ΜΑΣ032: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εαρινό εξάμηνο 2011-2012, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
1 κουίζ, Διάρκεια: 40 min
1 Φεβρουαρίου, 2012

ΟΝΟΜΑ: **Αρ. Πολ. Ταυτ.**

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{u} = (1,-2,3,1), \quad \boldsymbol{v} = (2,1,0,4), \quad \boldsymbol{w} = (0,0,1)$$

(α) Υπολογίστε τα αθροίσματα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ **4μ.**
(β) Υπολογίστε τα **εσωτερικά γινόμενα** $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ **4μ.**
(γ) Βρείτε τις **νόρμες** των **u, v,** και **w.** **3μ.**
(δ) Για ποια τιμή του κ είναι το διάνυσμα

$$\boldsymbol{t} = (\kappa,1,0,\kappa)$$

ορθογώνιο με το **u;** **4μ.**

(α)

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (1,-2,3,1)+(2,1,0,4) = (3,-1,3,5)$

Το άθροισμα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ δεν ορίζεται.

(β)

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 2-2+0+4 = 4$

Το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ δεν ορίζεται.

(γ)

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1+4+9+1} = \sqrt{15}$

$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4+1+0+16} = \sqrt{21}$

$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{0+0+1} = 1$

(δ) Για να είναι τα **u** και **t** ορθογώνια πρέπει

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t} = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa-2+0+\kappa = 0 \quad \Rightarrow \quad \kappa = 1$

ΜΑΣ 042 - ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
1ο Κουίζ, 10 Φεβρουαρίου 2010

Όνομα: ΑΜ:

Πρόβλημα 1 Έστω τα διανύσματα

$$\mathbf{u} = (1, -1, 1, 1, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{v} = (1, 2, -3, 1, -1)\,.$$

(α) Υπολογίστε τα $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ και $2\mathbf{u} - \mathbf{v}$. 3μ.
(β) Βρείτε το **εσωτερικό γινόμενο** $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$. 2μ.
(γ) Βρείτε την **απόσταση** μεταξύ $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$. 2μ.
(δ) Βρείτε τη **νόρμα** του $\mathbf{u}$. 2μ.
(ε) **Κανονικοποιείστε** το $\mathbf{u}$. 2μ.
(στ) Βρείτε την τιμή του κ για να είναι το $\mathbf{w}=(\kappa, 0, 1, 0, \kappa)$ **ορθογώνιο** με το $\mathbf{u}$. 3μ.

(α) $\mathbf{u}+\mathbf{v}=(1+1, -1+2, 1-3, 1+1, 0-1)=(2, 1, -2, 2, -1)$

$2\mathbf{u}-\mathbf{v}=(2, -2, 2, 2, 0)-(1, 2, -3, 1, -1)=(1, -4, 5, 1, 11)$.

(β) $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}=1-2-3+1-0=-3$

(γ)

$$d = \sqrt{(u_1 - v_1)^2 + (u_2 - v_2)^2 + (u_3 - v_3)^2 + (u_4 - v_4)^2 + (u_5 - v_5)^2} = \sqrt{0+9+16+0+1} = \sqrt{26}$$

(δ) $||\mathbf{u}||=\sqrt{1+1+1+1+0}=2$

(ε)

$$\mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} = \frac{1}{2}\,(1, -1, 1, 1, 0)$$

(στ) Αν το $\mathbf{w}$ είναι ορθογώνιο στο $\mathbf{u}$, τότε

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{u} = 0 \quad\Longrightarrow\quad (\kappa, 0, 1, 0, \kappa)\cdot(1, -1, 1, 1, 0) = 0 \quad\Longrightarrow\quad \kappa+0+1+0+0 = 0 \quad\Longrightarrow\quad \kappa = -1.$$

Πρόβλημα 3. Έστω ο πίνακας:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 5 \\ -2 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

(α) Με τι ισούνται τα στοιχεία a_{14} και a_{32}; **2μ.**

(β) Βρείτε το **ίχνος** του A. **3μ.**

(γ) Κατασκευάστε τους ακόλουθους πίνακες:

$$B = (i-j)_{3\times 3}\,, \quad C = (1-\delta_{ij})_{3\times 3}$$

4μ.

(δ) Υπολογίστε τον $2B + C$. **3μ.**

(α) a_{14}=5 και a_{32}=0.

(β)

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{4} a_{ii} = 1+2+3+4 = 10$$

(γ)

$$B = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(δ)

$$2B + C = \begin{bmatrix} 0 & -2 & -4 \\ 2 & 0 & -2 \\ 4 & 2 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -3 \\ 3 & 0 & -1 \\ 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$

ΜΑΣ032: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ
Εαρινό εξάμηνο 2011-2012, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
1 κουίζ, Διάρκεια: 40 min
1 Φεβρουαρίου, 2012

ΟΝΟΜΑ: **Αρ. Πολ. Ταυτ.**

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$\boldsymbol{u} = (1,-2,3,1), \quad \boldsymbol{v} = (2,1,0,4), \quad \boldsymbol{w} = (0,0,1)$$

(α) Υπολογίστε τα αθροίσματα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ 4μ.
(β) Υπολογίστε τα **εσωτερικά γινόμενα** $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v}$ και $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ 4μ.
(γ) Βρείτε τις **νόρμες** των **u, v,** και **w.** 3μ.
(δ) Για ποια τιμή του κ είναι το διάνυσμα

$$\boldsymbol{t} = (\kappa, 1, 0, \kappa)$$

ορθογώνιο με το **u;** 4μ.

(α)

$\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v} = (1,-2,3,1) + (2,1,0,4) = (3,-1,3,5)$

Το άθροισμα $\boldsymbol{u}+\boldsymbol{w}$ δεν ορίζεται.

(β)

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{v} = 2-2+0+4 = 4$

Το εσωτερικό γινόμενο $\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{w}$ δεν ορίζεται.

(γ)

$\|\boldsymbol{u}\| = \sqrt{1+4+9+1} = \sqrt{15}$

$\|\boldsymbol{v}\| = \sqrt{4+1+0+16} = \sqrt{21}$

$\|\boldsymbol{w}\| = \sqrt{0+0+1} = 1$

(δ) Για να είναι τα **u** και **t** ορθογώνια πρέπει

$\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{t} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \kappa - 2 + 0 + \kappa = 0 \quad \Longrightarrow \quad \kappa = 1$

Πρόβλημα 3. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

(α) Με τι ισούνται τα στοιχεία a_{13}, b_{22} και c_{32}; **3μ.**

(β) Βρείτε τους πίνακες A+2B, A+I και A-C. **6μ.**

(γ) Βρείτε τα ίχνη των A και B. **4μ.**

(α)

$$a_{13} = 1, \quad b_{22} = -2, \quad c_{32} = 0$$

(β)

$$A + 2B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} + 2\begin{bmatrix} 4 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+8 & 1+4 & 1+0 \\ -1-4 & -3-4 & 2+2 \\ 4+10 & 0-2 & 2+6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & 5 & 1 \\ -5 & -7 & 4 \\ 14 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$A + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & -3 & 2 \\ 4 & 0 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 2 \\ 4 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Η πράξη A-C δεν ορίζεται αφού οι πίνακες A και C δεν έχουν τις ίδιες διαστάσεις.

(γ)

$$trA = 2 - 3 + 2 = 1 \quad \text{και} \quad trB = 4 - 2 + 3 = 5$$

Πρόβλημα 5.
(α) Ορίστε τα μηδενικά στοιχεία των διανυσματικών χώρων $\boldsymbol{R}^2, M_{2\times2}, \boldsymbol{C}$ $και$ P_5. 6μ.
(β) Ορίστε παραδείγματα **στοιχείων** των πιο πάνω χώρων και στη συνέχεια βρείτε τα **αντίθετά** τους στοιχεία. 8μ.

(α)

Χώρος	Μηδενικό στοιχείο
$\boldsymbol{R}^2$	$\mathbf{0} = (0,0)$
$M_{2\times2}$	$O = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
$\boldsymbol{C}$	0
P_5	$0(x) = 0$

(β) Στον $\boldsymbol{R}^2$

$$u = (1,2) \quad \text{και} \quad (-u) = (-1,-2)$$

Στον $M_{2\times2}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad (-A) = \begin{bmatrix} -1 & -2 \\ -4 & 0 \end{bmatrix}$$

Στον $\boldsymbol{C}$

$$z = 2 + 3i \quad \text{και} \quad (-z) = -2 - 3i$$

Στον P_5

$$p(x) = 1 + x + 2x^2 - x^3 + 10x^5 \quad \text{και} \quad (-p)(x) = -1 - x - 2x^2 + x^3 - 10x^5$$

Πρόβλημα 6. Δώστε τα ονόματα των πιο κάτω ιδιοτήτων:
(α) $(u+v)+w = u+(v+w), \quad u,v,w \in V$ **2μ.**
(β) $u+v = v+u, \quad u,v \in V$ **2μ.**
(γ) $\lambda\,(u+v) = \lambda u + \lambda v, \quad u,v \in V, \lambda \in K$ **2μ.**

(α) Προσεταιριστική ιδιότητα.

(β) Αντιμεταθετική ιδιότητα.

(γ) Επιμεριστική ιδιότητα.

Πρόβλημα 6.

(α) Δείξτε ότι ο αντίστροφος αντιστρέψιμου πίνακα είναι μοναδικός. **2μ.**

(β) Αν ο nxn πίνακας A είναι αντιστρέψιμος δείξτε ότι

$$\left(A^T\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^T$$

2μ.

(γ) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B \in M_{n\times m}$, δείξτε ότι

$$tr(AB) = tr(BA)$$

4μ.

(δ) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος δείξτε ότι

$$(A+I)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1}$$

3μ.

(α) Έστω A^{-1} και A' δύο αντίστροφοι του αντιστρέψιμου πίνακα A:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \kappa\alpha\iota \quad AA' = A'A = I$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$A'A = I \quad \Rightarrow \quad A'AA^{-1} = IA^{-1} \quad \Rightarrow \quad A'I = A^{-1} \quad \Rightarrow \quad A' = A^{-1}$$

Άρα ο αντίστροφος του A είναι μοναδικός.

(β) Αναστρέφοντας την

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \kappa\alpha\iota \quad AA' = A'A = I$$

έχουμε

$$(AA^{-1})^T = (A^{-1}A)^T = I^T \quad \Rightarrow \quad (A^{-1})^T A^T = A^T (A^{-1})^T = I$$

Άρα ο A^T είναι αντιστρέψιμος και

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$$

(γ) Για τα δύο γινόμενα έχουμε

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{m\times m} \quad \Rightarrow \quad tr(AB) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

και

$$BA = \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}\right)_{n\times n} \quad \Rightarrow \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{ki} = tr(AB)$$

(δ)

$$(I+A)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1} \quad \Leftrightarrow \quad (I+A)^{-1} = (A^{-1}+I)^{-1}(A^{-1}+I) - (A^{-1}+I)^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$(I+A)^{-1} = (A^{-1}+I)^{-1}\ (A^{-1}+I-I) = (A^{-1}+I)^{-1}\ A^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$(I+A)^{-1} = [A(A^{-1}+I)]^{-1} = (AA^{-1}+A)^{-1} = (I+A)^{-1}$$

Άρα η αρχική ταυτότητα ισχύει.

Πρόβλημα 4.

(α) Κατασκευάστε τον πίνακα

$$A = \left(\frac{i-j}{i+j}\right)_{4\times 3}$$

4μ.

(β) Κατασκευάστε τον πίνακα

$$B = (2i - j)_{2\times 4}$$

4μ.

(α)

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1/3 & -2/4 \\ 1/3 & 0 & -1/5 \\ 2/4 & 1/5 & 0 \\ 3/5 & 2/6 & 1/7 \end{bmatrix}$$

(β)

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & -2 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 2. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) Τετραγωνικός πίνακας. 1μ.

(β) Κάτω τριγωνικός πίνακας. 1μ.

(ii) **Ίχνος πίνακα** 1μ.

(iii) **Τετραγωνικός πίνακας** 1μ.

(iv) **Άνω τριγωνικός πίνακας** 1μ.

(α) **Τετραγωνικός** είναι κάθε $n \times n$ πίνακας (δηλ. ένας πίνακας με ίσα πλήθη γραμμών και στηλών).

(β) **Κάτω τριγωνικός** είναι ένας $n \times n$ πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία πάνω από την κύρια διαγώνιό του είναι ίσα με 0:

$$a_{ij} = 0\,, \quad i = 1, \dots, n-1\,, \ \ j = i+1, \dots, n$$

(ii) Το **ίχνος** ενός $n{\times}n$ πίνακα A ορίζεται ως εξής:

$$trA = a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn}$$

(iii) **Τετραγωνικός** είναι ένας $n{\times}n$ πίνακας.

(iv) **Άνω τριγωνικός** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας A του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν:

$$a_{ij} = 0 \text{ για } i > j$$