3 ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΙ ΧΩΡΟΙ ΠΕΠΕΡΑΣΜΕΝΗΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ

3.1 ΥΠΟΧΩΡΟΙ ΠΑΡΑΓΟΜΕΝΟΙ ΑΠΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Ορισμός 3.1.1

Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πάνω σ' ένα σώμα K. Ας είναι

$$S=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}, \quad m\in\mathbb{N}$$

ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Καλούμε __γραμμικό συνδυασμό__ (linear combination) των διανυσμάτων $u_1,u_2,\dots,u_m$ κάθε διάνυσμα της μορφής

$$u=\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\dots+\lambda_mu_m, \quad \lambda_i\in K$$

Παρατήρηση: είναι προφανές ότι $u\in V$.

__Παράδειγμα 1__. Ας πάρουμε τα διανύσματα

$$u_1=(1,1,1) \quad \text{και} \quad u_2=(-1,0,1) \quad \text{του } \mathbb{R}^3.$$

Τα

$$u_1-u_2=(1,1,1)-(-1,0,1)=(2,1,0)$$

και

$$2u_1+3u_2=2(1,1,1)+3(-1,0,1)=(-1,2,5)$$

είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2.

__Παράδειγμα 2__ Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u_1=(1,1,1) \quad \text{και} \quad u_2=(1,0,1) \quad \text{του } \mathbb{R}^3.$$

Θα εξετάσουμε αν τα διανύσματα

$$(i) \quad u=(1,2,1) \quad \text{και} \quad (ii) \quad u=(3,2,2)$$

μπορούν να εκφραστούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2.

(i) Αναζητούμε $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \Leftrightarrow$$

$$(1,2,1) = \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,0,1) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) = (1,2,1) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 \quad\;\;\; = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα είναι συμβιβαστό και έχει τη (μοναδική) λύση: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = -1$.

Συνεπώς, το u εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2:

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 = 2(1,1,1) - (1,0,1).$$

(ii) Αναζητούμε πάλι $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$(3,2,2) = \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,0,1) \Leftrightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1, \lambda_1 + \lambda_2) = (3,2,2) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 \quad\;\;\; = 2 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 2 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Συνεπώς το u δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2.

<u>Θεώρημα 3.1.2</u>

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V:

$$S = \{u_1, u_2, \dots, u_m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Το σύνολο όλων των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $u_1, u_2, \dots, u_m$:

$$L(S) = \left\{ u \in V : u = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i u_i, \ \lambda_i \in K \right\}$$

είναι υπόχωρος του V.

<u>Απόδειξη</u>

Επαληθεύουμε τις συνθήκες (α)-(γ) του Θ. 2.2.2.

(α) Για $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0$ παίρνουμε:

$$0u_1 + 0u_2 + \cdots + 0u_m = \mathbb{0} \in L(S)$$

(β) Εστω δυο γραμμικοί συνδυασμοί των $u_1, u_2, \ldots, u_m$:

$$u = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_m u_m \quad , \; \lambda_i \in K.$$

$$v = \mu_1 u_1 + \mu_2 u_2 + \cdots + \mu_m u_m \quad , \; \mu_i \in K.$$

Εχουμε για το άθροισμα των u και v:

$$u + v = (\lambda_1 + \mu_1) u_1 + (\lambda_2 + \mu_2) u_2 + \cdots + (\lambda_m + \mu_m) u_m \in L(S)$$

(γ) Για $a \in K$ έχουμε

$$au = (a\lambda_1) u_1 + (a\lambda_2) u_2 + \cdots + (a\lambda_m) u_m \in L(S).$$

Σύμφωνα με το Θ. 2.2.2 ο $L(S)$ είναι υπόχωρος του V. $\blacksquare$

Ορισμός 3.1.3

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το σύνολο $L(S)$ των γραμμικών συνδυασμών των διανυσμάτων $u_1, u_2, \ldots, u_m$ είναι ο υπόχωρος του V που <u>παράγεται</u> (ή γεννιέται) από τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_m$ λέμε ότι <u>παράγουν</u> (ή γεννούν) τον $L(S)$ και καλούνται <u>γεννήτορες</u> του $L(S)$

Για το $L(S)$ χρησιμοποιούνται επίσης οι εξής συμβολισμοί:

$$L(u_1, u_2, \ldots, u_m), \quad [S] \quad , \quad [u_1, u_2, \ldots, u_m]$$

ή ακόμα

$$\text{span}[u_1, u_2, \ldots, u_n].$$

Το $L(S)$ καλείται <u>γραμμική θήκη</u> ή <u>περίβλημα</u> (linear span) των $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Παράδειγμα 1

Τα διανύσματα

$$e_1 = (1,0,0), \quad e_2 = (0,1,0) \quad \text{και} \quad e_3 = (0,0,1)$$

παράγουν τον $\mathbb{R}^3$.

Πράγματι, κάθε διάνυσμα του $\mathbb{R}^3$, $x = (x_1, x_2, x_3)$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των e_1, e_2, e_3:

$$(x_1, x_2, x_3) = x_1 e_1 + x_2 e_2 + x_3 e_3$$

Παράδειγμα 2

Στο χώρο P_n των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές και με βαθμό $\leq n$, το σύνολο

$$S = \{1, x, x^2, \dots, x^n\}$$

είναι ένα σύνολο γεννητόρων για τον P_n, δηλ. ο P_n παράγεται από το S.

Πραγματικά, κάθε πολυώνυμο του P_n,

$$p(x) = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$$

είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του S.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει ο αναγνώστης ότι και το σύνολο

$$S' = \{1, x, 1+x, x^2, \dots, x^n\}$$

είναι επίσης ένα σύνολο γεννητόρων για τον P_n.

Παρατηρούμε ότι ένας διανυσματικός χώρος μπορεί να έχει περισσότερα από ένα σύνολα γεννητόρων.

Είναι ενδιαφέρον — και πολύ χρήσιμο για τις εφαρμογές — να σημειωθεί ότι ο υπόχωρος που παράγεται από τα διανύσματα $u_1, u_2, \dots, u_m$ δεν αλλάζει αν κάνουμε μια ή περισσότερες φορές τις επόμενες πράξεις:

(Π1): αλλάζουμε την τάξη των $u_1, u_2, \dots, u_m$.

(Π2): πολλαπλασιάσουμε ένα από τα $u_1, u_2, \dots, u_m$ με ένα μη μηδενικό στοιχείο του K.

(Π3): αντικαταστήσουμε ένα από τα $u_1, u_2, \ldots, u_m$ με τον εαυτό του αυξημένο κατά ένα πολλαπλάσιο ενός άλλου απ' αυτά.

Η μαθηματική διατύπωση των (Π1)-(Π3) είναι η ακόλουθη:

(Π1): $L(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_j, \ldots, u_m) = L(u_1, \ldots, u_j, \ldots, u_i, \ldots, u_m)$

(Π2): $L(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_m) = L(u_1, \ldots, a u_i, \ldots, u_m)$, $a \neq 0 \in K$.

(Π3): $L(u_1, \ldots, u_i, \ldots, u_m) = L(u_1, \ldots, u_i + b u_j, \ldots, u_m)$, $j \neq i$

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του πρώτου μέλους είναι και γραμμικός συνδυασμός των διανυσμάτων του δεύτερου μέλους και αντίστροφα.
Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Οι πράξεις (Π1)-(Π3) ονομάζονται <u>στοιχειώδεις πράξεις</u>.

<u>Παράδειγμα</u> Ας είναι V ένας διανυσματικός χώρος πάνω στο $\mathbb{R}$ και X_1, X_2, X_3 διανύσματά του τέτοια ώστε

$$3X_1 - 5X_2 + 2X_3 = \mathbb{O}$$

Θα δείξουμε ότι: $L(X_1, X_2) = L(X_2, X_3)$.

Εφαρμόζουμε διαδοχικά τις στοιχειώδεις πράξεις και παίρνουμε:

$$L(X_1, X_2) \overset{\Pi 2}{=} L(3X_1, X_2) \overset{\Pi 3}{=} L(3X_1 - 5X_2, X_2)$$
$$= L(-2X_3, X_2) \overset{\Pi 2}{=} L(X_3, X_2) \overset{\Pi 1}{=} L(X_2, X_3).$$

3.2 ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΕΞΑΡΤΗΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Στην περίπτωση που ένας διανυσματικός χώρος παράγεται από ένα πεπερασμένο σύνολο γεννητόρων είναι βασικό να καθορίσουμε σύνολα γεννητόρων με το μικρότερο αριθμό στοιχείων. Για την επίτευξη του πιο πάνω στόχου είναι απαραίτητη η εισαγωγή της έννοιας της γραμμικής ανεξαρτησίας.

Ορισμός 3.2.1

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και ένα πεπερασμένο υποσύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ του V. Τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ θα λέμε ότι είναι <u>γραμμικώς εξαρτημένα</u> (linearly dependent) ή απλώς <u>εξαρτημένα</u> αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n \in K$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbb{O}$$

Στην περίπτωση αυτή θα λέμε επίσης ότι το πεπερασμένο σύνολο $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι <u>γραμμικώς εξαρτημένο</u>.

Αν η πιο πάνω σχέση ισχύει μόνον όταν όλα τα λ_i είναι μηδέν, δηλ. αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbb{O} \implies \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0,$$

θα λέμε ότι τα διανύσματα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι <u>γραμμικώς ανεξάρτητα</u> (linearly independent).

<u>Παράδειγμα</u> Τα διανύσματα

$u_1 = (2, -1, 3, 1)$, $u_2 = (0, 3, -2, 4)$ και $u_3 = (0, 0, 2, -3)$

του $\mathbb{R}^4$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι η σχέση

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = \mathbb{O}$$

ισχύει μόνο όταν $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

Στο παράδειγμά μας η πιο πάνω σχέση γράφεται:

$\lambda_1(2,-1,3,1)+\lambda_2(0,3,-2,4)+\lambda_3(0,0,2,-3)=(0,0,0,0)$

και οδηγεί στο ομογενές γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 2\lambda_1 \qquad\qquad\quad &= 0 \\ -\lambda_1+3\lambda_2 \qquad &= 0 \\ 3\lambda_1-2\lambda_2+2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1+4\lambda_2-3\lambda_3 &= 0 \end{aligned}$$

που έχει μοναδική λύση τη $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Αν ο V είναι διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K και S ένα μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο του V, τότε από τον Ορισμό 3.2.1 αποδεικνύονται εύκολα οι ακόλουθες προτάσεις:

(A) Αν τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, τότε κάθε μη κενό γνήσιο υποσύνολο του S αποτελείται από γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία.

Απόδειξη.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε το υποσύνολο που περιέχει τα πρώτα m στοιχεία του S. $(m<n)$. Αν τα $u_1,u_2,\ldots,u_m$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε σύμφωνα με τον ορισμό 3.2.1 υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_m\in K$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_mu_m=\mathbb{O}$$

και

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_mu_m+0u_{m+1}+\cdots+0u_n=\mathbb{O}$$

Υπάρχουν δηλ. $\lambda_1,\lambda_2,\ldots,\lambda_n$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε:

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_nu_n=\mathbb{O}$$

Αυτό είναι άτοπο καθόσον τα $u_1,u_2,\ldots,u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Η αρχική μας υπόθεση δεν ισχύει, άρα τα $u_1,u_2,\ldots,u_m$ είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητα. ∎

(Β) Το στοιχείο $u \in V$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, αν και μόνο αν $u \neq \mathbb{O}$.
<u>Απόδειξη</u>: Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

(Γ) Αν μερικά στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε το S αποτελείται από γραμμικώς εξαρτημένα στοιχεία.
<u>Απόδειξη</u>: Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Ειδικότερα, αν $\mathbb{O} \in S$, τότε τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα.
<u>Απόδειξη</u>
Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $u_1 = \mathbb{O}$. Τότε

$$\lambda_1 \mathbb{O} + 0 u_2 + \cdots + 0 \cdot u_n = \mathbb{O} \quad \text{με} \quad \lambda_1 \neq 0 .$$

Τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι, συνεπώς, εξαρτημένα. $\blacksquare$

(Δ) Τα στοιχεία u_1, u_2 του V είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν και μόνο όταν ένα από αυτά είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου.
<u>Απόδειξη</u>: Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Η τελευταία πρόταση μπορεί να γενικευθεί και για οποιοδήποτε πεπερασμένο σύνολο στοιχείων ενός διανυσματικού χώρου όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

<u>Θεώρημα 3.2.2</u>
Εστω V ένας διανυσματικός χώρος και $S = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V με περισσότερα από ένα στοιχεία. Τα στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα όταν και μόνο όταν κάποιο στοιχείο είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων στοιχείων.

Απόδειξη

Υποθέτουμε ότι τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. Τότε, σύμφωνα με τον Ορισμό 3.2.1, θα υπάρχουν αριθμοί $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n \in K$ χωρίς να είναι όλοι μηδέν, με την ιδιότητα

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \dots + \lambda_n u_n = 0 .$$

Αν υποθέσουμε ότι $\lambda_k \neq 0$ τότε έχουμε

$$-\lambda_k u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n .$$

οπότε πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη με το $-1/\lambda_k$ καταλήγουμε στη σχέση:

$$u_k = \left(-\frac{\lambda_1}{\lambda_k}\right) u_1 + \dots + \left(-\frac{\lambda_{k-1}}{\lambda_k}\right) u_{k-1} + \left(-\frac{\lambda_{k+1}}{\lambda_k}\right) u_{k+1} + \dots + \left(-\frac{\lambda_n}{\lambda_k}\right) u_n$$

Έτσι το u_k είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στοιχείων του S.

Αντίστροφα, αν το u_k είναι γραμμικός συνδυασμός των υπόλοιπων στοιχείων του S, δηλ. αν

$$u_k = \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n ,$$

τότε ισχύει η σχέση:

$$\lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} + (-1) u_k + \lambda_{k+1} u_{k+1} + \dots + \lambda_n u_n = 0$$

στην οποία το $\lambda_k = -1$ είναι $\neq 0$. Άρα τα $u_1, u_2, \dots, u_n$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. ∎

3.3 ΒΑΣΗ ΚΑΙ ΔΙΑΣΤΑΣΗ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΥ ΧΩΡΟΥ

Ορισμός 3.3.1

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σ' ένα σώμα K. Ενα πεπερασμένο υποσύνολο

$$A = \{e_1, e_2, \dots, e_n\}$$

του V ονομάζεται (πεπερασμένη) βάση (basis) του V, αν

(i) τα $e_1, e_2, \dots, e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και

(ii) το A παράγει το χώρο V.

Επειδή στα επόμενα θα ασχοληθούμε με διανυσματικούς χώρους που έχουν πεπερασμένη βάση, θα γράφουμε και απλά "βάση" αντί "πεπερασμένη βάση".

Η παρακάτω πρόταση είναι πολύ χρήσιμη, γιατί δίνει ένα χαρακτηρισμό της βάσεως.

Πρόταση 3.3.2

Εστω A ένα πεπερασμένο υποσύνολο ενός διανυσματικού χώρου V. Τότε το A είναι μια βάση του V, όταν και μόνο όταν κάθε στοιχείο $u \in V$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

Απόδειξη

Αν το $A = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ είναι μια βάση του V, τότε κάθε στοιχείο u του V θα γράφεται στην μορφή

$$u = a_1 u_1 + a_2 u_2 + \dots + a_n u_n$$

αφού το A παράγει το χώρο V.

Αν υποθέσουμε ότι το u γράφεται και στη μορφή: $u = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n$,

τότε αφαιρώντας κατά μέλη τις δύο σχέσεις βρισκουμε

$$(a_1-b_1)u_1+(a_2-b_2)u_2+\cdots+(a_n-b_n)u_n=\mathbb{O}.$$

Επειδή τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, από την τελευταία σχέση έχουμε

$$a_1-b_1=a_2-b_2=\cdots=a_n-b_n=0, \text{ δηλ. } a_k=b_k \ \forall k.$$

Συνεπώς, κάθε στοιχείο u του V εκφράζεται κατά τρόπο μοναδικό ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

Για να αποδείξουμε το αντίστροφο, αρκεί να δείξουμε ότι τα στοιχεία $u_1, u_2, \ldots, u_n$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αφού ισχύει

$$0u_1+0u_2+\cdots+0u_n=\mathbb{O}$$

και το $\mathbb{O}$ γράφεται, λόγω της υποθέσεως, κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1, u_2, \ldots, u_n$, τότε από κάθε σχέση της μορφής

$$a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n=\mathbb{O}$$

προκύπτει ότι $a_1=a_2=\cdots=a_n=0$. Τα $u_1, u_2, \ldots, u_n$ είναι ως εκ τούτου γραμμικώς ανεξάρτητα. ∎

Αν $A=\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ είναι μια βάση ενός διανυσματικού χώρου V, τότε σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση κάθε στοιχείο u του V γράφεται μονοσήμαντα (κατά μοναδικό τρόπο) στη μορφή:

$$u=a_1u_1+a_2u_2+\cdots+a_nu_n$$

που σημαίνει ότι οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ είναι πλήρως ορισμένοι από το u και τη βάση A.

Οι αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ονομάζονται <u>συντεταγμένες του u ως προς τη βάση A</u>.

Η νιάδα $(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ ονομάζεται <u>διάνυσμα συντεταγμένων του u ως προς τη βάση A</u> και συμβολίζεται με u_A, δηλ. $u_A=(a_1, a_2, \ldots, a_n)$.

Τονίζουμε ότι το u_A είναι στοιχείο του $\mathbb{R}^n$ και όχι του V.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Θα δείξουμε ότι το υποσύνολο $A=\{e_1,e_2\}$ με $e_1=(2,1)$ και $e_2=(1,-1)$ είναι μια βάση του $\mathbb{R}^2$. Σύμφωνα με την Πρ. 3.3.2 αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο $u=(u_1,u_2)\in\mathbb{R}^2$ γράφεται μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

Εστω λοιπόν ότι $u=a_1e_1+a_2e_2 \Longrightarrow$

$$(u_1,u_2)=a_1(2,1)+a_2(1,-1).$$

Προκύπτει έτσι το σύστημα

$$\left.\begin{aligned} 2a_1+a_2&=u_1\\ a_1-a_2&=u_2\end{aligned}\right\}\Rightarrow \left.\begin{aligned} 3a_1&=u_1+u_2\\ 3a_2&=u_1-2u_2.\end{aligned}\right\}\Longrightarrow$$

$$a_1=\frac{u_1+u_2}{3} \quad \text{και} \quad a_2=\frac{u_1-2u_2}{3}.$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική. Αρα το A είναι βάση του $\mathbb{R}^2$.

<u>Παράδειγμα 2.</u>

Στο διανυσματικό χώρο $\mathbb{R}^n$, τα διανύσματα

$$\begin{aligned} e_1&=(1,0,0,\dots,0)\\ e_2&=(0,1,0,\dots,0)\\ &\vdots\\ e_n&=(0,0,\dots,0,1)\end{aligned}$$

αποτελούν μια βάση, τη <u>συνήθη βάση</u>. Πράγματι, επαληθεύονται εύκολα οι προϋποθέσεις του Ορ. 3.3.1.

(i) Τα $e_1,e_2,\dots,e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, γιατί όταν

$$\lambda_1e_1+\lambda_2e_2+\dots+\lambda_ne_n=\mathbb{O} \Longleftrightarrow$$

$$(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)=\mathbb{O} \Longrightarrow$$

$$\lambda_1=\lambda_2=\dots=\lambda_n=0$$

(ii) Τα $e_1,e_2,\dots,e_n$ παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, αφού κάθε διάνυσμα $u=(u_1,u_2,\dots,u_n)\in\mathbb{R}^n$ μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός τους:

$$(u_1,u_2,\dots,u_n)=u_1e_1+u_2e_2+\dots+u_ne_n.$$

<u>Παράδειγμα 3.</u>

Θεωρούμε το διανυσματικό χώρο $M_{2\times2}$ των 2×2 πινάκων. Θα δείξουμε ότι οι πίνακες

$$E_{11}=\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{12}=\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix},\quad E_{21}=\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix},\quad E_{22}=\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}$$

αποτελούν βάση του $M_{2\times2}$, επαληθεύοντας τις δύο προϋποθέσεις του Ορισμού 3.3.1

(i) Θεωρούμε τη σχέση

$$\lambda_1 E_{11}+\lambda_2 E_{12}+\lambda_3 E_{21}+\lambda_4 E_{22}=\mathbb{O} \Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&\lambda_2\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\\lambda_3&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\Leftrightarrow$$

$$\begin{bmatrix}\lambda_1&\lambda_2\\\lambda_3&\lambda_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$$

απ' όπου παίρνουμε $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\lambda_4=0$ και άρα τα στοιχεία $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(ii) Θεωρούμε τώρα ένα τυχόντα 2×2 πίνακα A. Θα έχουμε.

$$A=\begin{bmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a_{11}&0\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&a_{12}\\0&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\a_{21}&0\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&0\\0&a_{22}\end{bmatrix}$$

$$=a_{11}\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}+a_{12}\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}+a_{21}\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}+a_{22}\begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\Rightarrow$$

$$A=a_{11}E_{11}+a_{12}E_{12}+a_{21}E_{21}+a_{22}E_{22},$$

πράγμα που σημαίνει ότι τα $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$ παράγουν τον $M_{2\times2}$.

Εύκολα γενικεύονται τα προηγούμενα, δηλ. μια βάση του χώρου $M_{m\times n}$ αποτελείται από τους $m\times n$ πίνακες E_{rs} που έχουν τη μονάδα στη θέση (r,s) και παντού αλλού μηδέν. Η βάση αυτή καλείται <u>συνήθης</u> (ή <u>κανονική</u>) βάση του $M_{m\times n}$.

Θα δώσουμε τώρα ένα θεώρημα, στο οποίο βασίζεται η έννοια της διαστάσεως ενός διανυσματικού χώρου.

Θεώρημα 3.3.3

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος και

$$y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$$

$(n+1)$ το πλήθος στοιχεία του V που κάθε ένα από αυτά είναι γραμμικός συνδυασμός των n το πλήθος στοιχείων

$$x_1, x_2, \ldots, x_n$$

του V. Τότε τα στοιχεία $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα με τη μέθοδο της τέλειας επαγωγής.

Για $n=1$ το θεώρημα ισχύει. Πράγματι, αν

$$y_1 = \lambda x_1 \quad \text{και} \quad y_2 = \mu x_1$$

τότε $\mu y_1 - \lambda y_2 = \mu\lambda x_1 - \mu\lambda x_1 = \mathbb{O}$,

που σημαίνει ότι τα στοιχεία y_1, y_2 είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν οι λ και μ δεν είναι και οι δύο μηδέν. Αν $\lambda=\mu=0$ τότε $y_1=\mathbb{O}$ και $y_2=\mathbb{O}$ οπότε τα y_1 και y_2 είναι και σ' αυτή την περίπτωση γραμμικώς εξαρτημένα.

Υποθέτουμε τώρα ότι το θεώρημα ισχύει για $n=k-1$. και θα δείξουμε ότι ισχύει για $n=k$, δηλ. θα δείξουμε ότι αν τα στοιχεία $y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}$ γράφονται στη μορφή

$$y_i = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ik}x_k = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j \,,$$

$$i = 1, 2, \ldots, k+1$$

τότε αυτά είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $a_{k+1,k} \neq 0$. Τότε τα k το πλήθος στοιχεία

$$y_i' = y_i - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}\, y_{k+1} = a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \dots + a_{ik}x_k$$
$$- \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}\left(a_{k+1,1}x_1 + \dots + a_{k+1,k}x_k\right)$$

ή

$$y_i' = y_i - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}\, y_{k+1} = \left(a_{i1} - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}\, a_{k+1,1}\right)x_1 + \dots + \left(a_{i,k-1} - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}\, a_{k+1,k-1}\right)x_{k-1}$$

$$i = 1, 2, \dots, k \qquad (1)$$

είναι, προφανώς, γραμμικοί συνδυασμοί των $x_1, x_2, \dots, x_{k-1}$. Σύμφωνα με την υπόθεση της τέλειας επαγωγής, τα στοιχεία $y_1', y_2', \dots, y_k'$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα και άρα υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_k$ που δεν είναι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i' = 0 \qquad (2)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (1) στη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i' = \sum_{i=1}^{k} \mu_i \left(y_i - \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}\, y_{k+1}\right) = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k} \mu_i y_i - \left(\sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}\right) y_{k+1} = 0 \Longrightarrow$$

$$\sum_{i=1}^{k+1} \mu_i y_i = 0 \qquad \text{όπου} \qquad \mu_{k+1} = -\sum_{i=1}^{k} \mu_i \frac{a_{ik}}{a_{k+1,k}}$$

Εφόσον τα μ_i δεν είναι όλα μηδέν, τα στοιχεία $y_1, y_2, \dots, y_{k+1}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα. $\blacksquare$

Από προηγούμενα παραδείγματα, είδαμε ότι τα υποσύνολα $A=\{(2,-1),(1,-1)\}$ και $B=\{(1,0),(0,1)\}$ είναι βάσεις του $\mathbb{R}^2$.

Παρατηρούμε ότι οι δυο βάσεις έχουν τον ίδιο αριθμό στοιχείων. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αυτό ισχύει πάντα.

<u>Θεώρημα 3.3.4</u>

Εστω $V\neq\{\mathbb{O}\}$ ένας διανυσματικός χώρος που έχει μια πεπερασμένη βάση A. Τότε κάθε άλλη βάση του V έχει τον ίδιο αριθμό στοιχείων με τη βάση A.

<u>Απόδειξη</u>

Υποθέτουμε ότι η βάση A έχει n το πλήθος στοιχεία, $A=\{x_1,x_2,\dots,x_n\}$. Εστω B μια άλλη βάση του V με m στοιχεία, $B=\{y_1,y_2,\dots,y_m\}$. Θα δείξουμε ότι $m=n$.

Εστω ότι $m>n$. Επειδή το A παράγει το χώρο V, τα στοιχεία του B μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων του A, οπότε σύμφωνα με το Θ. 3.3.3 αυτά πρέπει να είναι γραμμικώς εξαρτημένα, πού είναι άτοπο, γιατί το B είναι βάση του V.

Ομοια αποκλείεται η περίπτωση $m<n$.

Αρα $m=n$. ■

Το Θεώρημα 3.3.4 μας επιτρέπει να δώσουμε τον ακόλουθο ορισμό.

<u>Ορισμός 3.3.5</u>

Αν ο διανυσματικός χώρος $V\neq\{\mathbb{O}\}$ έχει μια βάση από n στοιχεία, τότε ο αριθμός n ονομάζεται <u>διάσταση</u> (dimension) του V, συμβολικά

$$\dim V = n$$

Αν $V=\{\mathbb{O}\}$, τότε θα λέμε ότι η διάσταση του V είναι 0 (μηδέν).

Τέλος θα λέμε ότι ένας διανυσματικός χώρος είναι <u>πεπερασμένης διαστάσεως</u>, αν έχει διάσταση $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Στην αντίθετη περίπτωση ο διανυσματικός χώρος είναι <u>απείρης διάστασης</u>.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Ο γραμμικός χώρος $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση n, γιατί το σύνολο $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ όπου

$$e_1 = (1, 0, \ldots, 0)$$
$$e_2 = (0, 1, \ldots, 0)$$
$$\vdots$$
$$e_n = (0, 0, \ldots, 0, 1)$$

είναι μια βάση του. Όπως αναφέραμε προηγουμένως η βάση αυτή ονομάζεται <u>κανονική</u> ή <u>συνήθης βάση</u> του $\mathbb{R}^n$.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Ο διανυσματικός χώρος P_n όλων των πολυωνύμων του x με πραγματικούς συντελεστές και με βαθμό $\leq n$, έχει διάσταση $n+1$,

$$\dim P_n = n+1,$$

γιατί μια βάση του είναι το σύνολο

$$A = \{1, x, x^2, \ldots, x^n\},$$

αφού κάθε πολυώνυμο $p(x) \in P_n$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του A.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Είδαμε σε προηγούμενο παράδειγμα ότι τα στοιχεία

$$E_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{21} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad E_{22} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αποτελούν μια βάση του χώρου των 2x2 πινάκων $M_{2\times 2}$.

Άρα

$$\dim M_{2\times 2} = 2 \cdot 2 = 4$$

Θεωρούμε τώρα το χώρο $M_{m\times n}$ των $m\times n$ πινάκων. Έστω E_{ij} ο $m\times n$ πίνακας με 1 στη θέση (i,j) και μηδέν σε όλες τις άλλες θέσεις. Τότε οι $m\cdot n$ το πλήθος πίνακες

$$E_{ij} \;,\quad i=1,2,\ldots,m \;,\quad j=1,2,\ldots,n$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητοι (γιατί;) και παράγουν τον $M_{m\times n}$, εφόσον κάθε $m\times n$ πίνακας

$$A = (a_{ij})$$

μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των E_{ij}:

$$A = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} E_{ij} \,.$$

Έτσι το σύνολο των E_{ij} αποτελεί μια βάση του $M_{m\times n}$.

Άρα

$$\dim M_{m\times n} = mn \,.$$

Θεώρημα 3.3.6

Αν V είναι ένας πεπερασμένης διαστάσεως χώρος με $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$, τότε:

(i) Κάθε σύνολο από γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία, που δεν είναι βάση του V, μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V.

(ii) Κάθε σύνολο που περιέχει n το πλήθος γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία του V είναι μια βάση του V.

Απόδειξη

(i) Εστω $A = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$ ένα υποσύνολο του V, όπου τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα και $L(A) \neq V$. Αν $k > n$ τότε από το Θ. 3.3.3 εύκολα προκύπτει ότι τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα που είναι άτοπο. Αρα $k \leq n$.

Αν y_1 είναι ένα στοιχείο του V που δεν ανήκει στη γραμμική θήκη $L(A)$ του A, τότε τα στοιχεία του συνόλου

$$A_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Πράγματι, αν τα $x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1$ ήταν γραμμικώς εξαρτημένα, θα υπήρχαν πραγματικοί αριθμοί $a_1, a_2, \ldots, a_k, a_{k+1}$, όχι όλοι μηδέν, ώστε να ισχύει

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i + a_{k+1} y_1 = \mathbb{O} \qquad (1)$$

Αν ήταν $a_{k+1} = 0$, τότε από την (1) θα βρίσκαμε

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_k x_k = \mathbb{O},$$

όπου τα a_i δεν είναι όλα μηδέν. Αυτό είναι άτοπο, αφού τα $x_1, x_2, \ldots, x_k$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Ετσι $a_{k+1} \neq 0$. Μπορούμε τότε να λύσουμε την (1) ως προς y_1:

$$y_1 = -\frac{1}{a_{k+1}} \sum_{i=1}^{k} a_i x_i$$

Το y_1 εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των $x_1, x_2, \ldots, x_k$ και άρα $y_1 \in L(A)$ που είναι άτοπο. Αρα τα στοιχεία του συνόλου

$$A_1 = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1\}$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Αν συμβαίνει $L(A_1) = V$, τότε εξ ορισμού το A_1 είναι μια βάση του V.

Αν $L(A_1) \neq V$, τότε συνεχίζοντας την προηγούμενη διαδικασία μπορούμε μετά από $n-k$ βήματα να βρούμε ένα σύνολο

$$A_{n-k} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k, y_1, \ldots, y_{n-k}\}$$

που τα n το πλήθος στοιχεία του είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

Για να είναι το A_{n-k} μια βάση του V, αρκεί να δείξουμε ότι $L(A_{n-k}) = V$.

Αν ήταν $L(A_{n-k}) \neq V$, τότε θα μπορούσαμε, όπως προηγουμένως, να βρούμε ένα σύνολο A_{n-k+1} με $n+1$ γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία, που είναι άτοπο λόγω του Θ. 3.3.3.

Αρα $L(A_{n-k}) = V$ και το A_{n-k} είναι μια βάση του V.

(ii) Εστω A ένα σύνολο με n το πλήθος γραμμικως ανεξάρτητα στοιχεία του V. Σύμφωνα με την (i) το A μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση B του V. Σύμφωνα τώρα με το Θ. 3.3.4, το B περιέχει n στοιχεία, δηλ. $A = B$. (το A είναι βάση του V). ■

Αμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος είναι η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.3.7

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος με $\dim V = n$, $n \in \mathbb{N}$, και Y ένας υπόχωρος του V. Τότε

$$\dim Y \leq \dim V = n.$$

Αν είναι $\dim Y = n$, τότε $Y = V$.

Απόδειξη

Εστω ότι $\dim Y = m$ και $S = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$ μια βάση του Y. Εφόσον ο Y είναι υπόχωρος του V, το S είναι επίσης γραμμικώς ανεξάρτητο υποσύνολο του V. Από το Θ. 3.3.6 (i) προκύπτει ότι το S μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V, οπότε

$$\dim Y \leq \dim V = n.$$

Αν είναι $\dim Y = \dim V = n$, τότε από το Θ. 3.3.6 ii προκύπτει ότι η βάση S είναι επίσης βάση του V, δηλ. παράγει το χώρο V, οπότε $Y = V$. ■

Θεώρημα 3.3.8

Εστω V ένας διανυσματικός χώρος πεπερασμένης διάστασης και V_1, V_2 δύο υπόχωροι του V. Τότε

$$\dim(V_1 + V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2)$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θ. 2.3.2 (i), ο $V_1 \cap V_2$ είναι υπόχωρος των V_1 και V_2.

Αν είναι

$$\dim V_1 = k, \quad \dim V_2 = l \quad \text{και} \quad \dim(V_1 \cap V_2) = m,$$

τότε σύμφωνα με την Πρ. 3.3.7

$$m \leq k \quad \text{και} \quad m \leq l.$$

Εστω τώρα μια βάση του $V_1 \cap V_2$:

$$A = \{u_1, u_2, \ldots, u_m\}.$$

Σύμφωνα με το Θ. 3.3.6 (i), το A μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση

$$A' = \{u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_{k-m}\}$$

του V_1, και σε μια βάση

$$A'' = \{u_1, u_2, \dots, u_m, y_1, y_2, \dots, y_{\ell-m}\}.$$

του V_2. Άρα η ένωση των A' και A'',

$$B = A' \cup A'' = \{u_1, u_2, \dots, u_m, x_1, x_2, \dots, x_{k-m}, y_1, y_2, \dots, y_{\ell-m}\},$$

παράγει το χώρο $V_1 + V_2$. Αν το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο, τότε το B είναι μια βάση του $V_1 + V_2$, οπότε

$$\dim(V_1+V_2) = m + k - m + \ell - m = k + \ell - m$$

$$\Leftrightarrow$$

$$\dim(V_1+V_2) = \dim V_1 + \dim V_2 - \dim(V_1 \cap V_2).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι τα στοιχεία του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, ή ισοδύναμα ότι αν

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{k-m} b_i x_i + \sum_{i=1}^{\ell-m} c_i y_i = 0,$$

τότε

$$a_1 = a_2 = \dots = a_m = b_1 = b_2 = \dots = b_{k-m} = c_1 = c_2 = \dots = c_{\ell-m} = 0.$$

Θέτουμε

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{k-m} b_i x_i = -\sum_{i=1}^{\ell-m} c_i y_i \qquad (1)$$

και παρατηρούμε ότι

$u \in V_1$ και $u \in V_2$ οπότε $u \in V_1 \cap V_2$.

Εφόσον το A είναι μια βάση του $V_1 \cap V_2$, τότε υπάρχουν $d_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, m$ τέτοια ώστε.

$$u = \sum_{i=1}^{m} d_i u_i \qquad (2)$$

Από τις (1) και (2) βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} d_i u_i + \sum_{i=1}^{\ell-m} c_i y_i = \mathbb{O} \qquad (3)$$

Επειδή η A'' είναι μια βάση του V_2, τα στοιχεία της είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα από την (3) συνεπάγεται ότι

$$d_1 = d_2 = \cdots = d_m = c_1 = c_2 = \cdots = c_{\ell-m} = 0$$

Αντικαθιστώντας στην (1) βρίσκουμε ότι

$$\sum_{i=1}^{m} a_i u_i + \sum_{i=1}^{k-m} b_i x_i = \mathbb{O}$$

Επειδή το A' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (ως βάση του V_1) έχουμε:

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_m = b_1 = b_2 = \cdots = b_{k-m} = 0 .$$

Πράγματι το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. ∎

<u>Πόρισμα 3.3.9</u>

Έστω V_1, V_2 υπόχωροι ενός διανυσματικού χώρου V. Αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης και $V = V_1 \oplus V_2$, τότε

$$\dim V = \dim V_1 + \dim V_2$$

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον $V = V_1 \oplus V_2$, σύμφωνα με το Θ. 2.3.5

$$V_1 \cap V_2 = \{\mathbb{O}\}$$

και έτσι

$$\dim V_1 \cap V_2 = \dim\{\mathbb{O}\} = 0 .$$

Το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το Θ. 3.3.8. ∎

Θεώρημα 3.3.10 (Υπαρξη συμπληρωματικού υπόχωρου). Θεωρούμε ένα διανυσματικό χώρο V πεπερασμένης διάστασης. Για κάθε υπόχωρο V_1 του V υπάρχει ένας τουλάχιστο υπόχωρος V_2 τέτοιος ώστε
$$V = V_1 \oplus V_2 .$$

Απόδειξη. Αν $V_1=\{0\}$, τότε θέτοντας $V_2=V$ έχουμε $V=V_1\oplus V_2$. Αν τώρα $V_1\neq\{0\}$ και $\dim V_1=m$ και $\dim V=n$, τότε σύμφωνα με την Πρ. 3.3.7 $m\leq n$. Εστω
$$A=\{u_1,u_2,\dots,u_m\}$$
μια βάση του V_1.

Σύμφωνα με το Θ. 3.3.6(i), το A μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση
$$A'=\{u_1,u_2,\dots,u_m,x_1,x_2,\dots,x_{n-m}\} \tag{1}$$
του V.

Θα δείξουμε ότι ο υπόχωρος που παράγεται από τα $x_1,x_2,\dots,x_{n-m}$,
$$V_2=L(x_1,x_2,\dots,x_{n-m})$$
είναι συμπληρωματικός του V_1. Σύμφωνα με το Θ. 2.3.5 αρκεί να δείξουμε ότι

(i) $V_1+V_2=V$ και

(ii) $V_1\cap V_2=\{0\}$

Αφου η βάση A' παράγει τον V, κάθε διάνυσμα $u\in V$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της:
$$u=(a_1u_1+a_2u_2+\dots+a_mu_m)+(b_1x_1+\dots+b_{n-m}x_{n-m})$$
ή
$$u=w_1+w_2$$
όπου
$$w_1=a_1u_1+a_2u_2+\dots+a_mu_m\in V_1 \text{ , και}$$
$$w_2=b_1x_1+b_2x_2+\dots+b_{n-m}x_{n-m}\in V_2 .$$
Ετσι έχει δειχθεί η (i).

Παίρνουμε τώρα ένα διάνυσμα

$$u \in V_1 \cap V_2$$

οπότε

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m \quad \text{αφού } u \in V_1 \text{, και}$$
$$u = b_1 x_1 + \cdots + b_{n-m} x_{n-m} \quad \text{αφού } u \in V_2 .$$

Εξισώνοντας τις πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε:

$$a_1 u_1 + \cdots + a_m u_m + (-b_1) x_1 + \cdots + (-b_{n-m}) x_{n-m} = \mathbb{O}$$

και αφού το A' είναι γραμμικώς ανεξάρτητο, ως βάση του V, θα έχουμε:

$$a_1 = \cdots = a_m = b_1 = \cdots = b_{n-m} = 0 .$$

Δηλ. $u = \mathbb{O}$ και άρα $V_1 \cap V_2 = \{\mathbb{O}\}$. ■

<u>Παρατήρηση</u>

Από την αποδεικτική διαδικασία του προηγούμενου θεωρήματος, συνάγεται ότι αν έχουμε ένα υπόχωρο V_1 ενός χώρου V, τότε υπάρχουν γενικά πολλοί υπόχωροι V_2 τέτοιοι ώστε $V_1 \oplus V_2 = V$, δηλ. ο συμπληρωματικός ενός υπόχωρου δεν είναι μοναδικός.

Για να το δούμε αυτό καλύτερα ας πάρουμε ένα απλό παράδειγμα. Ας είναι

$V = \mathbb{R}^2$ και $V_1 = \{(x,0) \mid x \in \mathbb{R}\}$.

Αν είναι

$$V_2 = \{(0,x) \mid x \in \mathbb{R}\}$$

και

$$V_3 = \{(x,2x) \mid x \in \mathbb{R}\} .$$
$$\vdots$$

Τότε είναι φανερό ότι

$$V = V_1 \oplus V_2 = V_1 \oplus V_3 = \cdots$$

και οι $V_2, V_3, \ldots$ είναι όλοι διαφορετικοί μεταξύ τους.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

3.1 Να δειχθεί ότι το σύνολο $A=\{e_1, e_2, e_3\}$ είναι βάση του $\mathbb{R}^3$, όταν

(α) $e_1=(1,0,1)$, $e_2=(2,-1,1)$, $e_3=(4,1,1)$, και

(β) $e_1=(1,0,3)$, $e_2=(5,2,1)$, $e_3=(0,1,6)$.

3.2 (α) Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, d=-2a+b-3c\right\}$$

είναι υπόχωρος του $M_{2\times 2}$.

(β) Να βρεθεί μια βάση του W και η $\dim W$.

3.3 Να δειχθεί ότι τα κάτωθι υποσύνολα του $M_{2\times 2}$ είναι υπόχωροι του $M_{2\times 2}$. Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί μια βάση του W και η $\dim W$.

(α) $W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} a & a+b \\ a-b & b \end{bmatrix}\right\}$

(β) $W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} 0 & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$

(γ) $W=\left\{A\in M_{2\times 2} : A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, a+b+c+d=0\right\}$

3.4 Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$W=\left\{p(x)\in P_2 : p(x)=a_0+a_1x+a_2x^2, a_2=a_0-2a_1\right\}$$

είναι υπόχωρος του P_2. Να βρεθεί μια βάση του W και η $\dim W$.

3.5 Να δειχθεί ότι το υποσύνολο

$$W=\{p(x)\in P_3 : p(1)=p(-1),\ p(2)=p(-2)\}$$

είναι υπόχωρος του P_3. Να βρεθεί επίσης μια βάση του W και η $\dim W$.

3.6 Να βρεθεί μια βάση

(α) του χώρου των διαγώνιων 3Χ3 πινάκων, $\Delta_{3\times3}$.

(β) του χώρου των άνω τριγωνικών 3Χ3 πινάκων, $A_{3\times3}$.

3.7 Δίνονται τα υποσύνολα Χ και Υ του $\mathbb{R}^4$ που ορίζονται ως εξής:

$$X=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : y-2z+w=0\} \quad \text{και}$$

$$Y=\{(x,y,z,w)\in\mathbb{R}^4 : x=w,\ y=2z\}$$

(α) Να δειχθεί ότι τα υποσύνολα Χ και Υ είναι υπόχωροι του $\mathbb{R}^4$.

(β) Να βρεθούν βάσεις των εξής χώρων:
(i) X (ii) Y (iii) $X\cap Y$ (iv) $X+Y$.

(γ) Να επαληθευτεί το θεώρημα 3.3.8.

ΣΥΜΠΛΗΡΩΜΑΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ $3^{ου}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

1 Να δείξετε ότι τα διανύσματα
$\vec{u}=(1,-1,0)$, $\vec{v}=(1,3,-1)$ και $\vec{w}=(5,3,-2)$
είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

2 Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{v}=(1,-2,5)$ ως γραμμικός συνδυασμός των
$e_1=(1,1,1)$, $e_2=(1,2,3)$ και $e_3=(2,-1,1)$

3 Να γραφεί το διάνυσμα $\vec{u}=(2,-5,3)$ στο R^3 ως γραμμικός συνδυασμός των
$e_1=(1,-3,2)$, $e_2=(2,-4,-1)$ και $e_3=(1,-5,7)$

4 Για ποιά τιμή του κ, το διάνυσμα $u=(1,-2,\kappa)$ στο R^3 είναι γραμμικός συνδυασμός των

$v=(3,0,-2)$ και $w=(2,-1,-5)$;

5 Στο χώρο P_2 των πραγματικών πολυωνύμων μέχρι και $2^{ου}$ βαθμού θεωρούμε τα διανύσματα
$u_1=x-1$
$u_2=x^2+2x$
$u_3=x^2+2$

Να εξεταστεί αν τα πολυώνυμα

α) $v=x^2-3x+5$ και
β) $w=x^2-2x-2$
μπορούν να γραφούν ως γραμμικοί συνδυασμοί των u_1, u_2, u_3.

6 Να δείξετε ότι τα διανύσματα του P_2
$u_1=x-1$ $u_2=x^2+2$ $u_3=X^2+2x$
είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

7 Να εξεταστεί αν τα u και v είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή όχι:

α) $u=(3,4)$, $v=(1,-3)$
β) $u=(4,3,-2)$, $v=(2,-6,7)$
γ) $u=(2,-3)$, $v=(6,-9)$
δ) $u=(-4,6,-2)$, $v=(2,-3,1)$

8 Να εξεταστεί αν τα $u_1, u_2, u_3, u_4 \in R^3$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα ή όχι:

α) $u_1=(1,-2,1)$, $u_2=(2,1,-1)$, $u_3=(7,-4,1)$
β) $u_1=(1,2,-3)$, $u_2=(1,-3,2)$, $u_3=(2,-1,5)$, $u_4=(1,1,1)$
γ) $u_1=(2,-3,7)$, $u_2=(0,0,0)$, $u_3=(3,-1,4)$

9 Εστω W ο υπόχωρος του R^4 που παράγεται από τα διανύσματα

$u_1=(2,-1,2,1)$
$u_2=(1,-2,0,3)$
$u_3=(3,1,0,-2)$

Να δείξετε ότι το $A=\{u_1, u_2, u_3\}$ είναι μια βάση του W. Ποιά είναι η διάσταση του W;

10 Να εξεταστεί αν τα ακόλουθα σύνολα διανυσμάτων αποτελούν ή όχι βάσεις του R^3:

α) (1,1,1),(1,-1,5)
β) (1,1,1),(1,2,3),(2,-1,1)
γ) (1,2,3),(1,0,-1),(3,-1,0),(2,1,-2)
δ) (1,1,2),(1,2,5),(5,3,4)

11 Να βρεθεί η τιμή του k έτσι ώστε

α) Τα $\{(1,1)(-1,k)\}$ να αποτελούν μια βάση του R^2
β) Τα $\{(1,0,0),(1,1,1),(0,-1,k)\}$ να αποτελούν μια βάση του R^3.

12 Εστω W είναι α διανυσματικός χώρος που παράγεται από τις συναρτήσεις $f=sinx$ και $g=cosx$.

α) Να δειχθεί ότι $f_1=\sin(x+\theta)$ και $g_1=\cos(x+\theta)$. είναι διανύσματα του W για όλες τις τιμές του θ.

β) Να δειχθεί ότι οι f_1 και g_1 αποτελούν μια βάση του W.

13 Ποιοί από τους πιο κάτω πίνακες είναι γραμμικοί συνδυασμοί των

$$A=\begin{bmatrix}4 & 0\\ -2 & -2\end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 2 & 3\end{bmatrix} \quad \Gamma=\begin{bmatrix}0 & 2\\ 1 & 4\end{bmatrix} \quad ;$$

α) $\begin{bmatrix}6 & -8\\ -1 & -8\end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix}6 & 0\\ 3 & 8\end{bmatrix}$ δ) $\begin{bmatrix}-1 & 5\\ 7 & 1\end{bmatrix}$

14 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του A ως προς τη βάση $S=\{A_1, A_2, A_3, A_4\}$

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \quad A_1=\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

15 Να βρεθούν οι συντεταγμένες του p ως προς τη βάση $S=\{p_1, p_2, p_3\}$.

α) $p=4-3x+x^2$, $p_1=1, p_2=x, p_3=x^2$

β) $p=2-x+x^2, p_1=1+x, p_2=1+x^2, p_3=x+x^2$.