{3}\epsilon^3 - \frac{11}{12}\epsilon^4 + O(\epsilon^5) \right] .$$

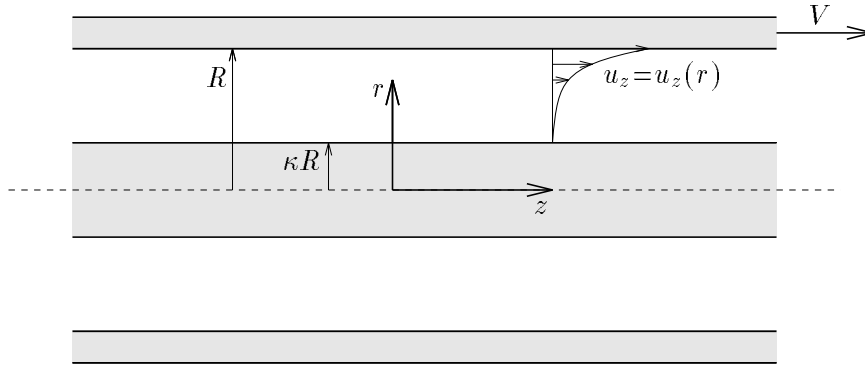
Keeping only the third-order term, we get

$$Q = \frac{\pi}{8\eta} \rho g R^4 \frac{16}{3} \left(\frac{\delta}{R}\right)^3 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q}{2\pi R} = \frac{\rho g \delta^3}{3\eta}.$$

By setting  $2\pi R$  equal to  $W$ , the last equation becomes identical to Eq. (6.32).  $\square$

**Example 6.2.4. Annular flow with the outer cylinder moving**

Consider fully-developed flow of a Newtonian liquid between two coaxial cylinders of infinite length and radii  $R$  and  $\kappa R$ , where  $\kappa < 1$ . The outer cylinder is steadily translated parallel to its axis with speed  $V$ , whereas the inner cylinder is fixed (Fig. 6.13). For this problem, the pressure gradient and gravity are assumed to be negligible.



**Figure 6.13.** Flow in an annulus driven by the motion of the outer cylinder.

The general solution for the axial velocity  $u_z$  takes the form

$$u_z = c_1 \ln r + c_2.$$

For  $r = \kappa R$ ,  $u_z = 0$ , and for  $r = R$ ,  $u_z = V$ . Consequently,

$$c_1 = \frac{V}{\ln(1/\kappa)} \quad \text{and} \quad c_2 = -V \frac{\ln(\kappa R)}{\ln(1/\kappa)}.$$

Therefore, the velocity distribution is given by

$$u_z = V \frac{\ln\left(\frac{r}{\kappa R}\right)}{\ln(1/\kappa)}. \quad (6.52)$$

Let us now examine two limiting cases of this flow.

(a) For  $\kappa \rightarrow 0$ , the annular flow degenerates to flow in a tube. From Eq. (6.52), we have

$$u_z = \lim_{\kappa \rightarrow 0} V \frac{\ln\left(\frac{r}{\kappa R}\right)}{\ln(1/\kappa)} = V \lim_{\kappa \rightarrow 0} \left[1 + \frac{\ln \frac{r}{R}}{\ln(1/\kappa)}\right] = V.$$

In other words, we have plug flow (solid-body translation) in a tube.

(b) For  $\kappa \rightarrow 1$ , the annular flow is approximately a plane Couette flow. To demonstrate this, let

$$\epsilon = \frac{1}{\kappa} - 1 = \frac{1 - \kappa}{\kappa}$$

and

$$\Delta R = R - \kappa R = (1 - \kappa)R \quad \implies \quad \kappa R = \frac{\Delta R}{\epsilon}.$$

Introducing Cartesian coordinates,  $(y, z)$ , with the origin on the surface of the inner cylinder, we have

$$y = r - \kappa R \quad \implies \quad \frac{r}{\kappa R} = 1 + \epsilon \frac{y}{\Delta R}.$$

Substituting into Eq. (6.52), we get

$$u_z = V \frac{\ln\left(1 + \epsilon \frac{y}{\Delta R}\right)}{\ln(1 + \epsilon)}. \quad (6.53)$$

Using L'Hôpital's rule, we find that

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} V \frac{\ln\left(1 + \epsilon \frac{y}{\Delta R}\right)}{\ln(1 + \epsilon)} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} V \frac{y}{\Delta R} \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon \frac{y}{\Delta R}} = V \frac{y}{\Delta R}.$$

Therefore, for small values of  $\epsilon$ , that is for  $\kappa \rightarrow 1$ , we obtain a linear velocity distribution which corresponds to plane Couette flow between plates separated by a distance  $\Delta R$ .  $\square$

### 6.3 Steady, Axisymmetric Torsional Flows

In axisymmetric torsional flows, also referred to as *swirling flows*,

$$u_r = u_z = 0, \quad (6.54)$$

and the streamlines are circles centered at the axis of symmetry. Such flows usually occur when rigid cylindrical boundaries (concentric to the symmetry axis of the

flow) are rotating about their axis. Due to the axisymmetry condition,  $\partial u_\theta / \partial \theta = 0$ , the continuity equation for incompressible flow,

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_r) + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0,$$

is automatically satisfied.

Assuming that the gravitational acceleration is parallel to the symmetry axis of the flow,

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z, \quad (6.55)$$

the  $r$ - and  $z$ -momentum equations are simplified as follows,

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r}, \quad (6.56)$$

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0. \quad (6.57)$$

Equation (6.56) suggests that the centrifugal force on an element of fluid balances the force produced by the radial pressure gradient. Equation (6.57) represents the standard hydrostatic expression. Note also that Eq. (6.56) provides an example in which the nonlinear convective terms are not vanishing. In the present case, however, this nonlinearity poses no difficulties in obtaining the analytical solution for  $u_\theta$ . As explained below,  $u_\theta$  is determined from the  $\theta$ -momentum equation which is decoupled from Eq. (6.56).

By assuming that

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$$

and by integrating Eq. (6.57), we get

$$p = -\rho g z + c(r, t);$$

consequently,  $\partial p / \partial r$  is not a function of  $z$ . Then, from Eq. (6.56) we deduce that

$$u_\theta = u_\theta(r, t). \quad (6.58)$$

Due to the above assumptions, the  $\theta$ -momentum equation reduces to

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}(r u_\theta) \right). \quad (6.59)$$

For steady flow, we obtain the linear ordinary differential equation

$$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr}(r u_\theta) \right) = 0, \quad (6.60)$$

the general solution of which is

$$u_\theta = c_1 r + \frac{c_2}{r}. \quad (6.61)$$

The constants  $c_1$  and  $c_2$  are determined from the boundary conditions of the flow.

Assumptions:	$u_r = u_z = 0, \quad \frac{\partial u_\theta}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad \mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$
Continuity:	Satisfied identically
$\theta$ -momentum:	$\frac{d}{dr} \left( \frac{1}{r} \frac{d}{dr} (r u_\theta) \right) = 0$
$z$ -momentum:	$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$
$r$ -momentum:	$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r} \implies u_\theta = u_\theta(r)$
<b>General solution:</b>	$u_\theta = c_1 r + \frac{c_2}{r}$ $\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = -2\eta \frac{c_2}{r^2}$ $p = \rho \left( \frac{c_1^2 r^2}{2} + 2c_1 c_2 \ln r - \frac{c_2^2}{2r^2} \right) - \rho g z + c$

**Table 6.3.** Governing equations and general solution for steady, axisymmetric torsional flows.

The pressure distribution is determined by integrating Eqs. (6.56) and (6.57):

$$p = \int \frac{u_\theta^2}{r} dr - \rho g z \implies$$



$$p = \rho \left( \frac{c_1^2 r^2}{2} + 2c_1 c_2 \ln r - \frac{c_2^2}{2r^2} \right) - \rho g z + c, \quad (6.62)$$

where  $c$  is a constant of integration, evaluated in any particular problem by specifying the value of the pressure at a reference point.

Note that, under the above assumptions, the only nonzero components of the stress tensor are the shear stresses,

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta r} = \eta r \frac{d}{dr} \left( \frac{u_\theta}{r} \right), \quad (6.63)$$

in terms of which the  $\theta$ -momentum equation takes the form

$$\frac{d}{dr}(r^2 \tau_{r\theta}) = 0. \quad (6.64)$$

The general solution for  $\tau_{r\theta}$  is

$$\tau_{r\theta} = -2\eta \frac{c_2}{r^2}. \quad (6.65)$$

The assumptions, the governing equations and the general solution for steady, axisymmetric torsional flows are summarized in Table 6.3.

### **Example 6.3.1. Steady flow between rotating cylinders**

The flow between rotating coaxial cylinders is known as the *circular Couette flow*, and is the basis for Couette rotational-type viscometers. Consider the steady flow of an incompressible Newtonian liquid between two vertical coaxial cylinders of infinite length and radii  $R_1$  and  $R_2$ , respectively, occurring when the two cylinders are rotating about their common axis with angular velocities  $\Omega_1$  and  $\Omega_2$ , in the absence of gravity (Fig. 6.14).<sup>2</sup>

The general form of the angular velocity  $u_\theta$  is given by Eq. (6.61),

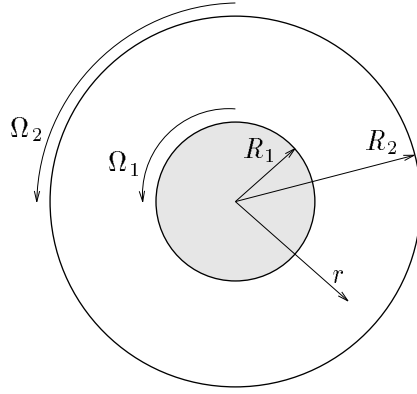
$$u_\theta = c_1 r + \frac{c_2}{r}.$$

The boundary conditions,

$$\begin{aligned} u_\theta &= \Omega_1 R_1 & \text{at} & \quad r = R_1, \\ u_\theta &= \Omega_2 R_2 & \text{at} & \quad r = R_2, \end{aligned}$$

---

<sup>2</sup>The time-dependent flow between rotating cylinders is much more interesting, especially the manner in which it destabilizes for large values of  $\Omega_1$ , leading to the generation of axisymmetric *Taylor vortices* [4].



**Figure 6.14.** *Geometry of circular Couette flow.*

result in

$$c_1 = \frac{R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1}{R_2^2 - R_1^2} \quad \text{and} \quad c_2 = -\frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} (\Omega_2 - \Omega_1).$$

Therefore,

$$u_\theta = \frac{1}{R_2^2 - R_1^2} \left[ (R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1) r - R_1^2 R_2^2 (\Omega_2 - \Omega_1) \frac{1}{r} \right]. \quad (6.66)$$

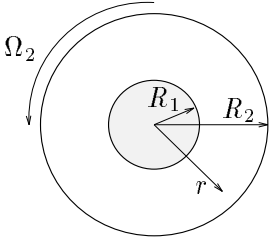
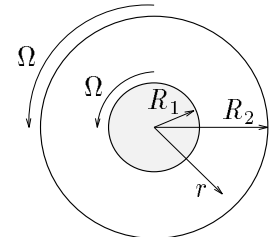
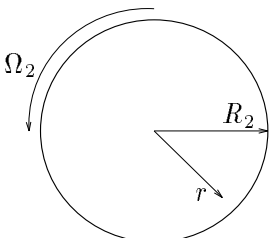
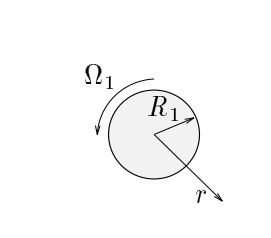
Note that the viscosity does not appear in Eq. (6.66), because shearing between adjacent cylindrical shells of fluid is zero. This observation is analogous to that made for the plane Couette flow [Eq. (6.14)]. Also, from Eqs. (6.62) and (6.65), we get

$$p = \rho \frac{1}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[ \frac{1}{2} (R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1)^2 r^2 + 2 R_1^2 R_2^2 (R_2^2 \Omega_2 - R_1^2 \Omega_1) (\Omega_2 - \Omega_1) \ln r - \frac{1}{2} R_1^4 R_2^4 (\Omega_2 - \Omega_1)^2 \frac{1}{r^2} \right] + c, \quad (6.67)$$

and

$$\tau_{r\theta} = 2\eta \frac{R_1^2 R_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} (\Omega_2 - \Omega_1) \frac{1}{r^2}. \quad (6.68)$$

Let us now examine the four special cases of flow between rotating cylinders, illustrated in Fig. 6.15.

	<p>(a) The inner cylinder is fixed (<math>\Omega_1=0</math>)</p> $u_\theta = \frac{R_2^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right)$ <p>For <math>p</math>, see Eq. (6.70)</p>
	<p>(b) <math>\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega</math></p> $u_\theta = \Omega r$ $p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + c$ <p>(Rigid-body rotation)</p>
	<p>(c) No inner cylinder</p> $u_\theta = \Omega_2 r$ $p = \frac{1}{2} \rho \Omega_2^2 r^2 + c$ <p>(Rigid-body rotation)</p>
	<p>(d) No outer cylinder</p> $u_\theta = R_1^2 \Omega_1 \frac{1}{r}$ $p = -\frac{1}{2} \rho R_1^4 \Omega_1^2 \frac{1}{r^2} + c$

**Figure 6.15.** Different cases of flow between rotating vertical coaxial cylinders of infinite height.

(a) The inner cylinder is fixed, i.e.,  $\Omega_1=0$ . In this case,

$$u_\theta = \frac{R_2^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \left( r - \frac{R_1^2}{r} \right) \quad (6.69)$$

and

$$p = \rho \frac{R_2^4 \Omega_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left( \frac{r^2}{2} + 2R_1^2 \ln r - \frac{R_1^4}{2r^2} \right) + c. \quad (6.70)$$

The constant  $c$  can be determined by setting  $p=p_0$  at  $r=R_1$ ; accordingly,

$$p = \rho \frac{R_2^4 \Omega_2^2}{(R_2^2 - R_1^2)^2} \left[ \frac{r^2 - R_1^2}{2} + 2R_1^2 \ln \frac{r}{R_1} - \frac{R_1^4}{2} \left( \frac{1}{r^2} - \frac{1}{R_1^2} \right) \right] + p_0. \quad (6.71)$$

For the shear stress,  $\tau_{r\theta}$ , we get

$$\tau_{r\theta} = 2\eta \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega_2 \frac{1}{r^2}. \quad (6.72)$$

The shear stress exerted by the liquid to the outer cylinder is

$$\tau_w = -\tau_{r\theta}|_{r=R_2} = -2\eta \frac{R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega_2. \quad (6.73)$$

In viscosity measurements, one measures the torque  $T$  per unit height  $L$ , at the outer cylinder,

$$\begin{aligned} \frac{T}{L} &= 2\pi R_2^2 (-\tau_w) \implies \\ \frac{T}{L} &= 4\pi\eta \frac{R_1^2 R_2^2}{R_2^2 - R_1^2} \Omega_2. \end{aligned} \quad (6.74)$$

The unknown viscosity of a liquid can be determined using the above relation.

When the gap between the two cylinders is very small, circular Couette flow can be approximated as a plane Couette flow. Indeed, letting  $r=R_1+\Delta r$ , we get from Eq. (6.69)

$$u_\theta = \frac{R_2^2 \Omega_2}{R_2^2 - R_1^2} \frac{2 + \frac{\Delta r}{R_1}}{1 + \frac{\Delta r}{R_1}} \Delta r.$$

When  $R_1 \rightarrow R_2$ ,  $\Delta r/R_1 \ll 1$  and, therefore,

$$u_\theta = \frac{R_2 \Omega_2}{2(R_2 - R_1)} 2\Delta r = \frac{R_2 \Omega_2}{R_2 - R_1} \Delta r,$$

which is a linear velocity distribution corresponding to plane Couette flow between plates separated by a distance  $R_2 - R_1$ , with the upper plate moving with velocity  $R_2 \Omega_2$ .

(b) The two cylinders rotate with the same angular velocity, i.e.,

$$\Omega_1 = \Omega_2 = \Omega .$$

In this case,  $c_1 = \Omega$  and  $c_2 = 0$ . Consequently,

$$u_\theta = \Omega r , \quad (6.75)$$

which corresponds to rigid-body rotation. This is also indicated by the zero tangential stress,

$$\tau_{r\theta} = -2\eta \frac{c_2}{r^2} = 0 .$$

For the pressure, we get

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + c . \quad (6.76)$$

(c) The inner cylinder is removed. In this case,  $c_1 = \Omega_2$  and  $c_2 = 0$ , since  $u_\theta$  (and  $\tau_{r\theta}$ ) are finite at  $r=0$ . This flow is the limiting case of the previous one for  $R_1 \rightarrow 0$ ,

$$u_\theta = \Omega_2 r , \quad \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{and} \quad p = \frac{1}{2} \rho \Omega_2^2 r^2 + c .$$

(d) The outer cylinder is removed, i.e., the inner cylinder is rotating in an infinite pool of liquid. In this case,  $u_\theta \rightarrow 0$  as  $r \rightarrow \infty$ , and, therefore,  $c_1 = 0$ . At  $r = R_1$ ,  $u_\theta = \Omega_1 R_1$  which gives

$$c_2 = R_1^2 \Omega_1 .$$

Consequently,

$$u_\theta = R_1^2 \Omega_1 \frac{1}{r} , \quad (6.77)$$

$$\tau_{r\theta} = -2\eta R_1^2 \Omega_1 \frac{1}{r^2} , \quad (6.78)$$

and

$$p = -\frac{1}{2} \rho R_1^4 \Omega_1^2 \frac{1}{r^2} + c . \quad (6.79)$$

The shear stress exerted by the liquid to the cylinder is

$$\tau_w = \tau_{r\theta}|_{r=R_1} = -2\eta \Omega_1 . \quad (6.80)$$

The torque per unit height required to rotate the cylinder is

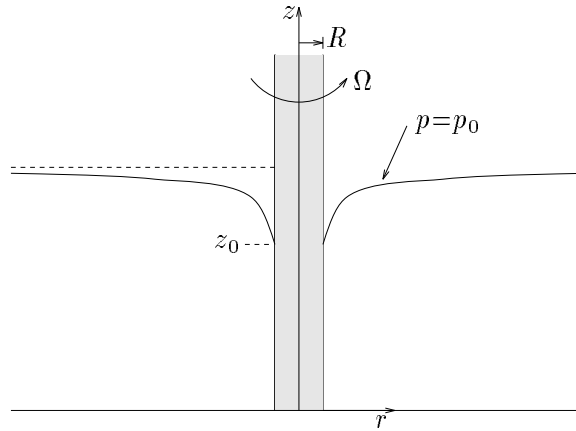
$$\frac{T}{L} = 2\pi R_1^2 (-\tau_w) = 4\pi\eta R_1^2 \Omega_1. \quad (6.81)$$

□

In the previous example, we studied flows between vertical coaxial cylinders of infinite height ignoring the gravitational acceleration. As indicated by Eq. (6.62), gravity has no influence on the velocity and affects only the pressure. In case of rotating liquids with a free surface, the gravity term should be included if the top part of the flow and the shape of the free surface were of interest. If surface tension effects are neglected, the pressure on the free surface is constant. Therefore, the locus of the free surface can be determined using Eq. (6.62).

### Example 6.3.2. Shape of free surface in torsional flows

In this example, we study two different torsional flows with a free surface. First, we consider steady flow of a liquid contained in a large cylindrical container and agitated by a vertical rod of radius  $R$  that is coaxial to the container and rotates at angular velocity  $\Omega$ . If the radius of the container is much larger than  $R$ , one may assume that the rod rotates in an infinite pool of liquid (Fig. 6.16).



**Figure 6.16.** Rotating rod in a pool of liquid.

From the results of Example 6.3.1, we have  $c_1=0$  and  $c_2=\Omega R$ . Therefore,

$$u_\theta = R^2 \Omega \frac{1}{r}$$

and

$$p = -\frac{1}{2} \rho R^4 \Omega^2 \frac{1}{r^2} - \rho g z + c .$$

With the surface tension effects neglected, the pressure on the free surface is equal to the atmospheric pressure,  $p_0$ . To determine the constant  $c$ , we assume that the free surface contacts the rod at  $z=z_0$ . Thus, we obtain

$$c = p_0 + \frac{1}{2} \rho R^4 \Omega^2 \frac{1}{R^2} + \rho g z_0$$

and

$$p = \frac{1}{2} \rho R^4 \Omega^2 \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \rho g (z - z_0) + p_0 . \quad (6.82)$$

Since the pressure is constant along the free surface, the equation of the latter is

$$\begin{aligned} 0 = p - p_0 &= \frac{1}{2} \rho R^4 \Omega^2 \left( \frac{1}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) - \rho g (z - z_0) \implies \\ z &= z_0 + \frac{R^2 \Omega^2}{2g} \left( 1 - \frac{R^2}{r^2} \right) . \end{aligned} \quad (6.83)$$

The elevation of the free surface increases with the radial distance  $r$  and approaches asymptotically the value

$$z_\infty = z_0 + \frac{R^2 \Omega^2}{2g} .$$

This flow behavior, known as *rod dipping*, is a characteristic of generalized-Newtonian liquids, whereas viscoelastic liquids exhibit *rod climbing* (i.e., they climb the rotating rod) [5].

Consider now steady flow of a liquid contained in a cylindrical container of radius  $R$  rotating at angular velocity  $\Omega$  (Fig. 6.17). From Example 6.3.1, we know that this flow corresponds to rigid-body rotation, i.e.,

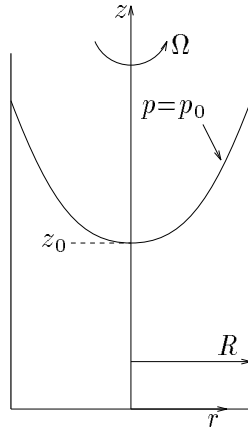
$$u_\theta = \Omega r .$$

The pressure is given by

$$p = \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 - \rho g z + c .$$

Letting  $z_0$  be the elevation of the free surface at  $r=0$ , and  $p_0$  be the atmospheric pressure, we get

$$c = p_0 + \rho g z_0 ,$$



**Figure 6.17.** Free surface of liquid in a rotating cylindrical container.

and thus

$$p = \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 - \rho g(z - z_0) + p_0. \quad (6.84)$$

The equation of the free surface is

$$\begin{aligned} 0 = p - p_0 &= \frac{1}{2}\rho\Omega^2 r^2 - \rho g(z - z_0) \implies \\ z &= z_0 + \frac{\Omega^2}{2g} r^2, \end{aligned} \quad (6.85)$$

i.e., the free surface is a parabola.  $\square$

### **Example 6.3.3. Superposition of Poiseuille and Couette flows**

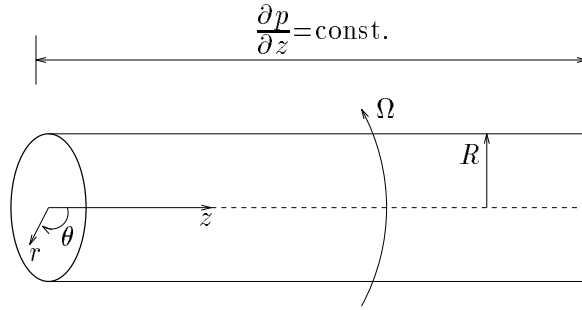
Consider steady flow of a liquid in a cylindrical tube occurring when a constant pressure gradient  $\partial p/\partial z$  is applied, while the tube is rotating about its axis with constant angular velocity  $\Omega$  (Fig. 6.18). This is obviously a *bidirectional* flow, since the axial and azimuthal velocity components,  $u_z$  and  $u_\theta$ , are nonzero.

The flow can be considered as a superposition of axisymmetric Poiseuille and circular Couette flows, for which we have:

$$u_z = u_z(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2) \quad \text{and} \quad u_\theta = u_\theta(r) = \Omega r.$$

This superposition is *dynamically admissible*, since it does not violate the continuity equation, which is automatically satisfied.





**Figure 6.18.** Flow in a rotating tube under constant pressure gradient.

Moreover, the governing equations of the flow, i.e., the  $z$ - and  $\theta$ -momentum equations,

$$-\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) = 0 \quad \text{and} \quad \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) = 0,$$

are linear and uncoupled. Hence, the velocity for this flow is given by

$$\mathbf{u} = u_z \mathbf{e}_z + u_\theta \mathbf{e}_\theta = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2) \mathbf{e}_z + \Omega r \mathbf{e}_\theta, \quad (6.86)$$

which describes a *helical flow*.

The pressure is obtained by integrating the  $r$ -momentum equation,

$$\rho \frac{u_\theta^2}{r} = \frac{\partial p}{\partial r},$$

taking into account that  $\partial p / \partial z$  is constant. It turns out that

$$p = \frac{\partial p}{\partial z} z + \frac{1}{2} \rho \Omega^2 r^2 + c, \quad (6.87)$$

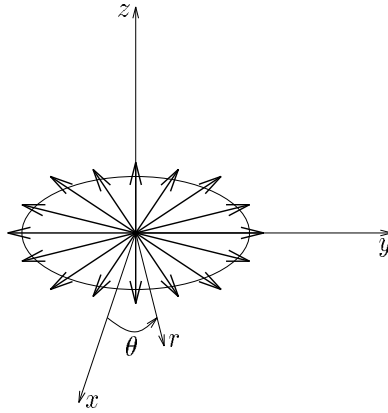
which is simply the sum of the pressure distributions of the two superposed flows. It should be noted, however, that this might not be the case in superposition of other unidirectional flows.  $\square$

## 6.4 Steady, Axisymmetric Radial Flows

In axisymmetric radial flows,

$$u_z = u_\theta = 0. \quad (6.88)$$

Evidently, the streamlines are straight lines perpendicular to the axis of symmetry (Fig. 6.19).



**Figure 6.19.** Streamlines in axisymmetric radial flow.

For the sake of simplicity, we will assume that  $u_r$ , in addition to being axisymmetric, does not depend on  $z$ . In other words, we assume that, in steady-state,  $u_r$  is only a function of  $r$ :

$$u_r = u_r(r). \quad (6.89)$$

A characteristic of radial flows is that the non-vanishing radial velocity component is determined by the conservation of mass rather than by the  $r$ -component of the conservation of momentum equation. This implies that  $u_r$  is independent of the viscosity of the liquid. (More precisely,  $u_r$  is independent of the constitutive equation of the fluid.) Due to Eq. (6.88), the continuity equation is simplified to

$$\frac{\partial}{\partial r}(ru_r) = 0, \quad (6.90)$$

which gives

$$u_r = \frac{c_1}{r}, \quad (6.91)$$

where  $c_1$  is a constant. The velocity  $u_r$  can also be obtained from a macroscopic mass balance. If  $Q$  is the volumetric flow rate per unit height,  $L$ , then

$$Q = u_r(2\pi rL) \implies$$

$$u_r = \frac{Q}{2\pi L r}, \quad (6.92)$$

which is identical to Eq. (6.91) for  $c_1=Q/(2\pi L)$ .

Assumptions:	$u_z = u_\theta = 0, \quad u_r = u_r(r), \quad \mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z$
Continuity:	$\frac{d}{dr}(ru_r) = 0 \quad \Rightarrow \quad u_r = \frac{c_1}{r}$
$r$ -momentum:	$\rho u_r \frac{du_r}{dr} = -\frac{\partial p}{\partial r}$
$z$ -momentum:	$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0$
$\theta$ -momentum:	$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0 \quad \Rightarrow \quad p = p(r, z)$
<b>General solution:</b>	$u_r = \frac{c_1}{r}$ $\tau_{rr} = -2\eta \frac{c_1}{r^2}, \quad \tau_{\theta\theta} = 2\eta \frac{c_1}{r^2}$ $p = -\rho \frac{c_1^2}{2r^2} - \rho g z + c$

**Table 6.4.** *Governing equations and general solution for steady, axisymmetric radial flows.*

Letting

$$\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_z, \quad (6.93)$$

the  $r$ -component of the Navier-Stokes equation is simplified to

$$\rho u_r \frac{du_r}{dr} = -\frac{\partial p}{\partial r}. \quad (6.94)$$

Note that the above equation contains a non-vanishing nonlinear convective term. The  $z$ - and  $\theta$ -components of the Navier-Stokes equation are reduced to the standard hydrostatic expression,

$$\frac{\partial p}{\partial z} + \rho g = 0, \quad (6.95)$$

and to

$$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0, \quad (6.96)$$

respectively. The latter equation dictates that  $p=p(r, z)$ . Integration of Eqs. (6.94) and (6.95) gives

$$\begin{aligned} p(r, z) &= -\rho \int u_r \frac{du_r}{dr} dr - \rho g z + c \\ &= \rho c_1^2 \int \frac{1}{r^3} dr - \rho g z + c \implies \\ p(r, z) &= -\rho \frac{c_1^2}{2r^2} - \rho g z + c, \end{aligned} \quad (6.97)$$

where the integration constant  $c$  is determined by specifying the value of the pressure at a point.

In axisymmetric radial flows, there are two non-vanishing stress components:

$$\tau_{rr} = 2\eta \frac{du_r}{dr} = -2\eta \frac{c_1}{r^2}; \quad (6.98)$$

$$\tau_{\theta\theta} = 2\eta \frac{u_r}{r} = 2\eta \frac{c_1}{r^2}. \quad (6.99)$$

The assumptions, the governing equations and the general solution for steady, axisymmetric radial flows are summarized in Table 6.4.

## 6.5 Steady, Spherically Symmetric Radial Flows

In spherically symmetric radial flows, the fluid particles move towards or away from the center of solid, liquid or gas spheres. Examples of such flows are flow around a gas bubble which grows or collapses in a liquid bath, flow towards a spherical sink, and flow away from a point source.

The analysis of spherically symmetric radial flows is similar to that of the axisymmetric ones. The assumptions and the results are tabulated in Table 6.5. Obviously,

Assumptions:	$u_\theta = u_\phi = 0, \quad u_r = u_r(r), \quad \mathbf{g} = \mathbf{0}$
Continuity:	$\frac{d}{dr}(r^2 u_r) = 0 \quad \implies \quad u_r = \frac{c_1}{r^2}$
$r$ -momentum:	$\rho u_r \frac{du_r}{dr} = -\frac{\partial p}{\partial r}$
$\theta$ -momentum:	$\frac{\partial p}{\partial \theta} = 0$
$\phi$ -momentum:	$\frac{\partial p}{\partial \phi} = 0$
<b>General solution:</b>	$u_r = \frac{c_1}{r^2}$ $\tau_{rr} = -4\eta \frac{c_1}{r^3}, \quad \tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} = 2\eta \frac{c_1}{r^3}$ $p = -\rho \frac{c_1^2}{2r^4} + c$

**Table 6.5.** *Governing equations and general solution for steady, spherically symmetric radial flows.*

spherical coordinates are the natural choice for the analysis. In steady-state, the radial velocity component is a function of the radial distance,

$$u_r = u_r(r), \quad (6.100)$$

while the other two velocity components are zero:

$$u_\theta = u_\phi = 0. \quad (6.101)$$

As in axisymmetric radial flows,  $u_r$  is determined from the continuity equation

as

$$u_r = \frac{c_1}{r^2}, \quad (6.102)$$

or

$$u_r = \frac{Q}{4\pi r^2}, \quad (6.103)$$

where  $Q$  is the volumetric flow rate.

The pressure is given by

$$p(r) = -\rho \frac{c_1^2}{2r^4} + c. \quad (6.104)$$

(Note that, in spherically symmetric flows, gravity is neglected.) Finally, there are now three non-vanishing stress components:

$$\tau_{rr} = 2\eta \frac{du_r}{dr} = -4\eta \frac{c_1}{r^3}; \quad (6.105)$$

$$\tau_{\theta\theta} = \tau_{\phi\phi} = 2\eta \frac{u_r}{r} = 2\eta \frac{c_1}{r^3}. \quad (6.106)$$

### **Example 6.5.1. Bubble growth in a Newtonian liquid**

Boiling of a liquid often originates from small air bubbles which grow radially in the liquid. Consider a spherical bubble of radius  $R(t)$  in a pool of liquid, growing at a rate

$$\frac{dR}{dt} = k.$$

The velocity,  $u_r$ , and the pressure,  $p$ , can be calculated using Eqs. (6.102) and (6.104), respectively. At first, we calculate the constant  $c_1$ . At  $r=R$ ,  $u_r=dR/dt=k$  or

$$\frac{c_1}{R^2} = k \quad \implies \quad c_1 = kR^2.$$

Substituting  $c_1$  into Eqs. (6.102) and (6.104), we get

$$u_r = k \frac{R^2}{r^2}$$

and

$$p = -\rho k^2 \frac{R^4}{2r^4} + c.$$

Note that the pressure near the surface of the bubble may attain small or even negative values, which favor evaporation of the liquid and expansion of the bubble.

□

## 6.6 Transient One-Dimensional Unidirectional Flows

In Sections 6.1 to 6.3, we studied three classes of steady-state unidirectional flows, where the dependent variable, i.e., the nonzero velocity component, was assumed to be a function of a single spatial independent variable. The governing equation for such a flow is a linear second-order ordinary differential equation which is integrated to arrive at a general solution. The general solution contains two integration constants which are determined by the boundary conditions at the endpoints of the one-dimensional domain over which the analytical solution is sought.

In the present section, we consider one-dimensional, *transient* unidirectional flows. Hence, the dependent variable is now a function of two independent variables, one of which is time,  $t$ . The governing equations for these flows are partial differential equations. In fact, we have already encountered some of these PDEs in Sections 6.1-6.3, while simplifying the corresponding components of the Navier-Stokes equation. For the sake of convenience, these are listed below.

- (a) For transient one-dimensional rectilinear flow in Cartesian coordinates with  $u_y = u_z = 0$  and  $u_x = u_x(y, t)$ ,

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \rho g_x . \quad (6.107)$$

- (b) For transient axisymmetric rectilinear flow with  $u_r = u_\theta = 0$  and  $u_z = u_z(r, t)$ ,

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho g_z ,$$

or

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right) + \rho g_z . \quad (6.108)$$

- (c) For transient axisymmetric torsional flow with  $u_z = u_r = 0$  and  $u_\theta = u_\theta(r, t)$ ,

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \eta \frac{\partial}{\partial r} \left( \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} (r u_\theta) \right) ,$$

or

$$\rho \frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \eta \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_\theta \right) . \quad (6.109)$$

The above equations are all *parabolic* PDEs. For any particular flow, they are supplemented by appropriate boundary conditions at the two endpoints of the one-dimensional flow domain, and by an *initial condition* for the entire flow domain. Note that the pressure gradients in Eqs. (6.107) and (6.108) may be functions of time. These two equations are *inhomogeneous* due to the presence of the pressure gradient and gravity terms. The inhomogeneous terms can be eliminated by decomposing the dependent variable into a properly chosen steady-state component (satisfying the corresponding steady-state problem and the boundary conditions) and a transient one which satisfies the *homogeneous* problem. A similar decomposition is often used for transforming inhomogeneous boundary conditions into homogeneous ones. *Separation of variables* [2] and the *similarity solution* method [3,6] are the standard methods for solving Eq. (6.109) and the homogeneous counterparts of Eqs. (6.107) and (6.108).

In homogeneous problems admitting separable solutions, the dependent variable  $u(x_i, t)$  is expressed in the form

$$u(x_i, t) = X(x_i) T(t). \quad (6.110)$$

Substitution of the above expression into the governing equation leads to the equivalent problem of solving two ordinary differential equations with  $X$  and  $T$  as the dependent variables.

In similarity methods, the two independent variables,  $x_i$  and  $t$ , are combined into the *similarity variable*

$$\xi = \xi(x_i, t). \quad (6.111)$$

If a similarity solution does exist, then the original partial differential equation for  $u(x_i, t)$  is reduced to an ordinary differential equation for  $u(\xi)$ .

Similarity solutions exist for problems involving parabolic PDEs in two independent variables where external length and time scales are absent. A typical problem is flow of a semi-infinite fluid above a plate suddenly set in motion with a constant velocity (Example 6.6.1). Length and time scales do exist in transient plane Couette flow, and in flow of a semi-infinite fluid above a plate oscillating along its own plane. In the former flow, the length scale is the distance between the two plates, whereas in the latter case, the length scale is the period of oscillations. These two flows are governed by Eq. (6.107), with the pressure-gradient and gravity terms neglected; they are solved in Examples 6.6.2 and 6.6.3, using separation of variables. In Example 6.6.4, we solve the problem of transient plane Poiseuille flow, due to the sudden application of a constant pressure gradient.

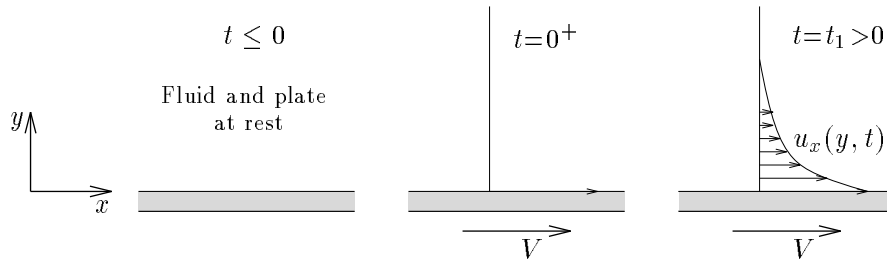
Finally, in the last two examples, we solve transient axisymmetric rectilinear and torsional flow problems, governed, respectively, by Eqs. (6.108) and (6.109). In



Example 6.6.5, we consider transient axisymmetric Poiseuille flow, and in Example 6.6.6, we consider flow inside an infinite long cylinder which is suddenly rotated.

**Example 6.6.1. Flow near a plate suddenly set in motion**

Consider a semi-infinite incompressible Newtonian liquid of viscosity  $\eta$  and density  $\rho$ , bounded below by a plate at  $y=0$  (Fig. 6.20). Initially, both the plate and the liquid are at rest. At time  $t=0^+$ , the plate starts moving in the  $x$  direction (i.e., along its plane) with constant speed  $V$ . Pressure gradient and gravity in the direction of the flow are zero. This flow problem was studied by Stokes in 1851, and is called *Rayleigh's problem* or *Stokes' first problem*.



**Figure 6.20.** Flow near a plate suddenly set in motion.

The governing equation for  $u_x(y, t)$  is homogeneous:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (6.112)$$

where  $\nu \equiv \eta/\rho$  is the kinematic viscosity. Mathematically, Eq. (6.112) is called the *heat* or *diffusion equation*. The boundary and initial conditions are:

$$\left. \begin{array}{l} u_x = V \quad \text{at} \quad y = 0, \quad t > 0 \\ u_x = 0 \quad \text{at} \quad y \rightarrow \infty, \quad t \geq 0 \\ u_x = 0 \quad \text{at} \quad t = 0, \quad 0 \leq y < \infty \end{array} \right\}. \quad (6.113)$$

The problem described by Eqs. (6.112) and (6.113) can be solved by Laplace transforms and by the similarity method. Here, we employ the latter which is useful in solving some nonlinear problems arising in boundary layer theory (see Chapter 8). A solution with Laplace transforms can be found in Ref. [7].

Examining Eq. (6.112), we observe that if  $y$  and  $t$  are magnified  $k$  and  $k^2$  times, respectively, Eq. (6.112) along with the boundary and initial conditions (6.113) will

still be satisfied. This clearly suggests that  $u_x$  depends on a combination of  $y$  and  $t$  of the form  $y/\sqrt{t}$ . The same conclusion is reached by noting that the dimensionless velocity  $u_x/V$  must be a function of the remaining kinematic quantities of this flow problem:  $\nu$ ,  $t$  and  $y$ . From these three quantities, only one dimensionless group can be formed,  $\xi=y/\sqrt{\nu t}$ .

Let us, however, assume that the existence of a similarity solution and the proper combination of  $y$  and  $t$  are not known a priori, and assume that the solution is of the form

$$u_x(y, t) = V f(\xi), \quad (6.114)$$

where

$$\xi = a \frac{y}{t^n}, \quad \text{with } n > 0. \quad (6.115)$$

Here  $\xi(y, t)$  is the similarity variable,  $a$  is a constant to be determined later so that  $\xi$  is dimensionless, and  $n$  is a positive number to be chosen so that the original partial differential equation (6.112) can be transformed into an ordinary differential equation with  $f$  as the dependent variable and  $\xi$  as the independent one. Note that a precondition for the existence of a similarity solution is that  $\xi$  is of such a form that the original boundary and initial conditions are combined into two boundary conditions for the new dependent variable  $f$ . This is easily verified in the present flow. The boundary condition at  $y=0$  is equivalent to

$$f = 1 \quad \text{at } \xi = 0, \quad (6.116)$$

whereas the boundary condition at  $y \rightarrow \infty$  and the initial condition collapse to a single boundary condition for  $f$ ,

$$f = 0 \quad \text{at } \xi \rightarrow \infty. \quad (6.117)$$

Differentiation of Eq. (6.114) using the chain rule gives

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_x}{\partial t} &= -V n \frac{ay}{t^{n+1}} f' = -V n \frac{\xi}{t} f', \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} &= V \frac{a}{t^n} f' \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = V \frac{a^2}{t^{2n}} f'', \end{aligned}$$

where primes denote differentiation with respect to  $\xi$ . Substitution of the above derivatives into Eq. (6.112) gives the following equation:

$$f'' + \frac{n\xi}{\nu a^2} t^{2n-1} f' = 0.$$

By setting  $n=1/2$ , time is eliminated and the above expression becomes a second-order ordinary differential equation,

$$f'' + \frac{\xi}{2\nu a^2} f' = 0 \quad \text{with} \quad \xi = a \frac{y}{\sqrt{t}}.$$

Taking  $a$  equal to  $1/\sqrt{\nu}$  makes the similarity variable dimensionless. For convenience in the solution of the differential equation, we set  $a=1/(2\sqrt{\nu})$ . Hence,

$$\xi = \frac{y}{2\sqrt{\nu t}}, \quad (6.118)$$

whereas the resulting ordinary differential equation is

$$f'' + 2\xi f' = 0. \quad (6.119)$$

This equation is subject to the boundary conditions (6.116) and (6.117). By straightforward integration, we obtain

$$f(\xi) = c_1 \int_0^\xi e^{-z^2} dz + c_2,$$

where  $z$  is a dummy variable of integration. At  $\xi=0$ ,  $f=1$ ; consequently,  $c_2=1$ . At  $\xi \rightarrow \infty$ ,  $f=0$ ; therefore,

$$c_1 \int_0^\infty e^{-z^2} dz + 1 = 0 \quad \text{or} \quad c_1 = -\frac{2}{\sqrt{\pi}},$$

and

$$f(\xi) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-z^2} dz = 1 - \text{erf}(\xi), \quad (6.120)$$

where erf is the *error function*, defined as

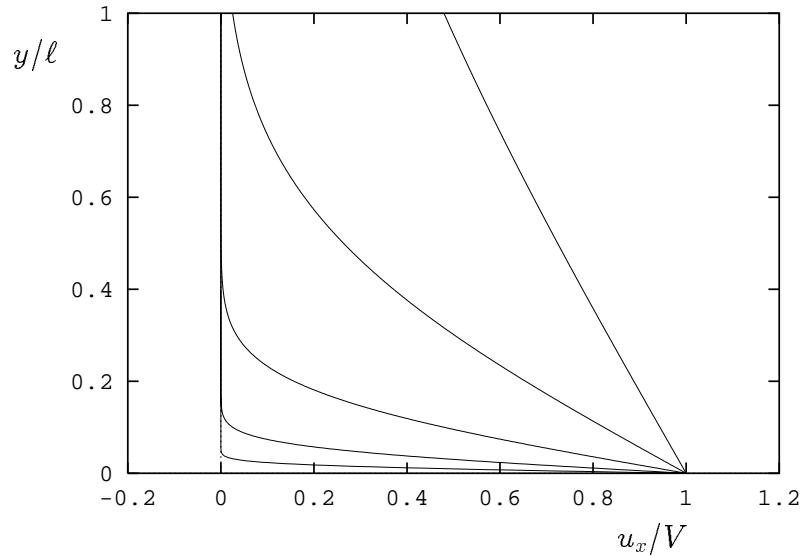
$$\text{erf}(\xi) \equiv \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-z^2} dz. \quad (6.121)$$

Values of the error function are tabulated in several math textbooks. It is a monotone increasing function with

$$\text{erf}(0) = 0 \quad \text{and} \quad \lim_{\xi \rightarrow \infty} \text{erf}(\xi) = 1.$$

Note that the second expression was used when calculating the constant  $c_1$ . Substituting into Eq. (6.114), we obtain the solution

$$u_x(y, t) = V \left[ 1 - \text{erf} \left( \frac{y}{2\sqrt{\nu t}} \right) \right]. \quad (6.122)$$



**Figure 6.21.** Transient flow due to the sudden motion of a plate. Velocity profiles at  $\nu t/\ell^2 = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1$  and  $1$ , where  $\ell$  is an arbitrary length scale.

The evolution of  $u_x(y, t)$  is illustrated in Fig. 6.21, where the velocity profiles are plotted at different values of  $\nu t/\ell^2$ ,  $\ell$  being an arbitrary length scale.

From Eq. (6.122), we observe that, for a fixed value of  $u_x/V$ ,  $y$  varies as  $2\sqrt{\nu t}$ . A *boundary-layer thickness*,  $\delta(t)$ , can be defined as the distance from the moving plate at which  $u_x/V = 0.01$ . This happens when  $\xi$  is about 1.8, and thus

$$\delta(t) = 3.6\sqrt{\nu t}.$$

The sudden motion of the plate generates vorticity, since the velocity profile is discontinuous at the initial distance. The thickness  $\delta(t)$  is the penetration of vorticity distance into regions of uniform velocity after a time  $t$ . Note that Eq. (6.112) can also be viewed as a vorticity diffusion equation. Indeed, since  $\mathbf{u} = u_x(y, t)\mathbf{i}$ ,

$$\omega(y, t) = |\boldsymbol{\omega}| = |\nabla \times \mathbf{u}| = \frac{\partial u_x}{\partial y},$$

and Eq. (6.112) can be cast in the form

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^y \omega \, dy = \nu \frac{\partial \omega}{\partial y},$$

or, equivalently,

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 \omega}{\partial y^2}. \quad (6.123)$$

The above expression is a vorticity conservation equation and highlights the role of kinematic viscosity, which acts as a *vorticity diffusion* coefficient, in a manner analogous to that of thermal diffusivity in heat diffusion.

The shear stress on the plate is given by

$$\tau_w = \tau_{yx}|_{y=0} = \eta \left. \frac{\partial u_x}{\partial y} \right|_{y=0} = -\eta V \left. \frac{\partial \operatorname{erf}(\xi)}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} \left. \frac{\partial \xi}{\partial y} \right|_{y=0} = -\frac{\eta V}{\sqrt{\pi \nu t}}, \quad (6.124)$$

which suggests that the stress is singular at the instant the plate starts moving, and decreases as  $1/\sqrt{t}$ .

The physics of this example are similar to those of boundary layer flow, which is examined in detail in Chapter 8. In fact, the same similarity variable was invoked by Rayleigh to calculate skin-friction over a plate moving with velocity  $V$  through a stationary liquid which leads to [8]

$$\tau_w = \frac{\eta V}{\sqrt{\pi \nu}} \sqrt{\frac{V}{x}},$$

by simply replacing  $t$  by  $x/V$  in Eq. (6.124). This situation arises in free stream flows overtaking submerged bodies, giving rise to boundary layers [9].

□

In the following example, we demonstrate the use of separation of variables by solving a transient plane Couette flow problem.

### **Example 6.6.2. Transient plane Couette flow**

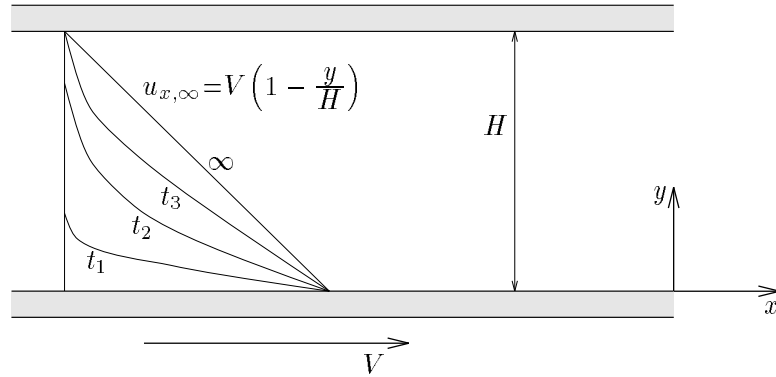
Consider a Newtonian liquid of density  $\rho$  and viscosity  $\eta$  bounded by two infinite parallel plates separated by a distance  $H$ , as shown in Fig. 6.22. The liquid and the two plates are initially at rest. At time  $t=0^+$ , the lower plate is suddenly brought to a steady velocity  $V$  in its own plane, while the upper plate is held stationary.

The governing equation is the same as in the previous example,

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (6.125)$$

with the following boundary and initial conditions:

$$\left. \begin{array}{l} u_x = V \quad \text{at} \quad y = 0, \quad t > 0 \\ u_x = 0 \quad \text{at} \quad y = H, \quad t \geq 0 \\ u_x = 0 \quad \text{at} \quad t = 0, \quad 0 \leq y \leq H \end{array} \right\} \quad (6.126)$$



**Figure 6.22.** Schematic of the evolution of the velocity in start-up plane Couette flow.

Note that, while the governing equation is homogeneous, the boundary conditions are inhomogeneous. Therefore, separation of variables cannot be applied directly. We first have to transform the problem so that the governing equation and the two boundary conditions are homogeneous. This can be achieved by decomposing  $u_x(y, t)$  into the steady plane Couette velocity profile, which is expected to prevail at large times, and a transient component:

$$u_x(y, t) = V \left( 1 - \frac{y}{H} \right) - u'_x(y, t). \quad (6.127)$$

Substituting into Eqs. (6.125) and (6.126), we obtain the following problem

$$\frac{\partial u'_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2}, \quad (6.128)$$

with

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= 0 & \text{at } y = 0, t > 0 \\ u'_x &= 0 & \text{at } y = H, t \geq 0 \\ u'_x &= V \left( 1 - \frac{y}{H} \right) & \text{at } t = 0, 0 \leq y \leq H \end{aligned} \right\} \quad (6.129)$$

Note that the new boundary conditions are homogeneous, while the governing equation remains unchanged. Therefore, separation of variables can now be used. The first step is to express  $u'_x(y, t)$  in the form

$$u'_x(y, t) = Y(y) T(t). \quad (6.130)$$

Substituting into Eq. (6.128) and separating the functions  $Y$  and  $T$ , we get

$$\frac{1}{\nu T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2}.$$

The only way a function of  $t$  can be equal to a function of  $y$  is for both functions to be equal to the same constant. For convenience, we choose this constant to be  $-\alpha^2/H^2$ . (One advantage of this choice is that  $\alpha$  is dimensionless.) We thus obtain two ordinary differential equations:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\nu\alpha^2}{H^2} T = 0, \quad (6.131)$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \frac{\alpha^2}{H^2} Y = 0. \quad (6.132)$$

The solution to Eq. (6.131) is

$$T = c_0 e^{-\frac{\nu\alpha^2}{H^2}t}, \quad (6.133)$$

where  $c_0$  is an integration constant to be determined.

Equation (6.132) is a homogeneous second-order ODE with constant coefficients, and its general solution is

$$Y(y) = c_1 \sin\left(\frac{\alpha y}{H}\right) + c_2 \cos\left(\frac{\alpha y}{H}\right). \quad (6.134)$$

The form of the general solution justifies the choice we made earlier for the constant  $-\alpha^2/H^2$ . The constants  $c_1$  and  $c_2$  are determined by the boundary conditions. Applying Eq. (6.130) to the boundary conditions at  $y=0$  and  $H$ , we obtain

$$Y(0)T(t) = 0 \quad \text{and} \quad Y(H)T(t) = 0.$$

The case of  $T(t)=0$  is excluded, since this corresponds to the steady-state problem. Hence, we get the following boundary conditions for  $Y$ :

$$Y(0) = 0 \quad \text{and} \quad Y(H) = 0. \quad (6.135)$$

Note that in order to get the boundary conditions on  $Y$ , it is essential that the boundary conditions are homogeneous.

Applying the boundary condition at  $y=0$ , we get  $c_2=0$ . Thus,

$$Y(y) = c_1 \sin\left(\frac{\alpha y}{H}\right). \quad (6.136)$$

Applying now the boundary condition at  $y=H$ , we get

$$\sin(\alpha) = 0, \quad (6.137)$$

which has infinitely many roots,

$$\alpha_k = k\pi, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.138)$$

To each of these roots correspond solutions  $Y_k$  and  $T_k$ . These infinitely many solutions are superimposed by defining

$$u'_x(y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{\alpha_k y}{H}\right) e^{-\frac{\nu \alpha_k^2}{H^2} t} = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right) e^{-\frac{k^2 \pi^2}{H^2} \nu t}, \quad (6.139)$$

where the constants  $B_k = c_{0k} c_{1k}$  are determined from the initial condition. For  $t=0$ , we get

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right) = V \left(1 - \frac{y}{H}\right). \quad (6.140)$$

To isolate  $B_k$ , we will take advantage of the orthogonality property

$$\int_0^1 \sin(k\pi x) \sin(n\pi x) dx = \begin{cases} \frac{1}{2}, & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (6.141)$$

By multiplying both sides of Eq. (6.140) by  $\sin(n\pi y/H) dy$ , and by integrating from 0 to  $H$ , we have:

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^H \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy = V \int_0^H \left(1 - \frac{y}{H}\right) \sin\left(\frac{n\pi y}{H}\right) dy.$$

Setting  $\xi = y/H$ , we get

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 \sin(k\pi\xi) \sin(n\pi\xi) d\xi = V \int_0^1 (1 - \xi) \sin(n\pi\xi) d\xi.$$

Due to the orthogonality property (6.141), the only nonzero term on the left hand side is that for  $k=n$ ; hence,

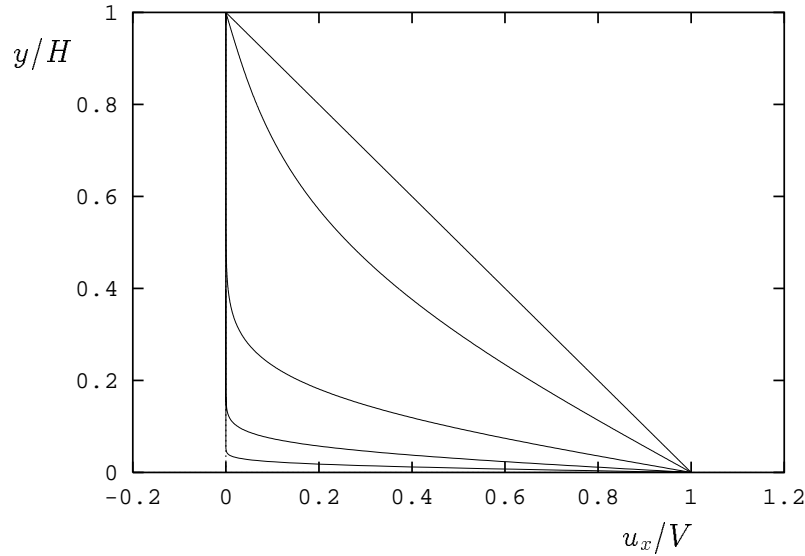
$$B_k \frac{1}{2} = V \int_0^1 (1 - \xi) \sin(k\pi\xi) d\xi = V \frac{1}{k\pi} \implies$$



$$B_k = \frac{2V}{k\pi}. \quad (6.142)$$

Substituting into Eq. (6.139) gives

$$u'_x(y, t) = \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{H^2}\nu t}. \quad (6.143)$$



**Figure 6.23.** *Transient plane Couette flow. Velocity profiles at  $\nu t/H^2 = 0.0001, 0.001, 0.01, 0.1$  and  $1$ .*

Finally, for the original dependent variable  $u_x(y, t)$  we get

$$u_x(y, t) = V \left(1 - \frac{y}{H}\right) - \frac{2V}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \sin\left(\frac{k\pi y}{H}\right) e^{-\frac{k^2\pi^2}{H^2}\nu t}. \quad (6.144)$$

The evolution of the solution is illustrated in Fig. 6.23. Initially, the presence of the stationary plate does not affect the development of the flow, and thus the solution is similar to the one of the previous example. This is evident when comparing Figs. 6.21 and 6.23.  $\square$

### **Example 6.6.3. Flow due to an oscillating plate**

Consider flow of a semi-infinite Newtonian liquid, set in motion by an oscillating

plate of velocity

$$V = V_0 \cos \omega t, \quad t > 0. \quad (6.145)$$

The governing equation, the initial condition and the boundary condition at  $y \rightarrow \infty$  are the same as those of Example 6.6.1. At  $y=0$ ,  $u_x$  is now equal to  $V_0 \cos \omega t$ . Hence, we have the following problem:

$$\frac{\partial u_x}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}, \quad (6.146)$$

with

$$\left. \begin{array}{ll} u_x = V_0 \cos \omega t & \text{at } y = 0, t > 0 \\ u_x \rightarrow 0 & \text{at } y \rightarrow \infty, t \geq 0 \\ u_x = 0 & \text{at } t = 0, 0 \leq y \leq \infty \end{array} \right\}. \quad (6.147)$$

This is known as *Stokes problem* or *Stokes' second problem*, first studied by Stokes in 1845.

Since the period of the oscillations of the plate introduces a time scale, no similarity solution exists to this problem. By virtue of Eq. (6.145), it may be expected that  $u_x$  will also oscillate in time with the same frequency, but possibly with a phase shift relative to the oscillations of the plate. Thus, we separate the two independent variables by representing the velocity as

$$u_x(y, t) = \mathcal{R}e \left[ Y(y) e^{i\omega t} \right], \quad (6.148)$$

where  $\mathcal{R}e$  denotes the real part of the expression within the brackets,  $i$  is the imaginary unit, and  $Y(y)$  is a complex function. Substituting into the governing equation, we have

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} - \frac{i\omega}{\nu} Y = 0. \quad (6.149)$$

The general solution of the above equation is

$$Y(y) = c_1 \exp \left\{ -\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1+i) y \right\} + c_2 \exp \left\{ \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1+i) y \right\}.$$

The fact that  $u_x=0$  at  $y \rightarrow \infty$ , dictates that  $c_2$  be zero. Then, the boundary condition at  $y=0$  requires that  $c_1=V_0$ . Thus,

$$u_x(y, t) = V_0 \mathcal{R}e \left[ \exp \left\{ -\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} (1+i) y \right\} e^{i\omega t} \right], \quad (6.150)$$

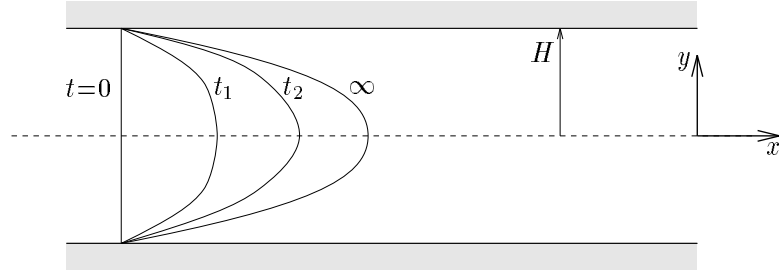
The resulting solution,

$$u_x(y, t) = V_0 \exp \left( -\sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right) \cos \left( \omega t - \sqrt{\frac{\omega}{2\nu}} y \right), \quad (6.151)$$

describes a damped transverse wave of wavelength  $2\pi\sqrt{2\nu/\omega}$ , propagating in the  $y$ -direction with phase velocity  $\sqrt{2\nu\omega}$ . The amplitude of the oscillations decays exponentially with  $y$ . The depth of penetration of vorticity is  $\delta \sim \sqrt{2\nu/\omega}$ , suggesting that the distance over which the fluid feels the motion of the plate gets smaller as the frequency of the oscillations increases.  $\square$

#### **Example 6.6.4. Transient plane Poiseuille flow**

Let us now consider a transient flow which is induced by a suddenly applied constant pressure gradient. A Newtonian liquid of density  $\rho$  and viscosity  $\eta$ , is contained between two horizontal plates separated by a distance  $2H$  (Fig. 6.24). The liquid is initially at rest; at time  $t=0^+$ , a constant pressure gradient,  $\partial p/\partial x$ , is applied, setting the liquid into motion.



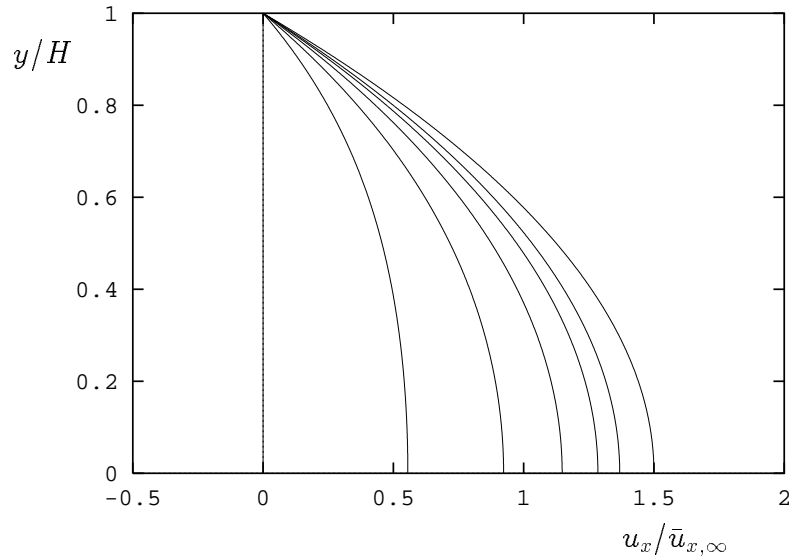
**Figure 6.24.** Schematic of the evolution of the velocity in transient plane Poiseuille flow.

The governing equation for this flow is

$$\rho \frac{\partial u_x}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}. \quad (6.152)$$

Positioning the  $x$ -axis on the symmetry plane of the flow (Fig. 6.24), the boundary and initial conditions become:

$$\left. \begin{array}{l} u_x = 0 \quad \text{at } y = H, t \geq 0 \\ \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \text{at } y = 0, t \geq 0 \\ u_x = 0 \quad \text{at } t = 0, 0 \leq y \leq H \end{array} \right\} \quad (6.153)$$



**Figure 6.25.** *Transient plane Poiseuille flow. Velocity profiles at  $\nu t/H^2=0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1$  and  $\infty$ .*

The problem of Eqs. (6.152) and (6.153) is solved using separation of variables. Since the procedure is similar to that used in Example 6.6.2, it is left as an exercise for the reader (Problem 6.8) to show that

$$u_x(y, t) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^2 \left\{ 1 - \left( \frac{y}{H} \right)^2 - \frac{32}{\pi^3} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{(2k-1)^3} \cos \left[ \frac{(2k-1)\pi}{2} \frac{y}{H} \right] \exp \left[ -\frac{(2k-1)^2 \pi^2}{4H^2} \nu t \right] \right\}. \quad (6.154)$$

The evolution of the velocity towards the parabolic steady-state profile is shown in Fig. 6.25.  $\square$

### **Example 6.6.5. Transient axisymmetric Poiseuille flow**

Consider a Newtonian liquid of density  $\rho$  and viscosity  $\eta$ , initially at rest in an infinitely long horizontal cylindrical tube of radius  $R$ . At time  $t=0^+$ , a constant pressure gradient,  $\partial p/\partial z$ , is applied, setting the liquid into motion.

This is obviously a transient axisymmetric rectilinear flow. Since gravity is zero, the governing equation is

$$\rho \frac{\partial u_z}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial z} + \eta \left( \frac{\partial^2 u_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_z}{\partial r} \right), \quad (6.155)$$

subject to the following boundary conditions:

$$\left. \begin{array}{l} u_z = 0 \quad \text{at } r = R, t \geq 0 \\ u_z \text{ finite} \quad \text{at } r = 0, t \geq 0 \\ u_z = 0 \quad \text{at } t = 0, 0 \leq r \leq R \end{array} \right\} \quad (6.156)$$

By decomposing  $u_z(r, t)$  into the steady-state Poiseuille flow component (expected to prevail at large times) and a new dependent variable,

$$u_z(r, t) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2) - u'_z(r, t), \quad (6.157)$$

the inhomogeneous pressure-gradient term in Eq. (6.155) is eliminated, and the following homogeneous problem is obtained:

$$\frac{\partial u'_z}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u'_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_z}{\partial r} \right) \quad (6.158)$$

with

$$\left. \begin{array}{l} u'_z = 0 \quad \text{at } r = R, t \geq 0 \\ u'_z \text{ finite} \quad \text{at } r = 0, t \geq 0 \\ u'_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2) \quad \text{at } t = 0, 0 \leq r \leq R \end{array} \right\} \quad (6.159)$$

Using separation of variables, we express  $u'_z(r, t)$  in the form

$$u'_z(r, t) = X(r) T(t). \quad (6.160)$$

Substituting into Eq. (6.158) and separating the functions  $X$  and  $T$ , we get

$$\frac{1}{\nu T} \frac{dT}{dt} = \frac{1}{X} \left( \frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} \right).$$

Equating both sides of the above expression to  $-\alpha^2/R^2$ , where  $\alpha$  is a dimensionless constant, we obtain two ordinary differential equations:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\nu \alpha^2}{R^2} T = 0, \quad (6.161)$$

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} + \frac{\alpha^2}{R^2} X = 0. \quad (6.162)$$

The solution to Eq. (6.161) is

$$T = c_0 e^{-\frac{\nu \alpha^2}{R^2} t}, \quad (6.163)$$

where  $c_0$  is an integration constant.

Equation (6.162) is a Bessel's differential equation, whose general solution is given by

$$X(r) = c_1 J_0\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + c_2 Y_0\left(\frac{\alpha r}{R}\right), \quad (6.164)$$

where  $J_0$  and  $Y_0$  are the zeroth-order Bessel functions of the first and second kind, respectively. From the theory of Bessel functions, we know that  $Y_0(x)$  and its first derivative are unbounded at  $x=0$ . Since  $u'_z$  and thus  $X$  must be finite at  $r=0$ , we get  $c_2=0$ .

Differentiating Eq. (6.164) and noting that

$$\frac{dJ_0}{dx}(x) = -J_1(x),$$

where  $J_1$  is the first-order Bessel function of the first kind, we obtain:

$$\frac{dX}{dr}(r) = -c_1 \frac{\alpha}{R} J_1\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + c_2 \frac{\alpha}{R} \frac{dY_0}{dr}\left(\frac{\alpha r}{R}\right).$$

Given that  $J_1(0)=0$ , we find again that  $c_2$  must be zero so that  $dX/dr=0$  at  $r=0$ . Thus,

$$X(r) = c_1 J_0\left(\frac{\alpha r}{R}\right). \quad (6.165)$$

Applying the boundary condition at  $r=R$ , we get

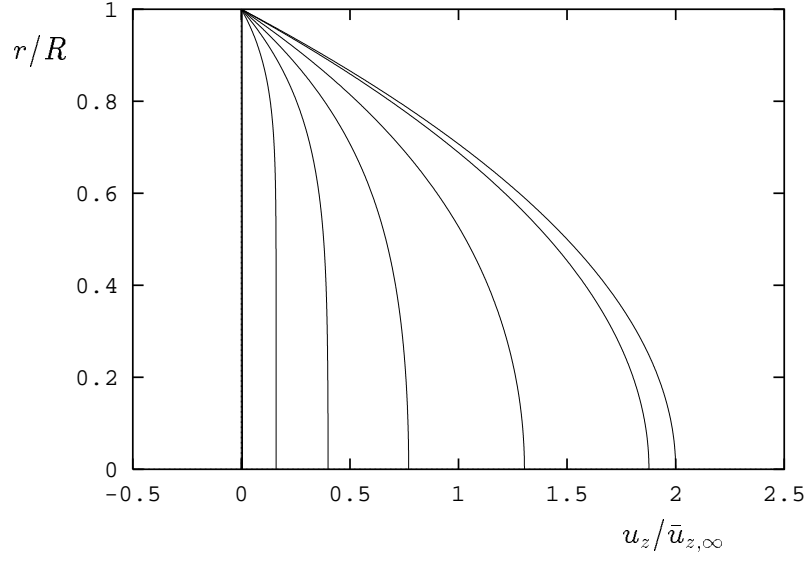
$$J_0(\alpha) = 0. \quad (6.166)$$

Note that  $J_0(x)$  is an oscillating function with infinitely many roots,

$$\alpha_k, \quad k = 1, 2, \dots$$

Therefore,  $u'_z(r, t)$  is expressed as an infinite sum of the form

$$u'_z(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) e^{-\frac{\nu \alpha_k^2}{R^2} t}, \quad (6.167)$$



**Figure 6.26.** *Transient axisymmetric Poiseuille flow. Velocity profiles at  $\nu t/R^2 = 0.02, 0.05, 0.1, 0.2, 0.5$  and  $\infty$ .*

where the constants  $B_k$  are to be determined from the initial condition. For  $t=0$ , we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k J_0\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right]. \quad (6.168)$$

In order to take advantage of the orthogonality property of Bessel functions,

$$\int_0^1 J_0(\alpha_k r) J_0(\alpha_n r) r dr = \begin{cases} \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_k), & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (6.169)$$

where both  $\alpha_k$  and  $\alpha_n$  are roots of  $J_0$ , we multiply both sides of Eq. (6.168) by  $J_0(\alpha_n r/R) r dr$ , and then integrate from 0 to  $R$ , to get

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^R J_0\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) r dr = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \int_0^R \left[1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2\right] J_0\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) r dr,$$

or

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 J_0(\alpha_k \xi) J_0(\alpha_n \xi) \xi d\xi = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \int_0^1 (1 - \xi^2) J_0(\alpha_n \xi) \xi d\xi,$$

where  $\xi=r/R$ . The only nonzero term on the left hand side corresponds to  $k=n$ . Hence,

$$B_k \frac{1}{2} J_1^2(\alpha_k) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \int_0^1 (1-\xi^2) J_0(\alpha_k \xi) \xi d\xi. \quad (6.170)$$

Using standard relations for Bessel functions, we find that

$$\int_0^1 (1-\xi^2) J_0(\alpha_k \xi) \xi d\xi = \frac{4J_1(\alpha_k)}{\alpha_k^3}.$$

Therefore,

$$B_k = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} \frac{8}{\alpha_k^3 J_1(\alpha_k)},$$

and

$$u'_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (8R^2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right)}{\alpha_k^3 J_1(\alpha_k)} e^{-\frac{\nu \alpha_k^2}{R^2} t}. \quad (6.171)$$

Substituting into Eq. (6.167) gives

$$u_z(r, t) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 - 8 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_0\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right)}{\alpha_k^3 J_1(\alpha_k)} e^{-\frac{\nu \alpha_k^2}{R^2} t} \right]. \quad (6.172)$$

The evolution of the velocity is shown in Fig. 6.26. □

### **Example 6.6.6. Flow inside a cylinder that is suddenly rotated**

A Newtonian liquid of density  $\rho$  and viscosity  $\eta$  is initially at rest in a vertical, infinitely long cylinder of radius  $R$ . At time  $t=0^+$ , the cylinder starts rotating about its axis with constant angular velocity  $\Omega$ , setting the liquid into motion.

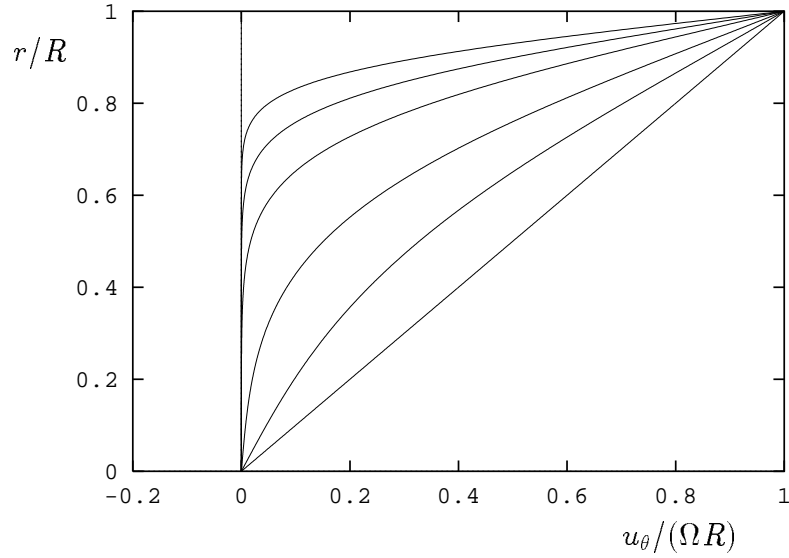
This is a transient axisymmetric torsional flow, governed by

$$\frac{\partial u_\theta}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u_\theta \right), \quad (6.173)$$

subject to the following conditions:

$$\left. \begin{array}{l} u_\theta = \Omega R \quad \text{at } r = R, t > 0 \\ u_\theta \text{ finite} \quad \text{at } r = 0, t \geq 0 \\ u_\theta = 0 \quad \text{at } t = 0, 0 \leq r \leq R \end{array} \right\} \quad (6.174)$$





**Figure 6.27.** Flow inside a cylinder that is suddenly rotated. Velocity profiles at  $\nu t/R^2 = 0.005, 0.01, 0.02, 0.05, 0.1$  and  $\infty$ .

The solution procedure for the problem described by Eqs. (6.173) and (6.174) is the same as in the previous example. The steady-state solution has been obtained in Example 6.3.1. Setting

$$u_\theta(r, t) = \Omega r - u'_\theta(r, t), \quad (6.175)$$

we obtain the following homogeneous problem

$$\frac{\partial u'_\theta}{\partial t} = \nu \left( \frac{\partial^2 u'_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u'_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r^2} u'_\theta \right), \quad (6.176)$$

$$\left. \begin{aligned} u'_\theta &= 0 & \text{at } r = R, t > 0 \\ u'_\theta &\text{ finite} & \text{at } r = 0, t \geq 0 \\ u'_\theta &= \Omega r & \text{at } t = 0, 0 \leq r \leq R \end{aligned} \right\} \quad (6.177)$$

The independent variables are separated by setting

$$u'_\theta(r, t) = X(r)T(t), \quad (6.178)$$

which leads to two ordinary differential equations:

$$\frac{dT}{dt} + \frac{\nu\alpha^2}{R^2} T = 0, \quad (6.179)$$

and

$$\frac{d^2 X}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dX}{dr} + \left( \frac{\alpha^2}{R^2} - \frac{1}{r^2} \right) X = 0. \quad (6.180)$$

Equation (6.179) is identical to Eq. (6.161) of the previous example, whose general solution is

$$T = c_0 e^{-\frac{\nu\alpha^2}{R^2}t}. \quad (6.181)$$

The general solution of Eq. (6.180) is

$$X(r) = c_1 J_1\left(\frac{\alpha r}{R}\right) + c_2 Y_1\left(\frac{\alpha r}{R}\right), \quad (6.182)$$

where  $J_1$  and  $Y_1$  are the first-order Bessel functions of the first and second kind, respectively. Since  $Y_1(x)$  is unbounded at  $x=0$ ,  $c_2$  must be zero. Therefore,

$$X(r) = c_1 J_1\left(\frac{\alpha r}{R}\right). \quad (6.183)$$

The boundary condition at  $r=R$  requires that

$$J_1(\alpha) = 0, \quad (6.184)$$

which has infinitely many roots. Therefore,  $u'_\theta(r, t)$  is expressed as an infinite sum of the form

$$u'_\theta(r, t) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) e^{-\frac{\nu\alpha_k^2}{R^2}t}, \quad (6.185)$$

where the constants  $B_k$  are to be determined from the initial condition. For  $t=0$ , we have

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) = \Omega r. \quad (6.186)$$

The constants  $B_k$  are determined by using the orthogonality property of Bessel functions,

$$\int_0^1 J_1(\alpha_k r) J_1(\alpha_n r) r dr = \begin{cases} \frac{1}{2} J_0^2(\alpha_k), & k = n \\ 0, & k \neq n \end{cases} \quad (6.187)$$

where both  $\alpha_k$  and  $\alpha_n$  are roots of  $J_1$ . Multiplying both sides of Eq. (6.186) by  $J_1(\alpha_n r/R)rdr$ , and integrating from 0 to  $R$ , we get

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^R J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right) J_1\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) r dr = \Omega \int_0^R J_1\left(\frac{\alpha_n r}{R}\right) r^2 dr,$$

or

$$\sum_{k=1}^{\infty} B_k \int_0^1 J_1(\alpha_k \xi) J_1(\alpha_n \xi) \xi d\xi = \Omega R \int_0^1 J_1(\alpha_n \xi) \xi^2 d\xi,$$

where  $\xi=r/R$ . Invoking Eq. (6.187), we get

$$B_k \frac{1}{2} J_0^2(\alpha_k) = \Omega R \int_0^1 J_1(\alpha_k \xi) \xi^2 d\xi = -\Omega R \frac{J_0(\alpha_k)}{\alpha_k} \implies$$

$$B_k = -\frac{2\Omega R}{\alpha_k J_0(\alpha_k)}.$$

Therefore,

$$u'_\theta = -2\Omega R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right)}{\alpha_k J_0(\alpha_k)} e^{-\frac{\nu \alpha_k^2}{R^2} t} \quad (6.188)$$

and

$$u_\theta(r, t) = \Omega r + 2\Omega R \sum_{k=1}^{\infty} \frac{J_1\left(\frac{\alpha_k r}{R}\right)}{\alpha_k J_0(\alpha_k)} e^{-\frac{\nu \alpha_k^2}{R^2} t}. \quad (6.189)$$

The evolution of the  $u_\theta$  is shown in Fig. 6.27.  $\square$

## 6.7 Steady Two-Dimensional Rectilinear Flows

As explained in Section 6.1, in steady, rectilinear flows in the  $x$  direction,  $u_x = u_x(y, z)$  and the  $x$ -momentum equation is reduced to a *Poisson equation*,

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} - \frac{1}{\nu} g_x. \quad (6.190)$$

Equation (6.190) is an *elliptic* PDE. Since  $\partial p/\partial x$  is a function of  $x$  alone and  $u_x$  is a function of  $y$  and  $z$ , Eq. (6.190) can be satisfied only when  $\partial p/\partial x$  is constant. Therefore, the right hand side term of Eq. (6.190) is a constant. This inhomogeneous term can be eliminated by introducing a new dependent variable which satisfies the *Laplace equation*.

Two classes of flows governed by Eq. (6.190) are:

- (a) Poiseuille flows in tubes of arbitrary but constant cross section; and
- (b) gravity-driven rectilinear film flows.

One-dimensional Poiseuille flows have been encountered in Sections 6.1 and 6.2. The most important of them, i.e., plane, round and annular Poiseuille flows, are summarized in Fig. 6.28. In the following, we will discuss two-dimensional Poiseuille flows in tubes of elliptical, rectangular and triangular cross sections, illustrated in Fig. 6.29. In these rather simple geometries, Eq. (6.190) can be solved analytically. Analytical solutions for other cross sectional shapes are given in Refs. [10] and [11].

### **Example 6.7.1. Poiseuille flow in a tube of elliptical cross section**

Consider fully-developed flow of an incompressible Newtonian liquid in an infinitely long tube of elliptical cross section, under constant pressure gradient  $\partial p/\partial x$ . Gravity is neglected, and thus Eq. (6.190) becomes

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \quad \text{in} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} \leq 1, \quad (6.191)$$

where  $a$  and  $b$  are the semi-axes of the elliptical cross section, as shown in Fig. 6.29a. The velocity is zero at the wall, and thus the boundary condition is:

$$u_x = 0 \quad \text{on} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (6.192)$$

Let us now introduce a new dependent variable  $u'_x$ , such that

$$u_x(y, z) = u'_x(y, z) + c_1 y^2 + c_2 z^2, \quad (6.193)$$

where  $c_1$  and  $c_2$  are non zero constants to be determined so that (a)  $u'_x$  satisfies the Laplace equation, and (b)  $u'_x$  is constant on the wall. Substituting Eq. (6.193) into Eq. (6.191), we get

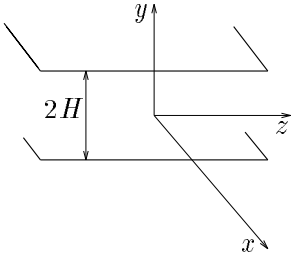
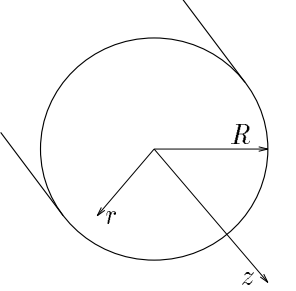
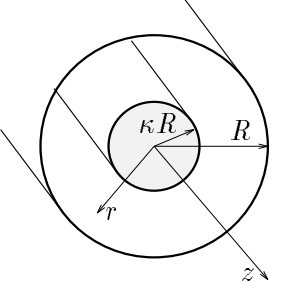
$$\frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z^2} + 2c_1 + 2c_2 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6.194)$$

Evidently,  $u'_x$  satisfies the Laplace equation,

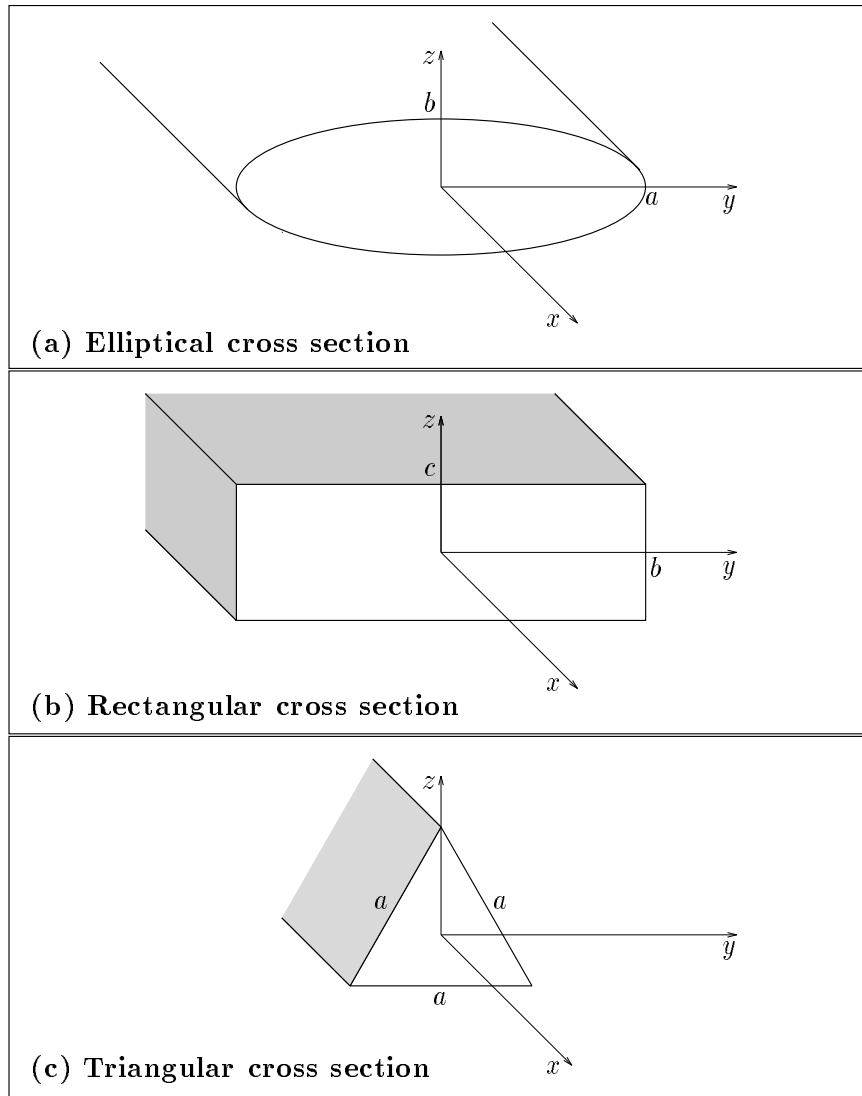
$$\frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z^2} = 0, \quad (6.195)$$

if

$$2c_1 + 2c_2 = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6.196)$$

	<p><b>Plane Poiseuille flow</b></p> $u_x = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2)$ $Q = -\frac{2}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} H^3 W$
	<p><b>Round Poiseuille flow</b></p> $u_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2)$ $Q = -\frac{\pi}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^4$
	<p><b>Annular Poiseuille flow</b></p> $u_z = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^2 \left[ 1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2 + \frac{1-\kappa^2}{\ln(1/\kappa)} \ln \frac{r}{R} \right]$ $Q = -\frac{\pi}{8\eta} \frac{\partial p}{\partial z} R^4 \left[ (1 - \kappa^4) - \frac{(1-\kappa^2)^2}{\ln(1/\kappa)} \right]$

**Figure 6.28.** One-dimensional Poiseuille flows.



**Figure 6.29.** *Two-dimensional Poiseuille flow in tubes of various cross sections.*

From boundary condition (6.192), we have

$$u'_x(y, z) = -c_1 y^2 - c_2 z^2 = -c_1 \left[ y^2 + \frac{c_2}{c_1} z^2 \right] \quad \text{on} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1.$$

Setting

$$\frac{c_2}{c_1} = \frac{a^2}{b^2}, \quad (6.197)$$

$u'_x$  becomes constant on the boundary,

$$u'_x(y, z) = -c_1 a^2 \quad \text{on} \quad \frac{y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1. \quad (6.198)$$

The *maximum principle* for the Laplace equation states that  $u'_x$  has both its minimum and maximum values on the boundary of the domain [12]. Therefore,  $u'_x$  is constant over the whole domain,

$$u'_x(y, z) = -c_1 a^2. \quad (6.199)$$

Substituting into Eq. (6.193) and using Eq. (6.197), we get

$$\begin{aligned} u_x(y, z) &= -c_1 a^2 + c_1 y^2 + c_2 z^2 = -c_1 a^2 \left[ 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{c_2}{c_1} \frac{z^2}{a^2} \right] \implies \\ &= -c_1 a^2 \left[ 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right]. \end{aligned} \quad (6.200)$$

The constant  $c_1$  is determined from Eqs. (6.196) and (6.197),

$$c_1 = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{b^2}{a^2 + b^2}; \quad (6.201)$$

consequently,

$$u_x(y, z) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \left[ 1 - \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{b^2} \right]. \quad (6.202)$$

Obviously, the maximum velocity occurs at the origin. Integration of the velocity profile (6.202) over the elliptical cross section yields the volumetric flow rate

$$Q = -\frac{\pi}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{a^3 b^3}{a^2 + b^2}. \quad (6.203)$$

Equation (6.202) degenerates to the circular Poiseuille flow velocity profile when  $a=b=R$ ,

$$u_x(y, z) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial x} R^2 \left[ 1 - \frac{y^2 + z^2}{R^2} \right].$$

Setting  $r^2=y^2+z^2$ , and switching to cylindrical coordinates, we get

$$u_z(r) = -\frac{1}{4\eta} \frac{\partial p}{\partial z} (R^2 - r^2). \quad (6.204)$$

If now  $a=H$  and  $b \gg H$ , Eq. (6.202) yields the plane Poiseuille flow velocity profile,

$$u_x(y) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (H^2 - y^2). \quad (6.205)$$

Note that, due to symmetry, the shear stress is zero along symmetry planes. The zero shear stress condition along such a plane applies also in gravity-driven flow of a film of semielliptical cross section. Therefore, the velocity profile for the latter flow can be obtained by replacing  $-\partial p/\partial x$  by  $\rho g_x$ . Similarly, Eqs. (6.204) and (6.205) can be modified to describe the gravity-driven flow of semicircular and planar films, respectively.  $\square$

### **Example 6.7.2. Poiseuille flow in a tube of rectangular cross section**

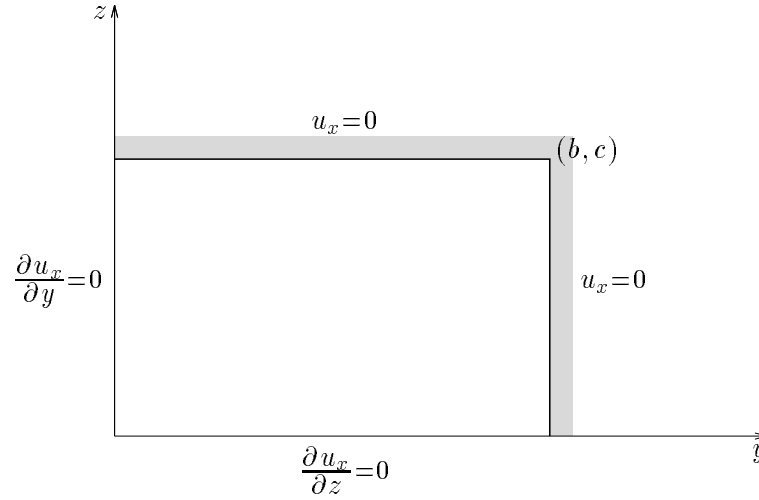
Consider steady pressure-driven flow of an incompressible Newtonian liquid in an infinitely long tube of rectangular cross section of width  $2b$  and height  $2c$ , as shown in Fig. 6.29b. The flow is governed by the Poisson equation

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6.206)$$

Taking into account the symmetry with respect to the planes  $y=0$  and  $z=0$ , the flow can be studied only in the first quadrant (Fig. 6.30). The boundary conditions can then be written as follows:

$$\left. \begin{array}{l} \frac{\partial u_x}{\partial y} = 0 \quad \text{on} \quad y = 0 \\ u_x = 0 \quad \text{on} \quad y = b \\ \frac{\partial u_x}{\partial z} = 0 \quad \text{on} \quad z = 0 \\ u_x = 0 \quad \text{on} \quad z = c \end{array} \right\}. \quad (6.207)$$





**Figure 6.30.** Boundary conditions for the flow in a tube of rectangular cross section.

Equation (6.206) can be transformed into the Laplace equation by setting

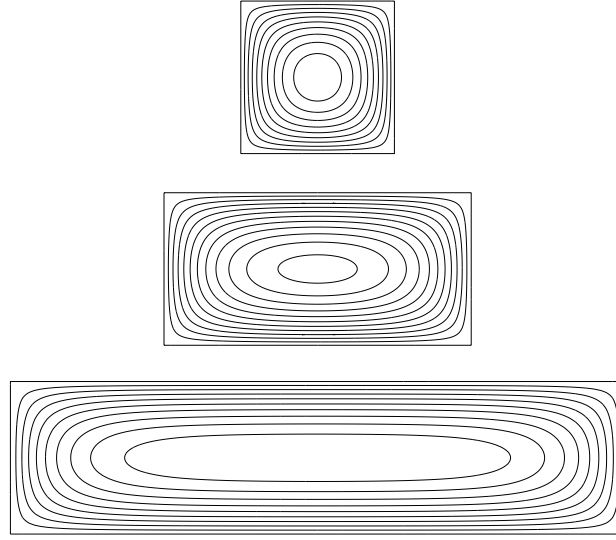
$$u_x(y, z) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (c^2 - z^2) + u'_x(y, z). \quad (6.208)$$

Note that the first term in the right hand side of Eq. (6.208) is just the Poiseuille flow profile between two infinite plates placed at  $z = \pm c$ . Substituting Eq. (6.208) into Eqs. (6.206) and (6.207), we get

$$\frac{\partial^2 u'_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u'_x}{\partial z^2} = 0, \quad (6.209)$$

subject to

$$\left. \begin{array}{ll} \frac{\partial u'_x}{\partial y} = 0 & \text{on } y = 0 \\ u'_x = \frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} (c^2 - z^2) & \text{on } y = b \\ \frac{\partial u'_x}{\partial z} = 0 & \text{on } z = 0 \\ u'_x = 0 & \text{on } z = c \end{array} \right\}. \quad (6.210)$$



**Figure 6.31.** Velocity contours for steady unidirectional flow in tubes of rectangular cross section with width-to-height ratio equal to 1, 2 and 4.

The above problem can be solved using separation of variables (see Problem 6.13). The solution is

$$u_x(y, z) = -\frac{1}{2\eta} \frac{\partial p}{\partial x} c^2 \left[ 1 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 + 4 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\alpha_k^3} \frac{\cosh\left(\frac{\alpha_k y}{c}\right)}{\cosh\left(\frac{\alpha_k b}{c}\right)} \cos\left(\frac{\alpha_k z}{c}\right) \right] \quad (6.211)$$

where

$$\alpha_k = (2k - 1) \frac{\pi}{2}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (6.212)$$

In Fig. 6.31, we show the velocity contours predicted by Eq. (6.211) for different values of the width-to-height ratio. It is observed that, as this ratio increases, the velocity contours become horizontal away from the two vertical walls. This indicates that the flow away from the two walls is approximately one-dimensional (the dependence of  $u_x$  on  $y$  is weak).

The volumetric flow rate is given by

$$Q = -\frac{4}{3\eta} \frac{\partial p}{\partial x} b c^3 \left[ 1 - \frac{6c}{b} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\tanh\left(\frac{\alpha_k b}{c}\right)}{\alpha_k^5} \right]. \quad (6.213)$$

□

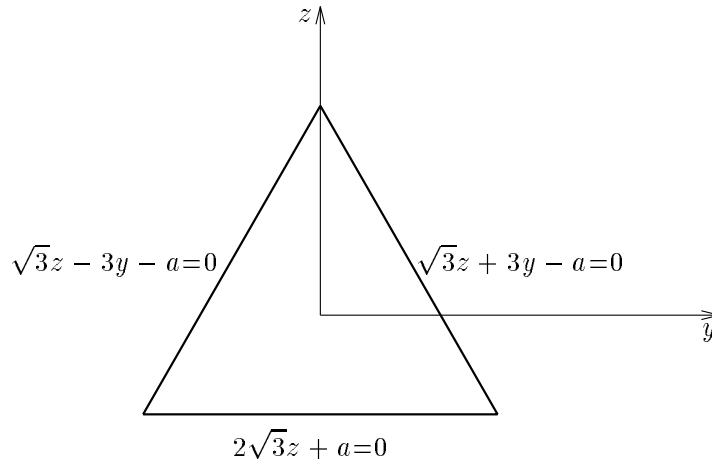
**Example 6.7.3. Poiseuille flow in a tube of triangular cross section**

Consider steady pressure-driven flow of a Newtonian liquid in an infinitely long tube whose cross section is an equilateral triangle of side  $a$ , as shown in Fig. 6.29c. Once again, the flow is governed by the Poisson equation

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial p}{\partial x}. \quad (6.214)$$

If the origin is set at the centroid of the cross section, as in Fig. 6.32, the three sides of the triangle lie on the lines

$$2\sqrt{3}z + a = 0, \quad \sqrt{3}z + 3y - a = 0 \quad \text{and} \quad \sqrt{3}z - 3y - a = 0.$$



**Figure 6.32.** Equations of the sides of an equilateral triangle of side  $a$  when the origin is set at the centroid.

Since the velocity  $u_x(y, z)$  is zero on the wall, the following solution form is prompted

$$u_x(y, z) = A (2\sqrt{3}z + a) (\sqrt{3}z + 3y - a) (\sqrt{3}z - 3y - a), \quad (6.215)$$

where  $A$  is a constant to be determined so that the governing Eq. (6.214) is satisfied. Differentiation of Eq. (6.215) gives

$$\frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2} = -18A (2\sqrt{3}z + a) \quad \text{and} \quad \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} = 18A (2\sqrt{3}z - a).$$

It turns out that Eq. (6.214) is satisfied provided that

$$A = -\frac{1}{36\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{a}. \quad (6.216)$$

Thus, the velocity profile is given by

$$u_x(y, z) = -\frac{1}{36\eta} \frac{\partial p}{\partial x} \frac{1}{a} (2\sqrt{3}z + a)(\sqrt{3}z + 3y - a)(\sqrt{3}z - 3y - a). \quad (6.217)$$

The volumetric flow rate is

$$Q = -\frac{\sqrt{3}}{320\eta} \frac{\partial p}{\partial x} a^4. \quad (6.218)$$

□

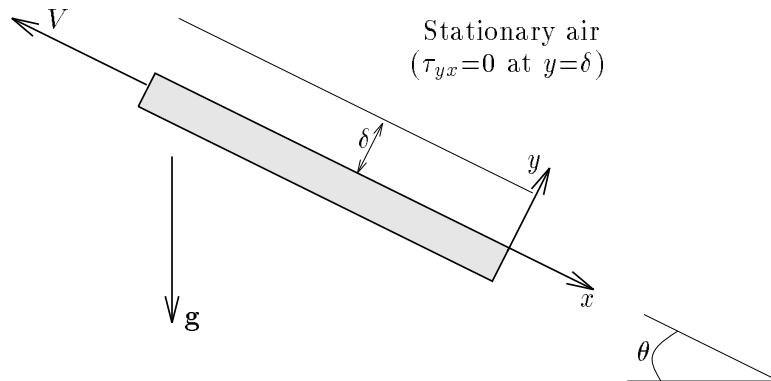
The unidirectional flows examined in this chapter are good approximations to many important industrial and processing flows. Channel, pipe and annulus flows are good prototypes of liquid transferring systems. The solutions to these flows provide the means to estimate the power required to overcome friction and force the liquid through, and the residence or traveling time. Analytical solutions are extremely important to the design and operation of viscometers [13]. In fact, the most known viscometers were named after the utilized flow: Couette viscometer, capillary or pressure viscometer and parallel plate viscometer [14].

The majority of the flows studied in this chapter are easily extended to *nearly unidirectional* flows in non-parallel channels or pipes and annuli, and to non-uniform films under the action of surface tension, by means of the *lubrication approximation* [15], examined in detail in Chapter 9. Transient flows that involve vorticity generation and diffusion are dynamically similar to steady flows overtaking submerged bodies giving rise to *boundary layers* [9], which are studied in Chapter 8.

## 6.8 Problems

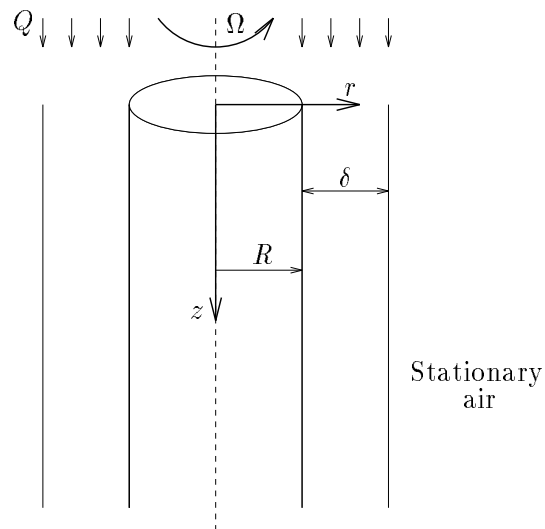
**6.1.** Consider flow of a thin, uniform film of an incompressible Newtonian liquid on an infinite, inclined plate that moves upwards with constant speed  $V$ , as shown in Fig. 6.33. The ambient air is assumed to be stationary, and the surface tension is negligible.

- (a) Calculate the velocity  $u_x(y)$  of the film in terms of  $V$ ,  $\delta$ ,  $\rho$ ,  $\eta$ ,  $g$  and  $\theta$ .
- (b) Calculate the speed  $V$  of the plate at which the net volumetric flow rate is zero.



**Figure 6.33.** *Film flow down a moving inclined plate.*

**6.2.** A thin Newtonian film of uniform thickness  $\delta$  is formed on the external surface of a vertical, infinitely long cylinder, which rotates at angular speed  $\Omega$ , as illustrated in Fig. 6.34. Assume that the flow is steady, the surface tension is zero and the ambient air is stationary.



**Figure 6.34.** *Thin film flow down a vertical rotating cylinder.*

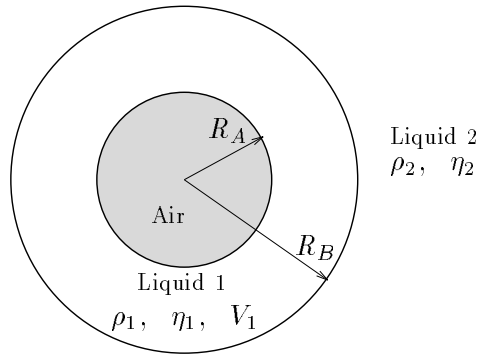
- Calculate the two nonzero velocity components.
- Sketch the streamlines of the flow.
- Calculate the volumetric flow rate  $Q$ .

(d) What must be the external pressure distribution,  $p(z)$ , so that uniform thickness is preserved?

**6.3.** A spherical bubble of radius  $R_A$  and of constant mass  $m_0$  grows radially at a rate

$$\frac{dR_A}{dt} = k,$$

within a spherical incompressible liquid droplet of density  $\rho_1$ , viscosity  $\eta_1$  and volume  $V_1$ . The droplet itself is contained in a bath of another Newtonian liquid of density  $\rho_2$  and viscosity  $\eta_2$ , as shown in Fig. 6.35. The surface tension of the inner liquid is  $\sigma_1$ , and its interfacial tension with the surrounding liquid is  $\sigma_2$ .



**Figure 6.35.** *Liquid film growing around a gas bubble.*

- What is the growth rate of the droplet?
- Calculate the velocity distribution in the two liquids.
- What is the pressure distribution within the bubble and the two liquids?
- When does the continuity of the thin film of liquid around the bubble break down?

**6.4.** The equations

$$\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} = 0$$

and

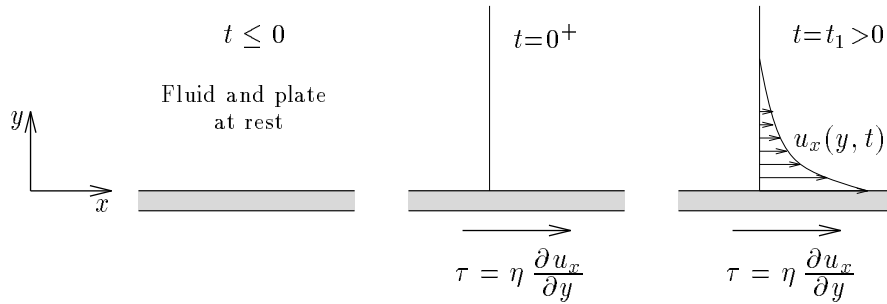
$$\rho \left( u_y \frac{\partial u_x}{\partial y} + u_x \frac{\partial u_x}{\partial x} \right) = \eta \frac{\partial^2 u_x}{\partial y^2}$$

govern the (bidirectional) *boundary layer* flow near a horizontal plate of infinite dimensions coinciding with the  $xz$ -plane. The boundary conditions for  $u_x(x, y)$  and  $u_y(x, y)$  are

$$\begin{aligned} u_x = u_y = 0 & \quad \text{at } y=0 \\ u_x = V, \quad u_y = 0 & \quad \text{at } y=\infty \end{aligned}$$

Does this problem admit a similarity solution? What is the similarity variable?

**6.5.** Consider a semi-infinite incompressible Newtonian liquid of viscosity  $\eta$  and density  $\rho$ , bounded below by a plate at  $y=0$ , as illustrated in Fig. 6.36. Both the plate and liquid are initially at rest. Suddenly, at time  $t=0^+$ , a constant shear stress  $\tau$  is applied along the plate.



**Figure 6.36.** Flow near a plate along which a constant shear stress is suddenly applied.

(a) Specify the governing equation, the boundary and the initial conditions for this flow problem.

(b) Assuming that the velocity  $u_x$  is of the form

$$u_x = \frac{\tau}{\eta} \sqrt{\nu t} f(\xi), \quad (6.219)$$

where

$$\xi = \frac{y}{\sqrt{\nu t}}, \quad (6.220)$$

show that

$$f(\xi) - \xi f'(\xi) = 2 f''(\xi). \quad (6.221)$$

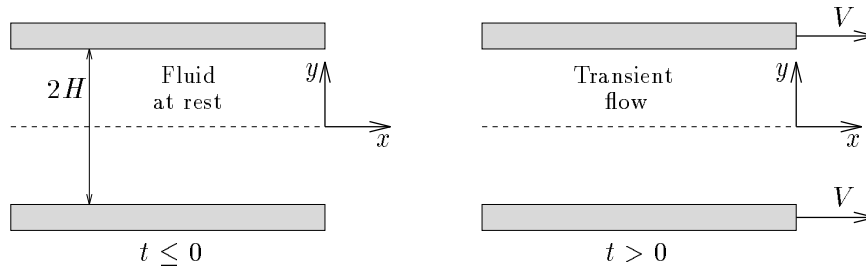
(The primes denote differentiation with respect to  $\xi$ .)

(c) What are the boundary conditions for  $f(\xi)$ ?

(d) Show that

$$u_x = \frac{\tau}{\eta} \sqrt{\nu t} \left\{ \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/4} - \xi \left[ 1 - \operatorname{erf} \left( \frac{\xi}{2} \right) \right] \right\}. \quad (6.222)$$

**6.6.** A Newtonian liquid is contained between two horizontal, infinitely long and wide plates, separated by a distance  $2H$ , as illustrated in Fig. 6.37. The liquid is initially at rest; at time  $t=0^+$ , both plates start moving with constant speed  $V$ .



**Figure 6.37.** *Transient Couette flow (Problem 6.6).*

- Identify the governing equation, the boundary and the initial conditions for this transient flow.
- What is the solution for  $t \leq 0$ ?
- What is the solution for  $t \rightarrow \infty$ ?
- Find the time-dependent solution  $u_x(y, t)$  using separation of variables.
- Sketch the velocity profiles at  $t=0, 0^+, t_1 > 0$  and  $\infty$ .

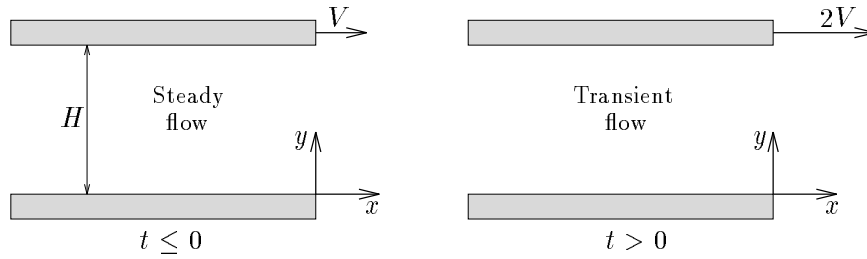
**6.7.** A Newtonian liquid is contained between two horizontal, infinitely long and wide plates, separated by a distance  $H$ , as illustrated in Fig. 6.38. Initially, the liquid flows steadily, driven by the motion of the upper plate which moves with constant speed  $V$ , while the lower plate is held stationary. Suddenly, at time  $t=0^+$ , the speed of the upper plate changes to  $2V$ , resulting in transient flow.

- Identify the governing equation, the boundary and the initial conditions for this transient flow.
- What is the solution for  $t \leq 0$ ?
- What is the solution for  $t \rightarrow \infty$ ?
- Find the time-dependent solution  $u_x(y, t)$ .
- Sketch the velocity profiles at  $t=0, 0^+, t_1 > 0$  and  $\infty$ .

**6.8.** Using separation of variables, show that Eq. (6.154) is indeed the solution of the transient plane Poiseuille flow, described in Example 6.6.4.

**6.9.** A Newtonian liquid, contained between two concentric, infinitely long, vertical cylinders of radii  $R_1$  and  $R_2$ , where  $R_2 > R_1$ , is initially at rest. At time  $t=0^+$ , the





**Figure 6.38.** *Transient Couette flow (Problem 6.7).*

inner cylinder starts rotating about its axis with constant angular velocity  $\Omega_1$ .

(a) Specify the governing equation for this transient flow.

(b) Specify the boundary and the initial conditions.

(c) Calculate the velocity  $u_\theta(r, t)$ .

**6.10.** An infinitely long, vertical rod of radius  $R$  is initially held fixed in an infinite pool of Newtonian liquid. At time  $t=0^+$ , the rod starts rotating about its axis with constant angular velocity  $\Omega$ .

(a) Specify the governing equation for this transient flow.

(b) Specify the boundary and the initial conditions.

(c) Calculate the velocity  $u_\theta(r, t)$ .

**6.11.** Consider a Newtonian liquid contained between two concentric, infinitely long, horizontal cylinders of radii  $\kappa R$  and  $R$ , where  $\kappa < 1$ . Assume that the liquid is initially at rest. At time  $t=0^+$ , the outer cylinder starts translating parallel to its axis with constant speed  $V$ . The geometry of the flow is shown in Fig. 6.13.

(a) Specify the governing equation for this transient flow.

(b) Specify the boundary and the initial conditions.

(c) Calculate the velocity  $u_z(r, t)$ .

**6.12.** A Newtonian liquid is initially at rest in a vertical, infinitely long cylinder of radius  $R$ . At time  $t=0^+$ , the cylinder starts both translating parallel to itself with constant speed  $V$  and rotating about its axis with constant angular velocity  $\Omega$ .

(a) Calculate the corresponding steady-state solution.

(b) Specify the governing equation for the transient flow.

(c) Specify the boundary and the initial conditions.

(d) Examine whether the superposition principle holds for this transient *bidirectional* flow.

(e) Show that the time-dependent velocity and pressure profiles evolve to the steady-

state solution as  $t \rightarrow \infty$ .

**6.13.** Using separation of variables, show that Eq. (6.211) is the solution of steady Newtonian Poiseuille flow in a tube of rectangular cross section, described in Example 6.7.2.

**6.14.** Consider steady Newtonian Poiseuille flow in a horizontal tube of square cross section of side  $2b$ . Find the velocity distribution in the following cases:

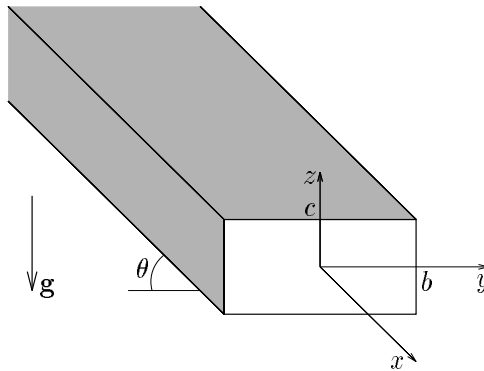
- The liquid does not slip on any wall.
- The liquid slips on only two opposing walls with constant slip velocity  $u_w$ .
- The liquid slips on all walls with constant slip velocity  $u_w$ .
- The liquid slips on only two opposing walls according to the slip law

$$\tau_w = \beta u_w, \quad (6.223)$$

where  $\tau_w$  is the shear stress, and  $\beta$  is a material slip parameter. (Note that, in this case, the slip velocity  $u_w$  is not constant.)

**6.15.** Integrate  $u_x(y, z)$  over the corresponding cross sections, to calculate the volumetric flow rates of the Poiseuille flows discussed in the three examples of Section 6.7.

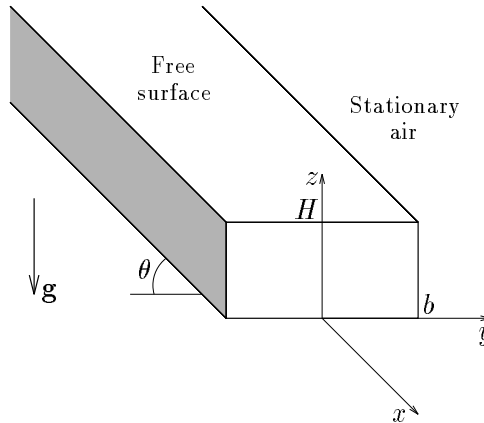
**6.16.** Consider steady, unidirectional, gravity-driven flow of a Newtonian liquid in an inclined, infinitely long tube of rectangular cross section of width  $2b$  and height  $2c$ , illustrated in Fig. 6.39.



**Figure 6.39.** Gravity-driven flow in an inclined tube of rectangular cross section.

- Simplify the three components of the Navier-Stokes equation for this two-dimensional unidirectional flow.
- Calculate the pressure distribution  $p(z)$ .
- Specify the boundary conditions on the first quadrant.
- Calculate the velocity  $u_x(y, z)$ . How is this related to Eq. (6.211)?

**6.17.** Consider steady, gravity-driven flow of a Newtonian rectangular film in an inclined infinitely long channel of width  $2b$ , illustrated in Fig. 6.40. The film is assumed to be of uniform thickness  $H$ , the surface tension is negligible, and the air above the free surface is considered stationary.



**Figure 6.40.** Gravity-driven film flow in an inclined channel.

- Taking into account possible symmetries, specify the governing equation and the boundary conditions for this two-dimensional unidirectional flow.
- Is the present flow related to that of the previous problem?
- Calculate the velocity  $u_x(y, z)$ .

## 6.9 References

- C. Pozrikidis, *Introduction to Theoretical and Computational Fluid Dynamics*, Oxford University Press, New York, 1997.
- H.F. Weinberger, *Partial Differential Equations*, Blaisdell Publishing Company, Massachusetts, 1965.
- A.G. Hansen, *Similarity Analysis of Boundary Value Problems in Engineering*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1964.
- D.J. Acheson, *Elementary Fluid Dynamics*, Clarendon Press, Oxford, 1995.
- R.B. Bird, R.C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of Polymeric Liquids: Fluid Mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1987.
- J.D. Logan, *Applied Mathematics*, John Wiley, New York, 1987.

7. R.S. Brodkey, *The Phenomena of Fluid Motions*, Addison-Wesley Series in Chemical Engineering, 1967.
8. Lord Rayleigh, *Scientific Papers*, Dover, 1964.
9. H. Schlichting, *Boundary Layer Theory*, McGraw-Hill, New York, 1968.
10. R. Berger, "Intégration des équations du mouvement d'un fluide visqueux incompressible," in *Handbuch der Physik* **8**(2), Springer, Berlin, 1-384 (1963).
11. R.K. Shah, and A.L. London, *Laminar Flow Forced Convection in Ducts*, Academic, 1978.
12. M.H. Protter and H.F. Weinberger, *Maximum Principles in Differential Equations*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1967.
13. H.A. Barnes, J.F. Hutton and K. Walters, *An Introduction to Rheology*, Elsevier, Amsterdam, 1989.
14. J.M. Dealy, *Rheometers for Molten Plastics*, Van Nostrand Rheinhold, 1982.
15. O. Reynolds, "Papers on Mechanical and Physical Aspects," *Phil. Trans. Roy. Soc.* **177**, 157 (1886).

---

---

# Index

- annular flow, 23, 27
- axisymmetric flow, 2, 19, 28
- axisymmetric Poiseuille flow, 20
- axisymmetric radial flow, 2, 19
- axisymmetric rectilinear flow, 2, 19
- axisymmetric torsional flow, 2, 19, 28
- axisymmetry, 19
  
- Bagley correction, 23
  
- capillary viscometer, 23
- circular Couette flow, 31, 34
- Couette flow, 5, 7, 31, 34
  
- film flow, 15
- flow
  - axisymmetric flow, 2, 19, 28
  - Couette flow, 5, 7, 31, 34
  - fully developed flows, 3
  - in an annulus, 23, 27
  - plug flow, 8
  - Poiseuille flow, 5, 9, 10, 12, 14, 20
  - radial flow, 2, 19
  - rectilinear flow, 2, 19
  - spherically symmetric flow, 2
  - spherically symmetric radial flow, 2
  - torsional flow, 2, 19, 28
  - unidirectional flows, 1
  - fully developed flows, 3
  - Hagen-Poiseuille flow, 20
  - helical flow, 39
  
  - L'Hôpital's rule, 28
  
  - plane Couette flow, 5, 7, 34
  - plane Poiseuille flow, 9, 10, 12, 14
  - plug flow, 8
  - Poiseuille flow, 5, 9, 10, 12, 14, 20
  
  - radial flow, 2, 19
  - rectilinear flow, 2
  - rod climbing, 37
  - rod dipping, 37
  
  - separation of variables, 1
  - shear-driven flow, 5
  - similarity transformation, 1
  - slip, 10
  - slip velocity, 10
  - spherically symmetric flow, 2
  - spherically symmetric radial flow, 2
  - swirling flow, 28
  
  - Taylor series, 26
  - Taylor vortices, 31
  - torsional flow, 2, 19, 28
  
  - unidirectional flows, 1