2 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ

Στο προηγούμενο κεφάλαιο εισαγάγαμε, ως προέκταση των γεωμετρικών χώρων δύο και τριών διαστάσεων, το χώρο $\mathbb{R}^n$ καθώς και τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού για τα στοιχεία (ή διανύσματα) του $\mathbb{R}^n$. Αναφέραμε επίσης ορισμένες ιδιότητες που ισχύουν για τις πράξεις αυτές.

Αντίθετα, στην παράγραφο αυτή θα ασχοληθούμε με αφηρημένους χώρους, εφοδιασμένους με αντίστοιχες, όπως στον $\mathbb{R}^n$, πράξεις των οποίων οι ιδιότητες δεν αποδεικνύονται αλλά εισάγονται αξιωματικά.

Οπως θα διαπιστώσουμε στον ορισμό, η ιδιότητα ενός συνόλου V ως διανυσματικού χώρου είναι άρρηκτα συνυφασμένη με ένα άλλο σύνολο, ένα σώμα K, όπως:

— το σύνολο των πραγματικών αριθμών $\mathbb{R}$,

— το σύνολο των μιγαδικών αριθμών $\mathbb{C}$, ή

— το σύνολο των ρητών αριθμών $\mathbb{Q}$.

Ο αναγνώστης μπορεί να βρεί μια καλή και σύντομη εισαγωγή για τις Ομάδες και τα Σώματα στο βιβλίο: L. Brand, "Μαθηματική Ανάλυση", Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 1984.

2.1 Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

<u>Ορισμός 2.1.1</u>

Εστω V ένα μη κενό σύνολο και K ένα σώμα, για τα οποία δεχόμαστε τα κάτωθι αξιώματα:

I Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος u, v με $u, v \in V$ ισχύει η πράξη της <u>πρόσθεσης</u> που συμβολίζεται με $+$:

$$u+v \quad \text{όπου} \quad u, v \in V.$$

Το $u+v$ είναι μοναδικό και καλείται <u>άθροισμα</u> των u και v. Το V είναι <u>κλειστό ως προς την πρόσθεση</u>, δηλ.

$$\text{αν} \quad u, v \in V \quad \text{τότε} \quad u+v \in V.$$

II Σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος λ, u με $\lambda \in K$ και $u \in V$ ισχύει η (εξωτερική) πράξη του <u>βαθμωτού πολλαπλασιασμού</u> που συμβολίζεται με $\cdot$:

$$\lambda \cdot u \quad \text{όπου} \quad \lambda \in K \quad \text{και} \quad u \in V.$$

(Χάριν απλότητας η τελεία συνήθως παραλείπεται).
Το λu είναι μοναδικό και καλείται <u>βαθμωτό πολλαπλάσιο</u> (scalar multiple) του u επί το λ. Το V είναι <u>κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό</u>, δηλ.

$$\text{αν} \quad \lambda \in K \quad \text{και} \quad u \in V \quad \text{τότε} \quad \lambda u \in V.$$

Το σύνολο V, εφοδιασμένο με τις πιο πάνω πράξεις, καλείται <u>διανυσματικός ή γραμμικός χώρος</u> (vector or linear space) <u>πάνω στο K</u>, αν ισχύουν οι παρακάτω ιδιότητες:

(A1) $(u+v)+w = u+(v+w) \qquad \forall u, v, w \in V$
(προσεταιριστική ιδιότητα).

(A2) Υπάρχει ένα στοιχείο του V που το συμβολίζουμε με $\mathbb{O}$ και το καλούμε <u>μηδενικό διάνυσμα</u> ή <u>μηδενικό στοιχείο</u> του V, τέτοιο ώστε:

$$u+\mathbb{O} = u \qquad \forall u \in V.$$

(A3) Για κάθε στοιχείο u του V υπάρχει ένα στοιχείο του V που το καλούμε <u>αντίθετο στοιχείο του u</u> και το συμβολίζουμε με $-u$, τέτοιο ώστε:

$$u+(-u) = \mathbb{O}, \quad u, -u \in V$$

(A4) $u + v = v + u \quad \forall u, v \in V$.
(αντιμεταθετική ιδιότητα)

(B1) $\lambda(u+v) = \lambda u + \lambda v \quad \forall \lambda \in K$ και $u, v \in V$
(επιμεριστική ιδιότητα ως προς την πρόσθεση).

(B2) $(\lambda+\mu)u = \lambda u + \mu u \quad \forall \lambda, \mu \in K$ και $u \in V$
(επιμεριστική ιδιότητα ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό).

(B3) $(\lambda\mu)u = \lambda(\mu u) \quad \forall \lambda, \mu \in K$ και $u \in V$

(B4) Αν 1 είναι το μοναδιαίο στοιχείο του K, τότε
$$1u = u \quad \forall u \in V$$

Τα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου θα τα λέμε επίσης <u>διανύσματα</u> ή <u>σημεία</u>.

<u>Παρατήρηση 1.</u>

Από τη θεωρία των αλγεβρικών δομών είναι γνωστό ότι ένα σύνολο G, εφοδιασμένο με μια πράξη πρόσθεσης με τις ιδιότητες A1, A2 και A3 ονομάζεται <u>(προσθετική) ομάδα</u>.

Εάν, επιπλέον, η πράξη αυτή έχει και την ιδιότητα A4, τότε το σύνολο G ονομάζεται <u>μεταθετική ή αβελιανή ομάδα</u> (commutative or abelian group).

Από την άλλη πλευρά, τα υπόλοιπα τέσσερα αξιώματα (B1-B4) αφορούν τη "δράση" του σώματος K στο V. Η διαφορετική τους αρίθμηση δείχνει ακριβώς αυτή τη διαφορά.

Εχοντας την ορολογία αυτή υπόψη, μπορούμε να ορίσουμε, συνοπτικότερα, ένα σύνολο V ως διανυσματικό χώρο αν αυτό είναι μια μεταθετική ομάδα ως προς την πρόσθεση και έχει μια εξωτερική πράξη, τον (βαθμωτό) πολλαπλασιασμό, σε σχέση με ένα σώμα K, που έχει τις ιδιότητες B1, B2, B3 και B4.

Παρατήρηση 2

Αν $K=\mathbb{R}$, τότε ο V καλείται πραγματικός διανυσματικός χώρος. Αν $K=\mathbb{C}$, ο V καλείται μιγαδικός διανυσματικός χώρος. Στα επόμενα, θα ασχοληθούμε κυρίως με πραγματικούς διανυσματικούς χώρους.

Παράδειγμα 1.

Το ίδιο το σώμα K είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον εαυτό του αν ως πρόσθεση ορίσουμε την πρόσθεση στο K και ως βαθμωτό πολλαπλασιασμό, τον πολλαπλασιασμό στο K.

Ετσι για παράδειγμα, το σώμα $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος στον εαυτό του, το σώμα $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον εαυτό του, το σώμα $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι διανυσματικός χώρος πάνω στον εαυτό του κ.λ.π.

Παράδειγμα 2

Ο χώρος $\mathbb{R}^n$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού όπως ορίστηκαν στο προηγούμενο κεφάλαιο είναι διανυσματικός χώρος.

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να δείξει ότι όλα τα αξιώματα A1-A4 και B1-B4 ισχύουν.

Παράδειγμα 3

Το σύνολο $\mathbb{C}$ των μιγαδικών αριθμών

$$\mathbb{C}=\{a+ib \mid a,b\in\mathbb{R},\ i^2=-1\}$$

με πράξεις τη συνήθη πρόσθεση μιγαδικών αριθμών και το συνήθη πολλαπλασιασμό επί πραγματικό αριθμό, δηλ.

$$(a_1 + i b_1) + (a_2 + i b_2) = (a_1 + a_2) + i (b_1 + b_2)$$

και

$$\lambda (a_1 + i b_1) = \lambda a_1 + i \lambda b_1$$

για κάθε $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ αποτελεί ένα διανυσματικό χώρο πάνω στο $\mathbb{R}$.

Το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{C}$ είναι το

$$\mathbb{O} = 0 + i 0 = 0.$$

Το αντίθετο στοιχείο του $u = a + i b$, $a, b \in \mathbb{R}$ είναι το $-u = -(a + i b) = (-a) + i(-b)$.

Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι όλα τα αξιώματα Α1-Α4 και Β1-Β4 ισχύουν.

Παράδειγμα 4

Το σύνολο P_n των πολυωνύμων του x με πραγματικούς συντελεστές και με βαθμό $\leq n$ όπου $n \in \mathbb{N}_0$, εφοδιασμένο με τη γνωστή πρόσθεση:

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + (b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n) =$$
$$= (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n) x^n$$

και με βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\lambda (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) = (\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + \cdots + (\lambda a_n) x^n, \ \lambda \in \mathbb{R}$$

είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Επαληθεύουμε στη συνέχεια όλες τις ιδιότητες του Ορισμού 2.1.1.

(Α1) Θεωρούμε τρία τυχόντα πολυώνυμα $p(x), q(x), r(x) \in P_n$:

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
$$q(x) = b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n$$
$$r(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_n x^n$$

$$(p(x) + q(x)) + r(x) = (a_0 + b_0) + (a_1 + b_1) x + \cdots + (a_n + b_n) x^n +$$
$$+ \gamma_0 + \gamma_1 x + \cdots + \gamma_n x^n$$
$$= (a_0 + b_0 + \gamma_0) + (a_1 + b_1 + \gamma_1) x + \cdots + (a_n + b_n + \gamma_n) x^n =$$

$= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + (b_0+\gamma_0) + (b_1+\gamma_1) x + \cdots + (b_n+\gamma_n) x^n$
$= p(x) + (q(x) + r(x))$

(A2) Το μηδενικό στοιχείο του P_n είναι το

$$\mathbb{O}(x) = 0 + 0 \cdot x + \cdots + 0 \cdot x^n = 0. \quad [p(x) + \mathbb{O}(x) = p(x)].$$

(A3) Για κάθε πολυώνυμο
$$p(x) = a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n$$
υπάρχει το αντίθετο πολυώνυμο.
$$-p(x) = (-a_0) + (-a_1) x + \cdots + (-a_n) x^n.$$

$$[\ p(x) + (-p(x)) = \mathbb{O}\ ].$$

(A4). $p(x) + q(x) = (a_0+b_0) + (a_1+b_1) x + \cdots + (a_n+b_n) x^n$
$= (b_0+a_0) + (b_1+a_1) x + \cdots + (b_n+a_n) x^n$
$= q(x) + p(x).$

(B1) $\lambda(p(x)+q(x)) = \lambda[(a_0+b_0) + (a_1+b_1) x + \cdots + (a_n+b_n) x^n]$

$= (\lambda a_0 + \lambda b_0) + (\lambda a_1 + \lambda b_1) x + \cdots + (\lambda a_n + \lambda b_n) x^n$
$= (\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + \cdots + (\lambda a_n) x^n + (\lambda b_0) + (\lambda b_1) x + \cdots + (\lambda b_n) x^n$
$= \lambda(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \lambda(b_0 + b_1 x + \cdots + b_n x^n)$
$= \lambda p(x) + \lambda q(x)$, $\quad \lambda \in \mathbb{R}$.

(B2) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$
$(\lambda+\mu) p(x) = (\lambda+\mu)(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$
$= (\lambda+\mu) a_0 + (\lambda+\mu) a_1 x + \cdots + (\lambda+\mu) a_n x^n$
$= (\lambda a_0 + \mu a_0) + (\lambda a_1 + \mu a_1) x + \cdots + (\lambda a_n + \mu a_n) x^n$
$= (\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + \cdots + (\lambda a_n) x^n + (\mu a_0) + (\mu a_1) x + \cdots + (\mu a_n) x^n$
$= \lambda(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) + \mu(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n)$
$= \lambda p(x) + \mu p(x)$

(B3) Για κάθε $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.

$$
\begin{aligned}
(\lambda\mu)\, p(x) &= (\lambda\mu)\, (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\
&= (\lambda\mu a_0) + (\lambda\mu a_1) x + \cdots + (\lambda\mu a_n) x^n \\
&= \mu \left((\lambda a_0) + (\lambda a_1) x + \cdots + (\lambda a_n) x^n \right) \\
&= \mu\, (\lambda p(x))
\end{aligned}
$$

(B4) Για τη μονάδα 1 (μοναδιαίο στοιχείο του $\mathbb{R}$) και για κάθε στοιχείο $p(x) \in P_n$ έχουμε.

$$
\begin{aligned}
1\, p(x) &= 1\, (a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n) \\
&= (1 a_0) + (1 a_1) x + \cdots + (1 a_n) x^n \\
&= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n = p(x)
\end{aligned}
$$

<u>Παράδειγμα 5.</u>

Εστω $C[a,b]$ το σύνολο των πραγματικών συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$. Είναι γνωστό ότι το άθροισμα

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x)$$

δυο συνεχών συναρτήσεων f και g είναι επίσης συνεχής συνάρτηση, δηλ. αν $f, g \in C[a,b]$ τότε $f+g \in C[a,b]$.

Επίσης, για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f \in C[a,b]$ η συνάρτηση

$$(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$$

είναι συνεχής στο $[a,b]$: $\lambda f \in C[a,b]$.

Το μηδενικό στοιχείο του $C[a,b]$ είναι η μηδενική συνάρτηση :

$$0(x) = 0 \quad \forall x \in [a,b].$$

Η αντίθετη συνάρτηση της $f(x) \in C[a,b]$ είναι η

$$(-f)(x) = -f(x) \quad \forall x \in [a,b].$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι ο $C[a,b]$ με τις πιο πάνω πράξεις είναι διανυσματικός χώρος. Σημειώνουμε ότι τα στοιχεία του $C[a,b]$ είναι συναρτήσεις $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και όχι πραγματικοί αριθμοί.

Ενας διανυσματικός χώρος με στοιχεία συναρτήσεις ονομάζεται <u>χώρος συναρτήσεων</u> ή <u>συναρτησιακός χώρος</u> (functional space).

Παράδειγμα 6

Το σύνολο $M_{m\times n}$ των $m\times n$ πινάκων εφοδιασμένο με τη γνωστή πρόσθεση πινάκων και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό είναι διανυσματικός χώρος.

Ας πάρουμε για παράδειγμα το χώρο $M_{2\times 3}$. Αν είναι

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B=\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

δύο στοιχεία του $M_{2\times 3}$, τότε

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A+B=\begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & a_{13}+b_{13} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & a_{23}+b_{23} \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$$

Για κάθε $\lambda \in K$ έχουμε

$$\lambda A=\lambda\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \lambda a_{12} & \lambda a_{13} \\ \lambda a_{21} & \lambda a_{22} & \lambda a_{23} \end{bmatrix} \in M_{2\times 3}$$

Το μηδενικό στοιχείο του $M_{2\times 3}$ είναι ο μηδενικός πίνακας

$$0=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

και το αντίθετο στοιχείο του $A\in M_{2\times 3}$ είναι ο πίνακας

$$-A=\begin{bmatrix} -a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & -a_{22} & -a_{23} \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 7

Έστω A το σύνολο όλων των πραγματικών ακολουθιών

$$\{a_n\}=(a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots).$$

Αν ορίσουμε τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού :

$$\{a_n\}+\{b_n\}=(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)+(b_1,b_2,\dots,b_n,\dots)$$
$$=(a_1+b_1,\ a_2+b_2,\dots,a_n+b_n,\dots)$$
$$=\{a_n+b_n\}$$

και

$$\lambda\{a_n\}=\lambda\,(a_1,a_2,\dots,a_n,\dots)=(\lambda a_1,\lambda a_2,\dots,\lambda a_n,\dots)$$
$$=\{\lambda a_n\}$$

όπου $\{a_n\},\{b_n\}\in A$ και $\lambda\in\mathbb{R}$, τότε το A γίνεται ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$.

Το μηδενικό διάνυσμα του A είναι προφανώς η ακολουθία

$$\{0\}=(0,0,\dots,0,\dots)$$

ενώ το αντίθετο στοιχείο του $\{a_n\}\in A$ είναι η ακολουθία

$$\{-a_n\}=(-a_1,-a_2,\dots,-a_n,\dots).$$

2.1.1 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΩΝ ΧΩΡΩΝ

Οι στοιχειώδεις ιδιότητες των διανυσματικών χώρων συνοψίζονται στις προτάσεις που ακολουθούν.

Πρόταση 2.1.2

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K. Ισχύουν τα εξής:

(α) Το μηδενικό στοιχείο $\mathbb{O}$ του V είναι μοναδικό.

(β) Το αντίθετο στοιχείο $-u$ του $u \in V$ είναι μοναδικό.

(γ) Αν $u, v, w \in V$ και

$$u + w = v + w \quad \text{τότε} \quad u = v.$$

(νόμος της διαγραφής - cancellation law).

(δ) Αν $u \in V$ τότε $-(-u) = u$.

Απόδειξη

(α) Εξ ορισμού υπάρχει ένα μηδενικό στοιχείο $\mathbb{O}$ του V τέτοιο ώστε

$$u + \mathbb{O} = u \qquad \forall\, u \in V \tag{1}$$

Εστω $\mathbb{O}'$ ένα άλλο μηδενικό στοιχείο του V, οπότε

$$u + \mathbb{O}' = u \qquad \forall\, u \in V \tag{2}$$

Από την (2) και την ιδιότητα Α4 (αντιμεταθετικότητα) παίρνουμε:

$$u = u + \mathbb{O}' = \mathbb{O}' + u$$

Θέτοντας $u = \mathbb{O}$ βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{O} = \mathbb{O}' + \mathbb{O} \tag{3}$$

Από τις (1) και (3) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{O} = \mathbb{O}'$$

Αρα το μηδενικό στοιχείο του V είναι μοναδικό.

(β) Εξ ορισμού υπάρχει το αντίθετο στοιχείο $-u$ του $u \in V$ τέτοιο ώστε

$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbb{O} \tag{4}$$

Εστω u' ένα άλλο αντίθετο στοιχείο του u, οπότε

$$u+u' = u'+u = \mathbb{O} \qquad (5)$$

Για το u' έχουμε:

$$\begin{aligned} u' = u' + \mathbb{O} &= u' + (u + (-u)) \\ &= (u'+u) + (-u) \qquad [A1] \\ &= \mathbb{O} + (-u) = -u . \end{aligned}$$

Βρήκαμε ότι $u' = -u$. Αρα το αντίθετο στοιχείο του u είναι μοναδικό.

(γ) Εχουμε

$$\begin{aligned} u + w &= v + w \implies \\ (u+w) + (-w) &= (v+w) + (-w) \implies \\ u + (w + (-w)) &= v + (w + (-w)) \qquad [A1] \implies \\ u + \mathbb{O} &= v + \mathbb{O} \implies \\ u &= v . \end{aligned}$$

(δ) Για τα u και $-u$ έχουμε:

$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbb{O} \qquad (6)$$

$$(-u) + (-(-u)) = \mathbb{O} \qquad (7)$$

Εξισώνοντας τις (6) και (7) βρίσκουμε:

$$(-u) + u = (-u) + (-(-u))$$

Από το (γ) (νόμος της απαλοιφής) βρίσκουμε τελικά ότι

$$-(-u) = u . \quad \blacksquare$$

<u>Πρόταση 2.1.3</u>

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$. Ισχύουν τα εξής:

(α) $0 \cdot u = \mathbb{O} \quad \forall u \in V$

(β) Αν $a \in \mathbb{R}$ και $\mathbb{O} \in V$ τότε $a\mathbb{O} = \mathbb{O}$

(γ) Αν $au = \mathbb{O}$ όπου $a \in \mathbb{R}$ και $u \in V$, τότε

$$a = 0 \quad \text{ή} \quad u = \mathbb{O}$$

(δ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και $u \in V$ ισχύει

$$(-a)u = -(au)$$

Ειδικότερα,

$$(-1)u = -u$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφήνεται ως άσκηση. Για το (δ) μπορούμε να αποδείξουμε πρώτα τις

$$-(au) = a(-u) \qquad (1)$$

$$a(-u) = (-a)u \qquad (2)$$

από τις οποίες προκύπτει αμέσως το ζητούμενο. $\square$

2.2 ΥΠΟΧΩΡΟΙ

Σ' ένα γραμμικό χώρο V ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζουν τα υποσύνολα του που είναι κλειστά ως προς τις πράξεις της προσθέσεως και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V.

Για παράδειγμα, ας πάρουμε το διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$ και τα κάτωθι υποσύνολά του:

$$S_1 = \{(x,y) \mid xy = 1 \;,\; x, y \in \mathbb{R}\}$$

και

$$S_2 = \{(x,y) \mid y = 2x \;,\; x, y \in \mathbb{R}\}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι το S_1 δεν είναι κλειστό ως προς τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμου. Πράγματι, ενώ

$$(1,1) \in S_1 \quad \text{και} \quad (2, \tfrac{1}{2}) \in S_1 \;,$$

το άθροισμά τους

$$(1,1) + (2, \tfrac{1}{2}) = (3, \tfrac{3}{2}) \notin S_1$$

αφού $3 \cdot \frac{3}{2} = \frac{9}{2} \neq 1$.

Ανάλογα, ενώ

$$(-1,-1) \in S_1 \;,$$

το

$$4(-1,-1) = (-4,-4) \notin S_1 \quad \text{αφού} \quad (-4)(-4) = 16 \neq 1.$$

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι το ότι το S_1 δεν περιέχει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbb{R}^2$:

$$\mathbb{O} = (0,0) \notin S_1 .$$

Σε αντίθεση με το S_1, το υποσύνολο S_2 είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού, και μάλιστα περιέχει το μηδενικό στοιχείο $\mathbb{O} = (0,0)$ του $\mathbb{R}^2$.

Ας πάρουμε δύο (τυχαία) στοιχεία του S_2:

$$u = (\alpha, 2\alpha) \in S_2 \quad \text{και} \quad v = (\beta, 2\beta) \in S_2 .$$

Το άθροισμα τους είναι:

$$u+v = (a, 2a) + (b, 2b) = \big((a+b), 2(a+b) \big) \in S_2$$

Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lambda u = \lambda (a, 2a) = \big((\lambda a), 2(\lambda a) \big) \in S_2$$

Τέλος έχουμε:

$$(0, 2\cdot 0) = (0,0) = \mathbb{O} \in S_2 .$$

Οι προηγούμενες παρατηρήσεις μας οδηγούν στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 2.2.1

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Ενα μη κενό υποσύνολο W του V καλείται (διανυσματικός) υπόχωρος (subspace) του V αν το W είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω στο K με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V.

Θεώρημα 2.2.2

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο K. Το υποσύνολο W του V είναι υπόχωρος του V αν και μόνο αν ισχύουν τα εξής:

(α) $\mathbb{O} \in W$ όπου $\mathbb{O}$ το μηδενικό στοιχείο του V.

(β) $u+v \in W \quad \forall u, v \in W$
(κλειστότητα ως προς την πρόσθεση).

(γ) $a u \in W \quad \forall u \in W$ και $a \in K$
(κλειστότητα ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό).
Ειδικότερα,

$$(-1) u = -u \in W \quad \forall u \in W .$$

Απόδειξη. Είναι απλή και βασίζεται στους ορισμούς 2.1.1 και 2.2.1. $\square$

<u>Σημείωση</u>: Η συνθήκη 2.2.2γ περιλαμβάνει τη 2.2.2α. αν το W είναι μη κενό υποσύνολο του V.

Πράγματι, αν $u \in W$ θέτοντας $a=0$ παίρνουμε:

$$0 \cdot u \in W \Rightarrow \mathbb{O} \in W.$$

Μπορούμε επίσης εύκολα να αποδείξουμε το ακόλουθο λήμμα.

> <u>Λήμμα 2.2.3</u>
> Ενα μη κενό υποσύνολο W του V είναι ένας υπόχωρος του V αν και μόνο αν
> $$au + v \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u, v \in W.$$

<u>Απόδειξη</u>.

<u>Ικανό</u>

Αν ο W είναι υπόχωρος του V, τότε.

$$au \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u \in W$$

και

$$w + v \in W \quad \forall w, v \in W.$$

Αν θέσουμε $w = au$, τότε ισχύει

$$au + v \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u, v \in W$$

<u>Αναγκαίο</u>.

Θα δείξουμε ότι αν ισχύει

$$au + v \in W \quad \forall a \in K \text{ και } u, v \in W \qquad (1)$$

και το W είναι μη κενό, τότε ικανοποιούνται και οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2.

(α) Εφόσον το W είναι μη κενό τότε υπάρχει τουλάχιστο ένα στοιχείο $u \in W$.

Θέτοντας $a = -1$ και $v = u$ παίρνουμε από την (1):

$$(-1)u + u = (-u) + u = \mathbb{O} \in W$$

(β) Θέτοντας $a = 1$, παίρνουμε από την (1):

$$1 \cdot u + v = u + v \in W$$

(γ) Θέτοντας $v = \mathbb{0}$, παίρνουμε από την (1):

$$au + \mathbb{0} = au \in W$$

Οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται.
Άρα ο W είναι υπόχωρος του V. ■

<u>Παρατήρηση</u>

Το υποσύνολο $\{\mathbb{0}\}$ ενός διανυσματικού χώρου V είναι υπόχωρος του V και ονομάζεται <u>μηδενικός υπόχωρος</u> του V.

Επίσης ο V είναι υπόχωρος του εαυτού του.

Οι $\{\mathbb{0}\}$ και V καλούνται <u>τετριμμένοι υπόχωροι</u> του V.

Αν ο W είναι υπόχωρος του V και $W \neq V$, τότε ο W καλείται <u>γνήσιος υπόχωρος</u> (proper subspace) του V.

<u>Παράδειγμα 1.</u>

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^2$, το σύνολο

$$W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = ax,\ a \in \mathbb{R} \text{ σταθερά}\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$. Στο επίπεδο, το σύνολο W παριστάνει μια ευθεία που περνάει από την αρχή των αξόνων.

Επαληθεύουμε στη συνέχεια τις συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Το $(0,0)$ είναι σημείο της ευθείας $y = ax \Rightarrow$
$\mathbb{O} = (0,0) \in W$

(β) Εστω $u = (x_1, y_1)$ και $v = (x_2, y_2)$ δύο σημεία του W οπότε

$$y_1 = a x_1 \quad \text{και} \quad y_2 = a x_2 .$$

Για το άθροισμα των u και v έχουμε:

$$u + v = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2) = (x_1 + x_2,\ a(x_1 + x_2)) \in W$$

(γ) Για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\lambda u = (\lambda x_1,\ \lambda y_1) = (\lambda x_1,\ a(\lambda x_1)) \in W .$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^3$, το σύνολο

$$Y = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + \gamma z = 0,\ a, b, \gamma \in \mathbb{R} \text{ σταθερές}\}$$

είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^3$. Θα δείξουμε ότι ισχύουν οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Το $\mathbb{O} = (0,0,0) \in Y$, καθόσον

$$a \cdot 0 + b \cdot 0 + \gamma \cdot 0 = 0$$

(β) Εστω $u = (x_1, y_1, z_1)$ και $v = (x_2, y_2, z_2)$ δύο σημεία του Y οπότε:

$$a x_1 + b y_1 + \gamma z_1 = 0 \quad \text{και} \quad a x_2 + b y_2 + \gamma z_2 = 0 . \quad (1)$$

Για το άθροισμα των u και v έχουμε:

$$u + v = (x_1 + x_2,\ y_1 + y_2,\ z_1 + z_2) \in Y ,$$

αφού από τις (1) ισχύει:

$$\alpha(x_1+x_2)+\beta(y_1+y_2)+\gamma(z_1+z_2)=0.$$

(γ) Για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\lambda u=(\lambda x_1,\lambda y_1,\lambda z_1)\in Y$$

αφού

$$\alpha(\lambda x_1)+\beta(\lambda y_1)+\gamma(\lambda z_1)=0.$$

Παράδειγμα 3.

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο των 2x2 πινάκων $M_{2\times2}(\mathbb{R})$. Θα εξετάσουμε αν τα κάτωθι υποσύνολα του $M_{2\times2}$ είναι υπόχωροι του $M_{2\times2}$.

I $W_1=\left\{A : A=\begin{bmatrix}0 & a_{12}\\ a_{21} & 0\end{bmatrix},\ a_{12},a_{21}\in\mathbb{R}\right\}$

II $W_2=\left\{A : A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{bmatrix},\ a_{11},a_{12},a_{21},a_{22}\in\mathbb{Z}\right\}$.

III $W_3=\left\{A : A=\begin{bmatrix}1 & a_{12}\\ 0 & 0\end{bmatrix},\ a_{12}\in\mathbb{R}\right\}$.

IV $W_4=\left\{A : A=\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12}\\ 0 & a_{22}\end{bmatrix},\ a_{11},a_{12},a_{22}\in\mathbb{R}\right\}$.

Σε όλες τις περιπτώσεις θα ελέγξουμε αν ισχύουν οι τρείς συνθήκες του Θ. 2.2.2.

I Το W_1 είναι το υποσύνολο των 2x2 πινάκων με μηδενικά διαγώνια στοιχεία.

(α) $\mathbb{O}=\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}\in W_1$

(β) Εστω
$$A=\begin{bmatrix}0 & a_{12}\\ a_{21} & 0\end{bmatrix}\quad\text{και}\quad B=\begin{bmatrix}0 & b_{12}\\ b_{21} & 0\end{bmatrix}$$

δύο στοιχεία του W_1.

$$A+B=\begin{bmatrix}0 & a_{12}+b_{12}\\ a_{21}+b_{21} & 0\end{bmatrix}\in W_1$$

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$

$$aA = a\begin{bmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & aa_{12} \\ aa_{21} & 0 \end{bmatrix} \in W_1$$

Οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2 ισχύουν. Άρα ο W_1 είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$.

II Το W_2 είναι το υποσύνολο των 2x2 πινάκων των οποίων τα στοιχεία είναι ακέραιοι.

(α) $\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_2$.

(β) Εστω

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \text{ και } B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$$

δύο στοιχεία του W_2.

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του $A+B$ είναι ακέραιοι (ως αθροίσματα ακεραίων). Άρα

$$A+B \in W_2.$$

(γ) Εστω $a \in \mathbb{R}$.

$$aA = a\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} aa_{11} & aa_{12} \\ aa_{21} & aa_{22} \end{bmatrix}$$

Τα στοιχεία του aA δεν είναι γενικά ακέραιοι, ως γινόμενα πραγματικού με ακέραιο. Άρα

$$aA \notin W_2.$$

Η συνθήκη (γ) του Θ. 2.2.2 δεν ισχύει πάντοτε. Άρα ο W_2 δεν είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$.

III Το W_3 είναι το υποσύνολο των 2x2 πινάκων με μηδενική τη δεύτερη γραμμή των οποίων το στοιχείο στη θέση (1,1) είναι ίσο με τη μονάδα

(α) $$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \notin W_3 .$$

Δεν ισχύει η συνθήκη (α) του Θ. 2.2.2. Άρα ο W_3 δεν είναι υπόχωρος του M_{2x2}.

Σημείωση: Ο αναγνώστης μπορεί να δείξει ότι ούτε οι συνθήκες (β)-(γ) του Θ. 2.2.2 ισχύουν.

IV Το W_4 είναι το υποσύνολο των 2x2 άνω τριγωνικών πινάκων.

(α) $$\mathbb{O} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in W_4 .$$

(β) Εστω
$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} \\ 0 & b_{22} \end{bmatrix}$$
δύο στοιχεία του W_4.
$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} \\ 0 & a_{22} + b_{22} \end{bmatrix} \in W_4 .$$

(γ) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$.
$$aA = \begin{bmatrix} a\,a_{11} & a\,a_{12} \\ 0 & a\,a_{22} \end{bmatrix} \in W_4 .$$

Οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα ο W_4 είναι υπόχωρος του M_{2x2}.

Παράδειγμα 4.

Εστω A ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών ακολουθιών. Συμβολίζουμε με B το υποσύνολο (του A) των συγκλινουσών ακολουθιών. Θα δείξουμε ότι το B είναι υπόχωρος του A.

(α) $\mathbb{O} = (0, 0, \ldots, 0, \ldots) \in B$

(Η ακολουθία της οποίας όλοι οι όροι είναι ίσοι με μηδέν συγκλίνει προφανώς στο 0).

(β) Εστω

$$\{a_n\} = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots) \in B.$$
$$\{b_n\} = (b_1, b_2, \ldots, b_n, \ldots) \in B.$$

δύο συγκλίνουσες ακολουθίες. Εφόσον οι $\{a_n\}, \{b_n\}$ συγκλίνουν, τότε και το άθροισμά τους.

$$\{a_n\} + \{b_n\} = \{a_n + b_n\} = (a_1+b_1, a_2+b_2, \ldots, a_n+b_n, \ldots)$$

συγκλίνει $\Longrightarrow$

$$\{a_n\} + \{b_n\} \in B.$$

(γ) Αν η $\{a_n\}$ συγκλίνει, τότε και η

$$a\{a_n\} = \{a a_n\} = (a a_1, a a_2, \ldots, a a_n, \ldots), \ a \in \mathbb{R}$$

συγκλίνει $\Longrightarrow$

$$a\{a_n\} \in B$$

Οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Αρα το B είναι υπόχωρος του A.

<u>Σημείωση</u>: Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι το υποσύνολο Γ των μηδενικών ακολουθιών είναι υπόχωρος του B (και του A).

Παράδειγμα 5.

Εστω $C[a,b]$ ο διανυσματικός χώρος των συναρτήσεων που είναι συνεχείς στο διάστημα $[a,b]$. και Y το υποσύνολο των συναρτήσεων του $C[a,b]$ που είναι παραγωγίσιμες στο $[a,b]$. Τότε το Y είναι ένας γνήσιος υπόχωρος του $C[a,b]$. Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 6.

Εστω F_2 ο διανυσματικός χώρος των πραγματικών συναρτήσεων που είναι δυο φορές παραγωγίσιμες στο $\mathbb{R}$. και W το υποσύνολο των συναρτήσεων του F_2 που είναι λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$3y'' - 2y' + y = 0 \qquad (1).$$

Το W είναι υπόχωρος του F_2.

Ελέγχουμε ξανά αν ικανοποιούνται οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Η μηδενική συνάρτηση $O(x)=0$ είναι προφανώς λύση της (1) $\Rightarrow O(x) \in W$.

(β) Εστω y_1 και y_2 δυο λύσεις της (1), οπότε
$$3y_1'' - 2y_1' + y_1 = 0 \quad \text{και} \quad 3y_2'' - 2y_2' + y_2 = 0$$
Το άθροισμα y_1+y_2 είναι λύση της (1) αφού
$$3(y_1+y_2)'' - 2(y_1+y_2)' + (y_1+y_2) =$$
$$= (3y_1''-2y_1'+y_1) + (3y_2''-2y_2'+y_2) = 0+0 = 0$$
$$\Rightarrow \quad y_1+y_2 \in W.$$

(γ) Αν $a \in \mathbb{R}$, τότε η ay_1 είναι επίσης λύση της (1) αφού
$$3(ay_1)'' - 2(ay_1)' + (ay_1) =$$
$$= a(3y_1'' - 2y_1' + y_1) = a.0 = 0 \Rightarrow$$
$$ay_1 \in W$$

2.3 ΑΘΡΟΙΣΜΑ ΚΑΙ ΤΟΜΗ ΥΠΟΧΩΡΩΝ

Ορισμός 2.3.1

Εστω W_1 και W_2 δυο υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Καλούμε άθροισμα (sum) των W_1 και W_2, και το συμβολίζουμε με W_1+W_2, το σύνολο:

$$W_1+W_2=\{w_1+w_2 \mid w_1\in W_1,\ w_2\in W_2\}.$$

Θεώρημα 2.3.2

Εστω W_1 και W_2 δυο υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο K.

(i) Η τομή $W_1\cap W_2$ των W_1 και W_2 είναι επίσης υπόχωρος του V.

(ii) Το άθροισμα W_1+W_2 των W_1 και W_2 είναι επίσης υπόχωρος του V.

Απόδειξη

Θα δείξουμε και στις δύο περιπτώσεις ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(i) (α) Οι W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του V:

Συνεπώς $\mathbb{O}\in W_1$ και $\mathbb{O}\in W_2 \Rightarrow$

$\mathbb{O}\in W_1\cap W_2$.

(β) Εστω δύο διανύσματα $u,v\in W_1\cap W_2 \Rightarrow$

$u,v\in W_1$ και $u,v\in W_2 \Rightarrow$

$u+v\in W_1$ και $u+v\in W_2$ (γιατί;) $\Rightarrow$

$u+v\in W_1\cap W_2$.

(γ) Εστω $a\in K$ και $u\in W_1\cap W_2 \Rightarrow$

$u\in W_1$ και $u\in W_2 \Rightarrow$

$au\in W_1$ και $au\in W_2 \Rightarrow$

$au\in W_1\cap W_2$.

(ii) (α) $\mathbb{0} \in W_1$ και $\mathbb{0} \in W_2 \Rightarrow$

$\mathbb{0} + \mathbb{0} \in W_1 + W_2 \Rightarrow$

$\mathbb{0} \in W_1 + W_2$

(β) Εστω δύο διανύσματα $u, v \in W_1 + W_2$. Αρα $\exists$ $u_1, v_1 \in W_1$ και $u_2, v_2 \in W_2$ τέτοια ώστε

$$u = u_1 + u_2 \quad \text{και}$$
$$v = v_1 + v_2.$$

Για το άθροισμα των u και v έχουμε:

$$u + v = (u_1 + u_2) + (v_1 + v_2) = (u_1 + v_1) + (u_2 + v_2)$$

Επειδή $u_1 + v_1 \in W_1$ και $u_2 + v_2 \in W_2 \Rightarrow$

$$u + v \in W_1 + W_2.$$

(γ) Εστω ότι $u \in W_1 + W_2$. Αρα υπάρχουν $u_1 \in W_1$ και $u_2 \in W_2$ τέτοια ώστε:

$$u = u_1 + u_2 \Rightarrow$$

$$au = au_1 + au_2 \quad \text{με } a \in K.$$

Επειδή

$au_1 \in W_1$ και $au_2 \in W_2$ (γιατί;) $\Rightarrow$

$$au = au_1 + au_2 \in W_1 + W_2 \quad \blacksquare$$

Το Θεώρημα 2.3.2 γενικεύεται ως εξής:

Θεώρημα 2.3.3

Εστω $W_1, W_2, \ldots, W_k$ υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Τότε τα υποσύνολα

(i) $W_1 \cap W_2 \cap \cdots \cap W_k$ και

(ii) $W_1 + W_2 + \cdots + W_k$

είναι επίσης υπόχωροι του V.

Απόδειξη.

Παρόμοια με αυτή του Θεωρ. 2.3.2. $\square$

Ορισμός 2.3.4

Εστω W_1 και W_2 δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Αν για κάθε στοιχείο $v \in V$ υπάρχουν μοναδικά στοιχεία $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$ τέτοια ώστε

$$v = w_1 + w_2$$

τότε ο V καλείται ευθύ άθροισμα (direct sum) των W_1 και W_2, συμβολικά:

$$V = W_1 \oplus W_2 .$$

Λέμε τότε ότι οι W_1 και W_2 είναι συμπληρωματικοί στον V.

Θεώρημα 2.3.5

Εστω W_1 και W_2 δύο υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V πάνω στο K. Αν

$$W_1 + W_2 = V$$

και

$$W_1 \cap W_2 = \{0\}$$

τότε

$$V = W_1 \oplus W_2 .$$

Απόδειξη

Εστω $v \in V$. Εφόσον $W_1 + W_2 = V$, υπάρχουν στοιχεία $w_1 \in W_1$ και $w_2 \in W_2$ τέτοια ώστε

$$v = w_1 + w_2 \qquad (1).$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.4 για να είναι

$$V = W_1 \oplus W_2$$

πρέπει τα στοιχεία w_1, w_2 να είναι μοναδικά.

Εστω λοιπόν ότι υπάρχουν δύο άλλα στοιχεία

$w_1' \in W_1$ και $w_2' \in W_2$ τέτοια ώστε:

$$v = w_1' + w_2' \qquad (2).$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι:

$$w_1 + w_2 = w_1' + w_2' \Rightarrow$$

$$w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \qquad (3)$$

Λόγω της κλειστότητας των W_1 και W_2 ως προς την πρόσθεση

$$w_1 - w_1' \in W_1 \quad \text{και} \quad w_2' - w_2 \in W_2.$$

οπότε

$$w^* = w_1 - w_1' = w_2' - w_2 \in W_1 \cap W_2.$$

Εφόσον $W_1 \cap W_2 = \{0\} \Rightarrow$

$$w^* = w_1 - w_1' = w_2' - w_2 = 0 \Rightarrow$$

$$w_1' = w_1 \quad \text{και} \quad w_2' = w_2.$$

Άρα τα w_1 και w_2 είναι μοναδικά. ■

<u>Παρατήρηση</u>

Με διαφορετικά λόγια, το Θ. 2.3.5 μας λέει ότι οι W_1, W_2 είναι συμπληρωματικοί στον V αν συμβαίνουν δύο πράγματα:

(i) Κάθε στοιχείο $v \in V$ γράφεται ως άθροισμα δύο στοιχείων των W_1 και W_2, δηλ.

$$v = w_1 + w_2 \quad \text{με} \quad w_1 \in W_1 \quad \text{και} \quad w_2 \in W_2.$$

(ii) Οι W_1, W_2 τέμνονται μόνο στο μηδενικό διάνυσμα ($W_1 \cap W_2 = \{0\}$).

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ο χώρος $\mathbb{R}^2$ είναι το ευθύ άθροισμα των υποχώρων του:

$$X = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}\}.$$

$$Y = \{(0,y) : y \in \mathbb{R}\}.$$

Πράγματι, κάθε στοιχείο $v=(x,y)$ του $\mathbb{R}^2$ γράφεται ως άθροισμα δύο στοιχείων των X και Y:

$$(x,y)=(x,0)+(0,y) \quad \text{όπου} \quad (x,0)\in X \text{ και } (0,y)\in Y.$$

Άρα $X+Y=\mathbb{R}^2$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$X\cap Y=\{(0,0)\}=\{0\}.$$

Σύμφωνα με το Θ. 2.3.5, $\mathbb{R}^2=X\oplus Y$

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 2ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

2.1 Να επαληθευτούν όλα τα παραδείγματα διανυσματικών χώρων της § 2.1.

2.2 Να αποδειχτεί το Θεώρημα 2.1.3

2.3 Εστω P ο διανυσματικός χώρος όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές. Ποια από τα κάτωθι υποσύνολα είναι υπόχωροι του P;

(α) $W_1 = \{ p(x) \mid 2p(0) = p(1) \}$

(β) $W_2 = \{ p(x) \mid p(x) = p(1-x) \}$

(γ) $W_3 = \{ p(x) \mid p(x) \geq 0 \,,\ 1 \leq x \leq 2 \}$

(δ) $W_4 = \{ p(x) \mid p(1) = 0 \}$

2.4 Εστω $C[0,1]$ ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$. Ποια από τα κάτωθι υποσύνολα του $C[0,1]$ είναι υπόχωροί του;

(α) $W_1 = \{ f \in C[0,1] : f(1) = 0 \}$

(β) $W_2 = \{ f \in C[0,1] : f(1) = 1 \}$

(γ) $W_3 = \{ f \in C[0,1] : f(0) = f(1) \}$

(δ) $W_4 = \{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)\,dx = 0 \}$

(ε) $W_5 = \{ f \in C[0,1] : \int_0^1 f(x)\,dx = 1 \}$

2.5 Εστω A το σύνολο των άρτιων συνεχών συναρτήσεων και Π το σύνολο των περιττών συνεχών συναρτήσεων. Να δειχθεί ότι:

$$C(\mathbb{R}) = A \oplus \Pi$$

2.6 Εστω P_2 ο διανυσματικός χώρος των πολυωνύμων βαθμού ≤ 2 με πραγματικούς συντελεστές.
Ποια από τα κάτωθι υποσύνολα του P_2 είναι υπόχωροι του;

(α) $W_1 = \{p(x) : p(x) = a_0 + a_2 x^2, \ \ a_0, a_2 \in \mathbb{R}\}$

(β) $W_2 = \{p(x) : p(x) = n_0 + n_1 x + n_2 x^2, \ \ n_0, n_1, n_2 \in \mathbb{Z}\}$

(γ) $W_3 = \{p(x) : p(x) = 1 + a_1 x + a_2 x^2, \ \ a_1, a_2 \in \mathbb{R}\}$.

2.7 Να δείξετε ότι ο διανυσματικός χώρος $\mathbb{R}^3$ είναι το ευθύ άθροισμα των δύο υπόχωρών του

$$W_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = x_3\}$$

$$W_2 = \{(0, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3\}.$$

2.8 Εαν a_1, a_2 είναι δύο δεδομένοι πραγματικοί αριθμοι, η ακολουθία $\{a_n\}$ που ορίζεται με τον αναδρομικό τύπο

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2} \ , \quad n = 3, 4, \dots$$

λέγεται ακολουθία Fibonacci.
Να δείξετε ότι το σύνολο F των ακολουθιών Fibonacci είναι ένας υπόχωρος του συνόλου A όλων των πραγματικών ακολουθιών.