# 5 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ

## 5.1 ΓΕΝΙΚΑ

**Ορισμός 5.1.1**

Εστω ένας πίνακας $A=(a_{ij})_{m\times n}$ πάνω σε ένα σώμα K. Αν οι

$$r_i = [a_{i1} \ a_{i2} \ \cdots a_{in}] \ , \quad i=1,2,\ldots,m$$

είναι οι γραμμές του A, έχουμε κατά τα γνωστά την ακόλουθη σύνθετη μορφή του A:

$$A = \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_i \\ \vdots \\ r_m \end{bmatrix}$$

Ονομάζουμε <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών</u> (elementary row operations) τις εξής πράξεις που εφαρμόζονται πάνω στις γραμμές του A:

(i) Αντικατάσταση μιας γραμμής $r_i$ με ένα πολλαπλάσιό της $ar_i$ $(a\in K, a\neq 0)$, συμβολικά:

$$r_i \longrightarrow ar_i$$

(ii) Αντικατάσταση μιας γραμμής $r_i$ με το άθροισμα $r_i + ar_j$ $(a \in K)$, συμβολικά:

$$r_i \longrightarrow r_i + ar_j$$

(iii) Αντιμετάθεση των γραμμών $r_i$ και $r_j$, συμβολικά

$$r_i \longleftrightarrow r_j$$

Είναι φανερό ότι η εφαρμογή ενός ή περισσότερων από τους παραπάνω στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στις γραμμές ενός πίνακα A οδηγεί σε ένα νέο πίνακα B του ίδιου τύπου με τον A.

<u>Ορισμός 5.1.2</u>

Οι $m\times n$ πίνακες A και B λέγονται <u>γραμμοϊσοδύναμοι</u> (row equivalent) αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εκτέλεση ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Σημειώνουμε ότι με ανάλογο τρόπο ορίζονται και οι <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμοί στηλών</u>. Θα λέμε ότι οι πίνακες $A, B \in M_{m\times n}$ είναι <u>στηλοϊσοδύναμοι</u> αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εκτέλεση ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών.

Την ισοδυναμία δύο πινάκων A και B συμβολίζουμε με

$$A \sim B$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & 5 & -4 & -3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + 2r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 \\ -1 & 4 & -2 & 1 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to 3r_2} \begin{bmatrix} 1 & 5 & -4 & -3 \\ -3 & 12 & -6 & 3 \\ 0 & 7 & -1 & 2 \end{bmatrix} = B$$

Οι A και B είναι προφανώς γραμμοϊσοδύναμοι.

Ο <u>αντίστροφος μετασχηματισμός γραμμών</u> (ή στηλών) ορίζεται ως ο μετασχηματισμός που αναιρεί ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών (ή στηλών). Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι και αυτός στοιχειώδης.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Στο παράδειγμα 1 ο B προκύπτει από τον A μετά από εφαρμογή των μετασχηματισμών:

$$r_1 \longleftrightarrow r_3$$
$$r_3 \longrightarrow r_3 + 2r_2$$
$$r_2 \longrightarrow 3r_2 .$$

Ο A προκύπτει από τον B εφαρμόζοντας την αντίστροφη ακολουθία μετασχηματισμών:

$$r_2 \longrightarrow 1/3\, r_2 .$$
$$r_3 \longrightarrow r_3 - 2r_2 .$$
$$r_1 \longleftrightarrow r_3$$

(Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει του λόγου το αληθές).

<u>Ορισμός 5.1.3</u>

Εστω ένας $m \times n$ πίνακας A.

Καλούμε <u>ηγετικό</u> (leading) στοιχείο μιας μη μηδενικής γραμμής το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής.

Ο πίνακας A ονομάζεται <u>Γ-κλιμακωτός</u> (echelon) αν:

(i) το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής είναι το 1.

(ii) το ηγετικό στοιχείο κάθε μη μηδενικής γραμμής βρίσκεται στα δεξιά του ηγετικού 1 κάθε προηγούμενης γραμμής.

(iii) οι μη μηδενικές γραμμές εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές.

Ενας κλιμακωτός πίνακας λέγεται <u>ανηγμένος Γ-κλιμακωτος πίνακας</u> (reduced echelon matrix) αν επιπλέον:
(iv) Το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική γραμμή είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης στην οποία ανήκει.

<u>Παράδειγμα</u>

(α) Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 3 & 6 & 5 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

δεν είναι κλιμακωτοί.

Ο πρώτος μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό με στοιχειώδη μετασχηματισμό του τύπου: $r_i \to r_i + a r_j$.

Ο δεύτερος μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό με δύο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς (ο ένας είναι του τύπου $r_i \leftrightarrow r_j$ και ο άλλος του τύπου $r_i \to a r_i$).

Τέλος, ο τρίτος μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό μετά από τρεις πράξεις του τύπου $r_i \to a r_i$.

<u>Ασκηση</u> Ποιες ακριβώς είναι οι πράξεις που απαιτούνται για να μετασχηματιστούν οι πιο πάνω πίνακες σε κλιμακωτούς;

(β) Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι κλιμακωτοί (αλλά μη ανηγμένοι).

(γ) Οι πίνακες

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

είναι ανηγμένοι κλιμακωτοί.

**Θεώρημα 5.1.4**
Κάθε mxn πίνακας είναι γραμμοϊσοδύναμος με ένα mxn ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα.

**Απόδειξη** (Μέθοδος απαλοιφής του Gauss).

Ὑποθέτουμε ὅτι ἡ $j$-στήλη τοῦ $A$, ὅπου $1 \le j \le n$, εἶναι ἡ πρώτη στήλη τοῦ $A$ στήν ὁποία ὑπάρχει ἕνα μή-μηδενικό στοιχεῖο. Ἔστω ὅτι $a_{ij} \neq 0$, ὅπου $1 \le i \le m$, τότε ὁ στοιχειώδης μετασχηματισμός γραμμῶν $r_i \to \dfrac{1}{\alpha_{ij}} r_i$ πού ἀκολουθεῖται ἀπό τό στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμῶν $r_1 \leftrightarrow r_i$ δίνει ἕναν πίνακα μέ τό 1 στήν $(1, j)$-θέση, δηλαδή:

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \beta_{1j+1} & \dots & \beta_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{2j} & \beta_{2j+1} & \dots & \beta_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & \beta_{mj} & \beta_{mj+1} & \cdot & \beta_{mn} \end{pmatrix}$$

Τώρα, οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν $r_k \to r_k - \beta_{kj} r_1$ $(k = 2, \dots, m)$ δίνουν τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 & \gamma_{1j+1} & \dots & \gamma_{1n} \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{2j+1} & \dots & \gamma_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & & \cdot \\ 0 & \dots & 0 & 0 & \gamma_{mj+1} & \dots & \gamma_{mn} \end{pmatrix}$$

Ἄν σ' αὐτή τή φάση ἔχουν ἐμφανισθεῖ μηδενικές γραμμές, μπορεῖ νά χρησιμοποιηθεῖ ἐναλλαγή γραμμῶν ἔτσι ὥστε οἱ μή-μηδενικές γραμμές νά ἐμφανισθοῦν πρίν ἀπό τίς μηδενικές γραμμές. Μποροῦμε τώρα νά ἐπαναλάβουμε τήν ἴδια διαδικασία μέ τίς τελευταῖες $m - 1$ γραμμές αὐτοῦ τοῦ πίνακα γιά νά πάρουμε τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 0 & 1 & \delta_{1,j+1} & \ldots & \delta_{1,k-1} & \delta_{1k} & \delta_{1,k+1} & \ldots & \delta_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \delta_{2,k+1} & \ldots & \delta_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \delta_{3k} & \delta_{3,k+1} & \ldots & \delta_{3n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \delta_{mk} & \delta_{m,k+1} & \ldots & \delta_{mn} \end{pmatrix} \qquad (1)$$

Ἔτσι, μετά ἀπό ἕναν πεπερασμένο ἀριθμό βημάτων, προκύπτει ἕνας πίνακας ὁ ὁποῖος εἶναι σέ κλιμακωτή μορφή. Τώρα ἀπ' αὐτόν τόν πίνακα παίρνουμε ἕναν πίνακα σέ ἀνηγμένη κλιμακωτή μορφή, ἄν ἐφαρμόσουμε μιά ἀκολουθία στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν γραμμῶν τοῦ τύπου 1.2(*ii*). Παραδείγματος χάρη, ἡ ἀκολουθία στοιχειωδῶν μετασχηματισμῶν γραμμῶν τῆς μορφῆς $r_i \to r_i - \delta_{ik} r_2$ $(i = 1, 3, \ldots, m)$ ἀνάγει τόν πίνακα (1) στή μορφή

$$\begin{pmatrix} 0 & \ldots & 1 & 1 & \epsilon_{1,j+1} & \ldots & \epsilon_{1,k-1} & 0 & \epsilon_{1,k+1} & \ldots & \epsilon_{1n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 1 & \epsilon_{2,k+1} & \ldots & \epsilon_{2n} \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \epsilon_{3,k+1} & \ldots & \epsilon_{3n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \epsilon_{m,k+1} & \ldots & \epsilon_{mn} \end{pmatrix}$$

Αὐτό συμπληρώνει τήν ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος. ∎

Ἡ πιό πάνω ἀπόδειξη θά κατανοηθεῖ καλύτερα, ἄν δοθεῖ ἰδιαίτερη προσοχή στό ἑπόμενο παράδειγμα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ

Ἔστω

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν $r_2 \to \frac{1}{2} r_2$, $r_1 \leftrightarrow r_2$ καί $r_4 \leftrightarrow r_5$ δίνουν τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 3 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 5 & 3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν $r_3 \to r_3 - 3r_1$, $r_4 \to r_4 - 5r_1$ δίνουν τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 & -24 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{7}{2} & -\frac{5}{2} & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Τώρα ἐφαρμόζοντας τούς στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμῶν μέ τήν τάξη πού δίνονται $r_2 \leftrightarrow r_3$, $r_1 \to r_1 - r_2$, $r_4 \to r_4 - r_2$, $r_3 \to r_3 - 10r_2$, $r_2 \to 2r_2$ παίρνουμε τόν πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & -5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

καί τελικά, οἱ $r_1 \to r_1 - 3r_3$, $r_2 \to r_2 + 5r_3$ δίνουν τόν ἀνηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & -4 & 0 & 26 \\ 0 & 0 & 1 & 7 & 0 & -43 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Σημείωση: Πρέπει νά τονισθεῖ ὅτι αὐτοί οἱ στοιχειώδεις μετασχηματισμοί γραμμῶν πρέπει νά ἐφαρμοσθοῦν μέ τήν τάξη πού δίνονται.

Ασκηση Να βρεθούν όλοι οι ενδιάμεσοι πίνακες του πιο πάνω παραδείγματος.

## 5.2 ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΓΡΑΜΜΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

Εστω ένα σώμα K και ένα σύστημα αλγεβρικών εξισώσεων με συντελεστές $a_{ij}$ και σταθερές $b_i$ από το σώμα K :

$$\begin{matrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\qquad\qquad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{matrix} \qquad (1)$$

Ενα σύστημα της μορφής (1) ονομάζεται <u>γραμμικό σύστημα m εξισώσεων με n αγνώστους</u>.

Το σύστημα (1) γράφεται συχνά στη μορφή

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i , \qquad i = 1, 2, \ldots, m , \qquad (2)$$

ή ακόμα ως εξίσωση πινάκων:

$$AX = B \qquad (3)$$

όπου

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}.$$

Ο $m \times n$ πίνακας A ονομάζεται <u>πίνακας των συντελεστών</u> (matrix of coefficients). Ο πίνακας στήλη $X = (x_1\ x_2 \cdots x_n)^T$ είναι ο <u>πίνακας των αγνώστων</u> και ο πίνακας στήλη $B = (b_1\ b_2 \cdots b_m)^T$ είναι ο <u>πίνακας των σταθερών</u>.

Ο $m\times(n+1)$ σύνθετος πίνακας

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right] \qquad (4)$$

ονομάζεται <u>επαυξημένος πίνακας</u> (augmented matrix) του συστήματος. Προφανώς, ο επαυξημένος πίνακας $[A|B]$ χαρακτηρίζει πλήρως το γραμμικό σύστημα (1).

<u>Ορισμός 5.2.1</u>

Μια διατεταγμένη νιάδα $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ που ικανοποιεί το γραμμικό σύστημα (1) ονομάζεται <u>λύση</u> του συστήματος.

Εαν το γραμμικό σύστημα (1) έχει τουλάχιστο μια λύση, το σύστημα λέγεται <u>συμβιβαστό</u>, διαφορετικά λέγεται <u>ασυμβίβαστο</u> ή <u>μη συμβιβαστό</u>.

Δύο γραμμικά συστήματα με τον ίδιο αριθμό αγνώστων λέγονται <u>ισοδύναμα</u> αν και μόνο αν κάθε λύση του ενός είναι λύση του άλλου.

Το γραμμικό σύστημά (1) ονομάζεται <u>ομογενές</u> αν οι σταθερές $b_i$, $i = 1, 2, \cdots, m$ είναι όλες μηδενικές:

$$b_1 = b_2 = \cdots = b_m = 0$$

Η μηδενική λύση $(0, 0, \cdots, 0)$ ενός ομογενούς συστήματος λέγεται <u>τετριμμένη</u> λύση.

Παράδειγμα 1

Εστω το μη ομογενές γραμμικό σύστημα :

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 - x_2 \quad\quad &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad (5)$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (5) είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 6 \end{array}\right].$$

Η μοναδική λύση του (5) είναι η $(1,2,3)$, δηλ. $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 3$.

Το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 2x_3 &= -3 \\ 3x_1 \quad\quad - 2x_3 &= -3 \\ 2x_1 + 2x_2 - x_3 &= 3 \\ 3x_1 \quad\quad + x_3 &= 6 \end{aligned} \qquad (6)$$

έχει και αυτό μοναδική λύση την $(1,2,3)$. Ετσι τα γραμμικά συστήματα (5) και (6) είναι ισοδύναμα.

Παράδειγμα 2

Το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 &= 0 \end{aligned} \qquad (7)$$

είναι ομογενές με επαυξημένο πίνακα τον

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right]$$

Εκτός από την τετριμμένη λύση $(0,0,0)$, αποδεικνύεται εύκολα ότι το σύστημα (7) έχει και άλλες (άπειρες) λύσεις.

<u>Θεώρημα 5.2.2</u>

Εστω ένα γραμμικό σύστημα $m$ εξισώσεων με $n$ αγνώστους με επαυξημένο πίνακα τον $m\times(n+1)$ πίνακα

$$[A|B] = [a_{ij}|b_i].$$

Αν $[A'|B'] = [a'_{ij}|b'_i]$ είναι ο επίσης $m\times(n+1)$ πίνακας που προκύπτει από τον $[A|B]$ εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, τότε τα συστήματα

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \quad , \qquad i=1,2,\dots,m \qquad (8)$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a'_{ij}x_j = b'_i \quad , \qquad i=1,2,\dots,m \qquad (9)$$

είναι ισοδύναμα.

<u>Απόδειξη</u>

Ο $[A'|B']$ προκύπτει από τον $[A|B]$ εφαρμόζοντας έναν από τους πιο κάτω μετασχηματισμούς:

(i) $r_i \longrightarrow a r_i$ , $a\in K$, $a\neq 0$

(ii) $r_i \longrightarrow r_i + a r_j$ , $a\in K$

(iii) $r_i \longleftrightarrow r_j$

(i) Με τον μετασχηματισμό $r_i \longrightarrow a r_i$, η μόνη εξίσωση του αρχικού συστήματος που αλλάζει είναι η εξίσωση $i$ που αντικαθίσταται από την

$$a\,a_{i1}x_1 + a\,a_{i2}x_2 + \dots + a\,a_{in}x_n = a\,b_i$$

Αν η $(x_1,x_2,\dots,x_n)$ είναι μια λύση του αρχικού συστήματος (8), τότε αυτή είναι επίσης λύση του νέου συστήματος (9).

(ii) Με τον μετασχηματισμο $r_i \longrightarrow r_i + a r_j$, η εξίσωση $i$ του αρχικού συστήματος αντικαθίσταται από την

$$(a_{i1}+aa_{j1})x_1+(a_{i2}+aa_{j2})x_2+\cdots+(a_{in}+aa_{jn})x_n=b_i+ab_j$$

Εφόσον μια λύση του αρχικού συστήματος ικανοποιεί τις αρχικές εξισώσεις $i$ και $j$, ικανοποιεί και την εξίσωση $i$ του νέου συστήματος.

(iii) Με τον μετασχηματισμό $r_i \leftrightarrow r_j$, αλλάζει απλώς η θέση δύο εξισώσεων του αρχικού συστήματος οπότε κάθε λύση του αρχικού είναι λύση και του νέου συστήματος.

Αντίστροφα, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε λύση του νέου συστήματος (9) είναι λύση του αρχικού (8). Ως γνωστό, ο $[A|B]$ προκύπτει από τον $[A'|B']$ εφαρμόζοντας τον αντίστροφο μετασχηματισμό

$$r_i \to a^{-1} r_i \quad \text{ή} \quad r_i \to r_i - ar_j \quad \text{ή} \quad r_i \leftrightarrow r_j,$$

που είναι επίσης στοιχειώδης. $\blacksquare$

Από το Θ. 5.2.2 συνάγονται εύκολα διάφορα συμπεράσματα τα οποία θα δώσουμε στη συνέχεια μαζί με σχετικά παραδείγματα.

<u>Πόρισμα 1</u>

Αν ο $[R|S]=[r_{ij}|S_i]$ είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του επαυξημένου πίνακα $[A|B]$, τότε το σύστημα (8) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\sum_{j=1}^{n} r_{ij}x_j = S_i, \quad i=1,2,\ldots,m \qquad (10)$$

<u>Απόδειξη</u>

Εφόσον ο $[R|S]$ προκύπτει από τον $[A|B]$ εφαρμόζοντας μια πεπερασμένη ακολουθία στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών, τότε σύμφωνα με το Θ. 5.2.2 τα συστήματα (8) και (10) είναι ισοδύναμα. $\blacksquare$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Εστω το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} x + y + 4z &= 15 \\ 2x - 3y + 2z &= 2 \\ -4x + 2y + z &= 3 \end{aligned} \tag{11}$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (11) είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{12}$$

Μετασχηματίζουμε τον επαυξημένο πίνακα σε κλιμακωτό και εν συνεχεία σε ανηγμένο κλιμακωτό:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 2 & -3 & 2 & 2 \\ -4 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 4r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & -5 & -6 & -28 \\ 0 & 6 & 17 & 63 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -\frac{1}{5} r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6/5 & 28/5 \\ 0 & 6 & 17 & 63 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 6r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6/5 & 28/5 \\ 0 & 0 & 49/5 & 147/5 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to \frac{5}{49} r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 4 & 15 \\ 0 & 1 & 6/5 & 28/5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{13}$$

Ο πίνακας (13) είναι προφανώς ο κλιμακωτός πίνακας που προκύπτει από τον επαυξημένο πίνακα $[A|B]$. Συνεχίζοντας τους μετασχηματισμούς γραμμών παίρνουμε:

$$\xrightarrow[r_1 \to r_1 - 4r_3]{r_2 \to r_2 - \frac{6}{5} r_3} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \tag{14}$$

Ο τελευταίος πίνακας είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας.

Σύμφωνα με το πόρισμα 1 το σύστημα (1) είναι ισοδύναμο με το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 1 \\ x_2 \qquad &= 2 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad (15)$$

το οποίο μας δίνει αμέσως τη ζητούμενη λύση: $x_1 = 1$, $x_2 = 2$ και $x_3 = 3$.

Είναι προφανές ότι το αρχικό σύστημα (11) είναι ισοδύναμο με τα συστήματα που αντιστοιχούν σε κάθε ενδιάμεσο πίνακα της απαλοιφής Gauss. Για παράδειγμα, ο κλιμακωτός πίνακας (13) αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 4x_3 &= 15 \\ x_2 + 6/5\, x_3 &= 28/5 \\ x_3 &= 3 \end{aligned} \qquad (16)$$

Η επίλυση του πιο πάνω συστήματος είναι εύκολη. Ο $x_2$ βρίσκεται εύκολα από τη δεύτερη εξίσωση αντικαθιστώντας τον $x_3$:

$$x_2 = \frac{28}{5} - \frac{6}{5} x_3 = \frac{28}{5} - \frac{18}{5} = 2 .$$

Στη συνέχεια βρίσκουμε τον $x_1$ αντικαθιστώντας στην πρώτη εξίσωση τους $x_2$ και $x_3$:

$$x_1 = 15 - x_2 - 4x_3 = 15 - 2 - 12 = 1 .$$

Η πιο πάνω διαδικασία εύρεσης της λύσης από το σύστημα που αντιστοιχεί στον κλιμακωτό πίνακα είναι γνωστή ως <u>πίσω αντικατάσταση</u> (back substitution).

Στη βιβλιογραφία συναντούμε δύο μεθόδους επίλυσης γραμμικών συστημάτων με απαλοιφή Gauss. Αυτές είναι:

I  <u>Η μέθοδος της απαλοιφής Gauss</u>
Ο επαυξημένος πίνακας μετασχηματίζεται σε κλιμακωτό και η λύση (αν υπάρχει) βρίσκεται με πίσω αντικατάσταση.

II  <u>Η μέθοδος της απαλοιφής Gauss-Jordan.</u>
Ο επαυξημένος πίνακας μετασχηματίζεται σε ανηγμένο κλιμακωτό από τον οποίο εύκολα βρίσκεται η λύση (αν βέβαια αυτή υπάρχει).

Στα επόμενα θα χρησιμοποιούμε αποκλειστικά τη μέθοδο Gauss-Jordan.

Ενα γραμμικό σύστημα μπορεί
(α) να έχει μια μοναδική λύση, ή
(β) να έχει άπειρο αριθμό λύσεων, ή
(γ) να μην έχει λύση (μη συμβιβαστό σύστημα).

Οι διάφορες περιπτώσεις επεξηγούνται στη συνέχεια με παραδείγματα.

Ας υποθέσουμε πρώτα ότι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη και ότι αυτό βρίσκεται στη γραμμή $i$, δηλ.

$$r_i([R|S]) = [0 \quad 0 \cdots 0 \mid 1] \tag{17}$$

Η γραμμή αυτή αντιστοιχεί στην εξίσωση

$$0 \cdot x_1 + 0 \cdot x_2 + \cdots + 0 \cdot x_n = 1 \tag{18}$$

ή

$$0 = 1$$

και είναι (προφανώς) αδύνατη. Κατά συνέπεια το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Εχουμε έτσι το ακόλουθο πόρισμα.

**Πόρισμα 2**

Το σύστημα $AX=B$ είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη.

**Παράδειγμα**

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

αντιστοιχεί στο σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 &= 0 \\ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ 0 &= 1 \\ 0 &= 0 \end{aligned}$$

Λόγω του ότι η τρίτη εξίσωση είναι αδύνατη, το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό.

Εστω τώρα ότι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ που προκύπτει από τον $[A|B]$ όπου $A \in M_{m \times n}$ δεν περιέχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη. Ετσι, σύμφωνα με το Πόρισμα 2 το σύστημα $RX=S$ είναι συμβιβαστό. Εστω ακόμα ότι ο $[R|S]$ έχει $\ell$ το πλήθος μη μηδενικές γραμμές ή ισοδύναμα $\ell$ το πλήθος ηγετικά στοιχεία. Είναι φανερό ότι ο $\ell$ δεν μπορεί να είναι μεγαλύτερος από τον αριθμό των εξισώσεων ούτε μεγαλύτερος από των αριθμό των αγνώστων:

$$\ell \leq m \quad \text{και} \quad \ell \leq n. \tag{19}$$

Ξεχωρίζουμε δύο περιπτώσεις:

I $\boxed{\ell = n}$

Ο αριθμός των εξισώσεων είναι αναγκαστικά μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό των αγνώστων:

$$m \geqslant \ell = n \tag{20}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ έχει $(m-\ell)$ το πλήθος μηδενικές γραμμές. Ολες οι στήλες του $[R|S]$ πλην της τελευταίας (δηλ. όλες οι στήλες του $R$) περιέχουν ηγετικό στοιχείο και έτσι έχουν ως μόνο μη μηδενικό στοιχείο κάποιο ηγετικό 1. Ο $[R|S]$ έχει την εξής μορφή:

$$[R|S] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & S_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & S_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & S_n \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \\ \\ \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} (m-\ell) \text{ μηδενικές γραμμές} \end{array} \tag{21}$$

Το σύστημα έχει τη μοναδική λύση

$$x_i = S_i, \quad i = 1, 2, \ldots, n \tag{22}$$

II $\boxed{\ell < n}$

Στην περίπτωση αυτή ο αριθμός των εξισώσεων $m$ μπορεί να είναι μικρότερος από τον αριθμό των αγνώστων $n$. Οπως και πριν, ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|S]$ έχει $(m-\ell)$ το πλήθος μηδενικές γραμμές. Τώρα, όμως, εκτός από την τελευταία στήλη υπάρχουν επιπλέον $(n-\ell)$ το πλήθος στήλες που δεν περιέχουν ηγετικά στοιχεία. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, θα υποθέσουμε ότι οι $\ell$ το πλήθος στήλες που περιέχουν ηγετικά στοιχεία προηγούνται των άλλων στον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα, ο οποίος παίρνει έτσι τη μορφή:

$$[R|S] = \left[\begin{array}{cccccccc|c} 1 & 0 & \cdots & 0 & r_{1,\ell+1} & \cdots & r_{1n} & & s_1 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & r_{2,\ell+1} & \cdots & r_{2n} & & s_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & r_{\ell,\ell+1} & \cdots & r_{\ell n} & & s_\ell \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \cdots & 0 & & 0 \end{array}\right] \qquad (23)$$

Είναι προφανές ότι οι τελευταίοι $(n-\ell)$ άγνωστοι $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ μπορούν να μεταφερθούν στο δεξιό μέλος των εξισώσεων, οπότε έχουμε:

$$x_i = s_i - r_{i,\ell+1} x_{\ell+1} - \cdots - r_{in} x_n \ , \quad i = 1, 2, \dots, \ell$$

ή

$$x_i = s_i - \sum_{k=\ell+1}^{n} r_{ik} x_k \ , \quad i = 1, 2, \dots, \ell \qquad (24)$$

Αν δώσουμε τιμές στους $(n-\ell)$ αγνώστους $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ μπορούμε με τις (24) να προσδιορίσουμε τις αντίστοιχες τιμές των $x_1, x_2, \dots, x_\ell$. Το σύστημα μας έχει άπειρο πλήθος λύσεων. Οι $(n-\ell)$ άγνωστοι $x_{\ell+1}, \dots, x_n$ ονομάζονται <u>ελεύθερες μεταβλητές</u>.

Εύκολα συμπεραίνουμε ότι ένα γραμμικό σύστημα μπορεί να έχει μοναδική λύση μόνο αν

$$m \geq n$$

(δηλ. μόνο αν ο αριθμός των εξισώσεων είναι μεγαλύτερος ή ίσος με τον αριθμό των αγνώστων). Αν είναι

$$m < n$$

τότε το σύστημα είτε είναι αδύνατο είτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

Μερικά ειδικά συμπεράσματα συνάγονται εύκολα για τα ομογενή συστήματα

$$AX=0 \qquad (25)$$

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος (25) είναι ο $[A|0]$ και επομένως ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι της μορφής $[R|0]$. Όλα τα ομογενή συστήματα έχουν, ως γνωστό, τουλάχιστο μία λύση, την τετριμμένη

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0,$$

και είναι ως εκ τούτου συμβιβαστά. (Καταλήγουμε στο ίδιο συμπέρασμα με το Πόρισμα 2!).

Αν η τετριμμένη λύση δεν είναι μοναδική, τότε υπάρχει τουλάχιστο μία ελεύθερη μεταβλητή και συνεπώς το σύστημα (25) έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

<u>Πόρισμα 3</u>

Αν $m<n$, το γραμμικό ομογενές σύστημα $AX=0$ έχει τουλάχιστο μία μη τετριμμένη λύση (δηλ. έχει άπειρο πλήθος λύσεων).

Αν $l=n$ (οπότε $m\geq l=n$) τότε η τετριμμένη λύση $x_1=x_2=\cdots x_n=0$ είναι η μοναδική λύση του συστήματος.

<u>Πόρισμα 4</u>.

Ένα σύστημα $n$ γραμμικών ομογενών εξισώσεων με $n$ αγνώστους,

$$AX=0, \quad A\in M_{n\times n},$$

έχει τουλάχιστο μία μη τετριμμένη λύση (δηλ. έχει άπειρο πλήθος λύσεων) αν και μόνο αν ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας $[R|0]$ είναι διάφορος του $[I_n|0]$.

Απόδειξη

Αν $R=I_n$, τότε

$$x_1=x_2=\cdots=x_n=0,$$

δηλαδή έχουμε μόνο την τετριμμένη λύση.

Αν $R\neq I_n$, ο $[R|0]$ έχει τουλάχιστο μια μηδενική γραμμή, οπότε $\rho<n$. Σύμφωνα με το πόρισμα 3, το σύστημα έχει τότε άπειρο πλήθος λύσεων. ∎

**Πόρισμα 5**

Ενα σύστημα $n$ γραμμικών εξισώσεων με $n$ αγνώστους,

$$AX=B\ ,\quad A\in M_{n\times n},$$

έχει μοναδική λύση αν και μόνο αν ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ο $I_n$, δηλ.

$$[R|S]=[I_n|S].$$

Απόδειξη

Αν $R=I_n$, τότε

$$x_i=s_i\ ,\quad i=1,2,\ldots,n,$$

δηλαδή έχουμε μοναδική λύση.

Αν $R\neq I_n$, τότε ο $R$ έχει τουλάχιστο μια μηδενική γραμμή, οπότε $\rho<n$. Το σύστημα είτε είναι μη συμβιβαστό είτε έχει άπειρο πλήθος λύσεων. ∎

## Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι λύσεις (αν υπάρχουν) των γραμμικών συστημάτων που αντιστοιχούν στους παρακάτω ανηγμένους κλιμακωτούς πίνακες.

(α) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$ (β) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$ (γ) $\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$

(α) Το σύστημα έχει μοναδική λύση την

$$x_1 = -1, \quad x_2 = 2, \quad x_3 = 4.$$

(β) Το σύστημα είναι μη συμβιβαστό γιατί υπάρχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη.

(γ) Το σύστημα έχει άπειρο ..... πλήθος λύσεων με μια ελεύθερη μεταβλητή, τη $x_3$. Θέτοντας $x_3 = \lambda$ έχουμε τη γενική λύση:

$$x_1 = 2 - 3x_3 = 2 - 3\lambda.$$
$$x_2 = 6 + x_3 = 6 + \lambda.$$

## Παράδειγμα 2

Εστω το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 &= -8 \\ 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 - x_4 &= 2 \\ 3x_1 - 4x_2 + x_3 - 2x_4 &= -8 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 - 3x_4 &= -6 \end{aligned}$$

Θα μετασχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 2 & -3 & 4 & -1 & 2 \\ 3 & -4 & 1 & -2 & -8 \\ 4 & -1 & 2 & -3 & -6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 4r_1]{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -2 & 3 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 18 \\ 0 & 2 & -8 & 10 & 16 \\ 0 & 7 & -10 & 13 & 26 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 7r_2]{\substack{r_1 \to r_1 + 2r_2 \\ r_3 \to r_3 - 2r_2}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 10 & 28 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & -4 & -4 & -20 \\ 0 & 0 & 4 & -36 & -100 \end{array}\right] \xrightarrow{\substack{r_3 \to -\frac{1}{4}r_3 \\ r_4 \to \frac{1}{4}r_4}} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 10 & 28 \\ 0 & 1 & -2 & 7 & 18 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & -9 & -25 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_3]{\substack{r_1 \to r_1 + r_3 \\ r_2 \to r_2 + 2r_3}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & -30 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to -\frac{1}{10}r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 11 & 33 \\ 0 & 1 & 0 & 9 & 28 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_4]{\substack{r_1 \to r_1 - 11r_4 \\ r_2 \to r_2 - 9r_4}}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right]$$

Το σύστημα έχει μοναδική λύση:

$x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_3 = 2$ και $x_4 = 3$.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Εστω το ομογενές γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned} 2x_2 + 2x_3 + 4x_4 &= 0 \\ x_1 \qquad - x_3 - 3x_4 &= 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 + 3x_3 - 2x_4 &= 0 \end{aligned}$$

Θα μετασχηματίσουμε τον επαυξημένο πίνακα του γραμμικού συστήματος σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & -2 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 + 2r_1]{r_3 \to r_3 - 2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 & 7 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -8 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_2]{r_3 \to r_3 - 3r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -10 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_4 \to -\frac{1}{10} r_4} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[\substack{r_2 \to r_2 - 2r_3 \\ r_4 \to r_4 - r_3}]{r_1 \to r_1 + 3r_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με μια ελεύθερη μεταβλητή.

Θέτουμε $x_3 = \lambda$ και παίρνουμε τη γενική λύση:

$x_1 = x_3 = \lambda$

$x_2 = -x_3 = -\lambda$.

$x_3 = \lambda$.

$x_4 = 0$.

Παράδειγμα 4

Έστω το γραμμικό σύστημα:

$$3x_1 + x_2 = 7$$
$$x_1 - 2x_2 = 0$$
$$3x_1 + 2x_2 = a$$

Θα βρούμε την τιμή του $a$ για την οποία το σύστημα είναι συμβιβαστό.

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cc|c} 3 & 1 & 7 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 2 & a \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 3 & 1 & 7 \\ 3 & 2 & a \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 7 & 7 \\ 0 & 8 & a \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{7} r_2} \left[\begin{array}{cc|c} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 8 & a \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 8r_2]{r_1 \to r_1 + 2r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-8 \end{array}\right]$$

Σύμφωνα με το Πόρισμα 2, το σύστημα είναι συμβιβαστό αν και μόνο αν

$$a - 8 = 0 \Rightarrow a = 8.$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι τότε ο

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

και η λύση είναι: $x_1 = 2$ και $x_2 = 1$.

## 5.3 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ

**Ορισμός 5.3.1**

Ενας $n \times n$ πίνακας $E$ λέγεται <u>στοιχειώδης πίνακας</u> (elementary matrix) αν προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα $I_n$ με εφαρμογή ενός στοιχειώδη μετασχηματισμού γραμμών.

Συνεπώς, έχουμε τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων που αντιστοιχούν στους τρεις στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

I $\quad E_i^a \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{r_i \to a r_i} E_i^a \;, \quad a \neq 0$

II $\quad E_{i,j}^a \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{r_i \to r_i + a r_j} E_{i,j}^a$

III $\quad E_{ij} \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} E_{ij}$

**Παράδειγμα**

Οι παρακάτω 4x4 πίνακες είναι στοιχειώδεις:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_2^a \qquad \left( I_4 \xrightarrow{r_2 \to a r_2} E_2^a \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = E_{2,3}^a \qquad \left( I_4 \xrightarrow{r_2 \to r_2 + a r_3} E_{2,3}^a \right)$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = E_{2,4} \qquad \left( I_4 \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_4} E_{2,4} \right).$$

**Πρόταση 5.3.2.**

Εστω δύο $m \times n$ πίνακες $A$ και $B$. Αν ο $B$ προκύπτει από τον $A$ εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών, τότε

$$B = EA$$

όπου $E$ είναι ο αντίστοιχος στοιχειώδης $m \times m$ πίνακας.

**Απόδειξη**

Εξετάζουμε ξεχωριστά τους τρεις τύπους στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

**(i) $r_i \longrightarrow a r_i$, $a \neq 0$**

Ο αντίστοιχος στοιχειώδης $m \times m$ πίνακας είναι ο

$$E_i^a = \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ \end{array} \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & a & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Εστω $B = (b_{lk}) = E_i^a A$.
Για $l \neq i$ έχουμε

$$b_{lk} = r_l(E)\, C_k(A) = \begin{array}{c}[0 \cdots\cdots \underset{l}{1} \cdots\cdots 0]\end{array} \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{lk} = a_{lk}, \quad \begin{array}{l} k = 1, 2, \ldots, n \\ l = 1, 2, \ldots, m \quad \text{με } l \neq i \end{array}$$

Ετσι, όλα τα στοιχεία του $B$ εκτός της $i$ γραμμής είναι ίσα με τα ομοθέσια στοιχεία του $A$.

Αν τώρα $l = i$, έχουμε:

$$b_{ik} = r_i(E)\, C_k(A) = [0 \cdots\cdots \underset{i}{a} \cdots\cdots 0] \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad b_{ik} = a\, a_{ik} \quad , \quad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Τα στοιχεία του $B$ στην $i$ γραμμή είναι ίσα με τα ομοθέσια στοιχεία του $A$ πολλαπλασιασμένα με $a \neq 0$. Άρα ο $B$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $A$ εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό

$$r_i \longrightarrow a r_i \ , \quad a \neq 0 .$$

<u>(ii) $r_i \longrightarrow r_i + a r_j$</u>

Ο αντίστοιχος στοιχειώδης $m \times m$ πίνακας είναι ο

$$E^{a}_{i,j} = \begin{array}{c@{}c} \begin{array}{c} \\ \\ i \\ \\ j \\ \\ \\ \end{array} & \left[\begin{array}{ccccccc} 1 &&&&&& \\ &\ddots&&&&& \\ &&1&\cdots&a&& \\ &&&\ddots&\vdots&& \\ &&&&1&& \\ &&&&&\ddots& \\ &&&&&&1 \end{array}\right] \\ & \begin{array}{ccccccc} \phantom{1}&\phantom{\ddots}&i&\phantom{\cdots}&j&\phantom{\ddots}&\phantom{1}\end{array} \end{array}$$

Έστω $B = (b_{\ell k}) = E^{a}_{i,j} A$.

Όπως και στο (i), όλα τα στοιχεία του $B$ εκτός της γραμμής $i$ είναι ίσα με τα ομοθέσια στοιχεία του $A$.

Αν $\ell = i$, έχουμε:

$$b_{ik} = r_i(E)\, c_k(A) = [\,0 \cdots \underset{i}{1} \cdots \underset{j}{a} \cdots 0\,] \begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$b_{ik} = a_{ik} + a\, a_{jk} \ , \qquad k = 1, 2, \ldots, n .$$

Πράγματι, ο $B$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $A$ εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $r_i \to r_i + a r_j$.

(iii) $r_i \leftrightarrow r_j$

Ο αντίστοιχος στοιχειώδης $m\times m$ πίνακας είναι ο

$$E_{ij} = \begin{array}{c c} \begin{array}{c} \\ i \\ j \\ \\ \end{array} & \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & \cdots & 1 & \\ & & \vdots & \ddots & & \\ & & 1 & & 0 & \\ & & & & & \ddots & \\ & & & & & & 1 \end{bmatrix} \\ & \quad\quad\quad i \quad\quad j \end{array}$$

Εστω ξανά ότι $B = (b_{\ell k}) = E_{ij}A$.

Οπως και στα (i) και (ii), όλα τα στοιχεία του $B$ εκτός των γραμμών $i$ και $j$ είναι ίσα με τα ομοθέσια στοιχεία του $A$.

Αν $\ell = i$, έχουμε:

$$b_{ik} = r_i(E)\,c_k(A) = [0 \cdots\cdots \underset{j}{1} \cdots 0]\begin{bmatrix} a_{1k} \\ \vdots \\ a_{mk} \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$b_{ik} = a_{jk}$, $\quad k = 1, 2, \dots, n$.

Η γραμμή $i$ του $B$ είναι ίση με τη γραμμή $j$ του $A$.

Αν $\ell = j$, βρίσκουμε ότι

$b_{jk} = a_{ik}$, $\quad k = 1, 2, \dots, n$,

δηλ. η γραμμή $j$ του $B$ είναι ίση με τη γραμμή $i$ του $A$.

Συνεπώς, ο $B$ προκύπτει από τον $A$ εφαρμόζοντας το μετασχηματισμό $r_i \leftrightarrow r_j$, όπως απαιτείται. ∎

**Πρόταση 5.3.3**
Κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφος κάθε στοιχειώδη πίνακα είναι στοιχειώδης.

**Απόδειξη**

Ο ταυτοτικός πίνακας $I$ προκύπτει από τους στοιχειώδεις πίνακες

$$E_i^a \ , \ E_{i,j}^a \ \text{και} \ E_{i,j}$$

εφαρμόζοντας τους αντίστροφους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών

$$r_i \rightarrow \frac{1}{a} r_i \ , \ r_i \rightarrow r_i - a r_j \ \text{και} \ r_i \leftrightarrow r_j \ ,$$

αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.2, στις τρείς πιο πάνω περιπτώσεις έχουμε:

$$I = E_i^{1/a} E_i^a \implies (E_i^a)^{-1} = E_i^{1/a}$$

$$I = E_{i,j}^{-a} E_{i,j}^a \implies (E_{i,j}^a)^{-1} = E_{i,j}^{-a}$$

$$I = E_{i,j} E_{i,j} \implies (E_{i,j})^{-1} = E_{i,j}$$

και η πρόταση ισχύει. ∎

**Παράδειγμα 1**

Θεωρούμε τους ακόλουθους στοιχειώδεις 3x3 πίνακες:

$$E_{1,3}^{-2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad E_2^{-5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Οι αντίστροφοί τους είναι οι:

$$(E_{1,3}^{-2})^{-1} = E_{1,3}^{2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(E_2^{-5})^{-1} = E_2^{-1/5} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και}$$

$$(E_{2,3})^{-1} = E_{2,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Είναι φανερό ότι οι στοιχειώδεις πίνακες τύπου $E_{i,j}$ είναι ενελικτικοί:

$$(E_{i,j})^2 = I.$$

Παράδειγμα 2

Εστω οι πίνακες A και B όπου:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

Σύμφωνα με την πρόταση 5.3.2,

$$B = E_{2,1}^{-2} A \quad \text{και} \quad A = E_{2,1}^{2} B$$

(όπου οι στοιχειώδεις πίνακες $E_{2,1}^{-2}$ και $E_{2,1}^{2}$ είναι τύπου $3 \times 3$). Πράγματι,

$$E_{2,1}^{-2} A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = B$$

και

$$E_{2,1}^{2} B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} = A$$

Δίνουμε τώρα ένα βασικό θεώρημα.

**Θεώρημα 5.3.4**

Αν οι $m \times n$ πίνακες $A$ και $B$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \ldots, E_k$, έτσι ώστε

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

**Απόδειξη**

Το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.2. Εφόσον οι $A$ και $B$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε ο $B$ μπορεί να προκύψει από τον $A$ με την εφαρμογή ενός πεπερασμένου αριθμού $k$ στοιχειωδών μετασχηματισμών γραμμών.

Αν $k=1$, τότε από την Πρόταση 5.3.2 ισχύει:

$$B = E_1 A,$$

όπου $E_1$ κάποιος στοιχειώδης πίνακας.

Η απόδειξη για $k>1$ γίνεται με επαγωγή. Υποθέτουμε ότι ένας πίνακας $B'$ μπορεί να προκύψει από τον $A$ εφαρμόζοντας $(k-1)$ στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και ότι υπάρχουν $(k-1)$ το πλήθος στοιχειώδεις πίνακες $E_2, \ldots, E_k$ τέτοιοι ώστε:

$$B' = E_2 \cdots E_k A.$$

Τώρα ο $B$ προκύπτει από τον $B'$ εφαρμόζοντας έναν επιπλέον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών. Σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.2, με ένα κατάλληλο στοιχειώδη πίνακα $E_1$ ισχύει:

$$B = E_1 B' = E_1 (E_2 \cdots E_k A) \Longrightarrow$$

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

όπως απαιτείται. ∎

Το κάτωθι πόρισμα του Θ. 5.3.4 είναι πολύ σημαντικό.

**Πόρισμα 1**

Αν ο $R$ είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός του $A$, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \dots, E_k$, έτσι ώστε

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k R.$$

**Απόδειξη**

Σύμφωνα με το Θ. 5.3.4 υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1', E_2', \dots, E_k'$ τέτοιοι ώστε

$$R = E_1' \cdots E_k' A .$$

(Οι $A$ και $R$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι).

Σύμφωνα τώρα με την πρόταση 5.3.3 κάθε στοιχειώδης πίνακας είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι επίσης στοιχειώδης πίνακας. Άρα,

$$A = E_k'^{-1} \cdots E_1'^{-1} R \implies$$

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k R$$

όπου $E_i = (E'_{k+1-i})^{-1}$. ■

**Θεώρημα 5.3.5**

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο $n \times n$ πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.

(iii) Ο $A$ είναι το γινόμενο πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών πινάκων.

Απόδειξη

(i) ⇒ (ii)

Αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος τότε από την

$$AX=B \Rightarrow X=A^{-1}B.$$

Το γραμμικό σύστημα $AX=B$ έχει μοναδική λύση.

(ii) ⇒ (iii)

Εφόσον το γραμμικό σύστημα $AX=B$ έχει μοναδική λύση, ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $A$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας:

$$R=I$$

(Πόρισμα 5 του Θ. 5.2.2).

Σύμφωνα τώρα με το Πόρισμα 1 του Θ. 5.3.4, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων έτσι ώστε

$$A=E_1\cdots E_k R=E_1\cdots E_k I=E_1\cdots E_k$$

(iii) ⇒ (i).

$$A=E_1E_2\cdots E_k \Rightarrow$$

$$AE_k^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}=E_1E_2\cdots E_kE_k^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}=I$$

Άρα ο $A$ είναι αντιστρέψιμος: $A^{-1}=E_k^{-1}\cdots E_1^{-1}$. ∎

Παρατήρηση.

Είναι φανερό από το Θ. 5.3.5 ότι το ομογενές σύστημα

$$AX=0 \quad \text{με} \quad A\in M_{n\times n}$$

έχει μοναδική λύση την τετριμμένη αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος:

$$X=A^{-1}0=0.$$

Το ομογενές σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση (άρα άπειρες το πλήθος λύσεις) αν και μόνο αν ο $A$ είναι μη αντιστρέψιμος.

Το Θεώρημα 5.3.5 είναι αρκετά σημαντικό γιατί μας παρέχει ένα κριτήριο αντιστρεψιμότητας καθώς επίσης μια μέθοδο εύρεσης του αντίστροφου πίνακα, αν βέβαια αυτός υπάρχει. Εστω $R$ ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας ενός τετραγωνικού πίνακα $A$:

- αν $R = I_n$, τότε ο $A$ είναι αντιστρέψιμος.
- αν ο $R$ έχει τουλάχιστο μια μηδενική γραμμή (δηλ. $R \neq I_n$), τότε ο $A$ είναι μη αντιστρέψιμος.

Από την απόδειξη του Θ. 5.3.5, γνωρίζουμε ότι αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A = E_1 \cdots E_k I_n \quad \text{και} \quad A^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n .$$

Εχουμε επίσης

$$I_n = A^{-1} A = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n A = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} A$$

Παρατηρούμε ότι ο $A^{-1}$ μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον $I_n$ που εφαρμόζονται για τη μετατροπή του $A$ στον ανηγμένο κλιμακωτό $I_n$.

Συνοψίζοντας, για την εύρεση του αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα $A$, θεωρούμε το σύνθετο πίνακα

$$[A \mid I_n]$$

και με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών τον μετατρέπουμε στον ανηγμένο κλιμακωτό

$$[R \mid A'] .$$

- Αν $R = I_n$, τότε ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1} = A'$
- Αν $R \neq I_n$, τότε ο $A$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

## Παράδειγμα 1

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A=\begin{bmatrix}1 & -1 & 2\\ 3 & 2 & 4\\ 0 & 1 & -2\end{bmatrix}$.

Θα μετασχηματίσουμε το σύνθετο πίνακα $[A|I]$ σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$[A|I]=\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 3 & 2 & 4 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]\xrightarrow{r_2\to r_2-3r_1}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_2\leftrightarrow r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -2 & -3 & 1 & 0\end{array}\right]\xrightarrow{r_3\to r_3-5r_2}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 8 & -3 & 1 & -5\end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_3\to \frac{1}{8}r_3}\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & 2 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & 1/8 & -5/8\end{array}\right]\xrightarrow[r_2\to r_2+2r_3]{r_1\to r_1+r_2}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 1 & 0 & -3/4 & 1/4 & -1/4\\ 0 & 0 & 1 & -3/8 & 1/8 & -5/8\end{array}\right]$$

Ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\ -3/4 & 1/4 & -1/4\\ -3/8 & 1/8 & -5/8\end{bmatrix}$

## Παράδειγμα 2

Εστω το γραμμικό σύστημα

$$AX=B \qquad (1)$$

όπου $A$ ο 3Χ3 πίνακας του Παραδείγματος 1. Θα βρούμε τη λύση του (1) στις εξής περιπτώσεις:
(α) $B=(1,2,3)^T$ (β) $B=(0,-2,0)^T$ και (γ) $B=(0,0,0)^T$

Εφόσον ο $A$ είναι αντιστρέψιμος το σύστημα (1) έχει μοναδική λύση τη

$$X=A^{-1}B$$

(α) $B = (1,2,3)^T$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+0+3 \\ -\frac{3}{4}+\frac{2}{4}-\frac{3}{4} \\ -\frac{3}{8}+\frac{2}{8}-\frac{15}{8} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ -1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

(β) $B = (0,-2,0)^T$

$$X = A^{-1}B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -2/4 \\ -2/8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1/4 \\ -1/8 \end{bmatrix}$$

(γ) $B = (0,0,0)^T$

Εχουμε ομογενές σύστημα. Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος το σύστημα έχει μοναδική λύση την τετριμμένη $x_1 = x_2 = x_3 = 0$.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Να εξεταστεί αν οι πίνακες

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

είναι αντιστρέψιμοι.

Στο παρόν πρόβλημα δεν ζητείται ο αντίστροφος πίνακας που εξάλλου μπορεί να μην υπάρχει. Αρκεί να μετατρέψουμε τον κάθε πίνακα σε ανηγμένο κλιμακωτό για να δούμε αν είναι αντιστρέψιμος.

(α) $$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 2 & 5 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας έχει μηδενική γραμμή. Αρα $R \neq I$. Ο πίνακας δεν είναι αντιστρέψιμος.

(β)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{3} r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{r_3 \to r_3 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $B$ είναι ο μοναδιαίος πίνακας $I_3$. Άρα ο $B$ είναι αντιστρέψιμος.

Θεωρούμε τώρα την εξίσωση πινάκων

$$AC = B \qquad (1)$$

όπου ο $A$ είναι τετραγωνικός πίνακας, $A \in M_{n \times n}$, και $C, B \in M_{n \times q}$. Αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, τότε ο πίνακας $C$ που ικανοποιεί την εξίσωση (1) είναι μοναδικός:

$$C = A^{-1} B \qquad (2)$$

Γνωρίζουμε από τα προηγούμενα ότι αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, \dots, E_k$ τέτοιοι ώστε:

$$A = E_1 \cdots E_k I_n \Rightarrow I_n = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} A,$$

οπότε

$$A^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n \qquad (3)$$

Έτσι για τον $C = A^{-1} B$ παίρνουμε:

$$C = A^{-1} B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} I_n B = E_k^{-1} \cdots E_1^{-1} B \qquad (4).$$

Παρατηρούμε ότι ο $C$ μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον $B$ που εφαρμόζονται για τη μετατροπή του $A$ στον ανηγμένο κλιμακωτό $I_n$, δηλ.

$$[A|B] \sim [I_n | C = A^{-1}B] \tag{5}$$

Ο αναγνώστης έχει σίγουρα προσέξει ότι το παρόν πρόβλημα περιλαμβάνει ως ειδικές περιπτώσεις τα δύο προβλήματα που εξετάσαμε στο κεφάλαιο αυτό:

(α) Επίλυση του γραμμικού συστήματος

$$AX = B \tag{6}$$

Εδώ $X, B \in M_{n\times 1}$ και

$$[A|B] \sim [I | X = A^{-1}B] \tag{7}$$

(β) Εύρεση του αντίστροφου πίνακα. Εδώ έχουμε

$$AA^{-1} = I \tag{8}$$

και

$$[A|I] \sim [I | A^{-1}] \tag{9}$$

<u>Παράδειγμα</u>

Αν είναι

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 12 \\ 0 & 3 & 0 \\ 12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί ο πίνακας $C$ έτσι ώστε $AC = B$.

Θεωρούμε το σύνθετο πίνακα $[A|B]$. Θα τον μετατρέψουμε στη μορφή $[I|C=A^{-1}B]$ με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών.

$$[A|B]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 2 & 1 & 6 & 0 & 12 \\ -1 & 1 & -3 & 0 & 3 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 12 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2 \text{ και μετά } r_1 \to -r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 3 & 2 & 1 & 6 & 0 & 12 \\ 2 & 1 & 0 & 12 & 0 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 - 3r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 5 & -8 & 6 & 9 & 12 \\ 0 & 3 & -6 & 12 & 6 & 6 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3 \text{ και μετά } r_2 \to \frac{1}{3} r_2.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -1 & 3 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 5 & -8 & 6 & 9 & 12 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 5r_2]{r_1 \to r_1 + r_2.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & -14 & -1 & 2 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to 1/2\, r_3.}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 4 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1/2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 2r_3]{r_1 \to r_1 - r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11 & -1/2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -10 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -7 & -1/2 & 1 \end{array}\right] = [I|A^{-1}B]$$

Εχουμε τελικά $C=A^{-1}B=\begin{bmatrix} 11 & -1/2 & 1 \\ -10 & 1 & 4 \\ -7 & -1/2 & 1 \end{bmatrix}$

**Θεώρημα 5.3.6**

Αν $R$ είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P$ τέτοιος ώστε

$$R = PA$$

**Απόδειξη**

Σύμφωνα με το Θεώρημα 5.3.4, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \ldots, E_k$, έτσι ώστε

$$R = E_1 E_2 \cdots E_k A . \tag{1}$$

Θέτοντας

$$P = E_1 E_2 \cdots E_k \tag{2}$$

έχουμε

$$R = PA . \tag{3}$$

Ο $P$ είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων:

$$P^{-1} = E_k^{-1} E_{k-1}^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1} \qquad \blacksquare$$

Από τις (1) και (2) παρατηρούμε ότι ο πίνακας $P$ προκύπτει εφαρμόζοντας στον $I_m$ τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών που εφαρμόζονται για την μετατροπή του $A$ στον ανηγμένο κλιμακωτό $R$, δηλ.

$$\left[ A_{m \times n} \mid I_m \right] \sim \left[ R_{m \times n} \mid P_{m \times m} \right] . \tag{4}$$

Είναι φανερό επίσης ότι όταν ο $A$ είναι τετραγωνικός και $R = I$, τότε

$$P = A^{-1}$$

Παράδειγμα

Αν $R$ είναι ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί τετραγωνικός πίνακας $P$ τέτοιος ώστε

$$R = PA.$$

Θεωρούμε το σύνθετο πίνακα $[A \mid I_3]$ και τον μετασχηματίζουμε σε ανηγμένο κλιμακωτό.

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \leftrightarrow r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 2r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & -3 & 0 & -2 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 + r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & 3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to -\frac{1}{5} r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Βρίσκουμε δηλ. ότι

$$P = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι πράγματι $R = PA$.

## 5.3.1 ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΕΙΣ ΠΙΝΑΚΕΣ ΚΑΤΑ ΣΤΗΛΕΣ

Οπως αναφέραμε στην αρχή του παρόντος κεφαλαίου, εντελώς ανάλογα με τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών μπορούμε να ορίσουμε τους <u>στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών</u>:

$$(i) \quad C_i \longrightarrow aC_i \;, \; a \neq 0$$
$$(ii) \quad C_i \longrightarrow C_i + aC_j$$
$$(iii) \quad C_i \longleftrightarrow C_j$$

Για τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών, ισχύουν ορισμοί και θεωρήματα ανάλογα με αυτά που δόθηκαν στις προηγούμενες παραγράφους.

Ετσι, λέμε ότι οι $m \times n$ πίνακες A και B είναι <u>στηλο-ϊσοδύναμοι</u> αν ο ένας προκύπτει από τον άλλο με εφαρμογή ενός πεπερασμένου αριθμού στοιχειωδών μετασχηματισμών στηλών.

<u>Ορισμός 5.3.1.1</u>

Εστω ένας $m \times n$ πίνακας A. Καλούμε ηγετικό στοιχείο μιας μη μηδενικής στήλης το πρώτο μη μηδενικό στοιχείο της στήλης.

Ο πίνακας A ονομάζεται <u>Σ-κλιμακωτός</u> αν:

(i) το ηγετικό στοιχείο μιας μη μηδενικής στήλης είναι το 1

(ii) το ηγετικό στοιχείο μιας μη μηδενικής στήλης βρίσκεται πιο κάτω από το ηγετικό 1 κάθε προηγούμενης στήλης.

(iii) οι μη μηδενικές στήλες εμφανίζονται πριν από τις μηδενικές.

Ενας Σ-κλιμακωτός πίνακας λέγεται <u>ανηγμένος Σ-κλιμακωτός πίνακας</u> αν επιπλέον

(iv) το ηγετικό 1 σε κάθε μη μηδενική στήλη είναι το μόνο μη μηδενικό στοιχείο της γραμμής στην οποία ανήκει.

Με μια αυστηρότερη ορολογία, ο κλιμακωτός πίνακας των προηγούμενων παραγράφων είναι <u>Γ-κλιμακωτός πίνακας</u> και ο ανηγμένος κλιμακωτός πίνακας είναι ο <u>ανηγμένος Γ-κλιμακωτός πίνακας</u>.

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι το αντίστοιχο του Θεωρήματος 5.1.4.

> <u>Θεώρημα 5.3.1.2</u>
> Κάθε $m\times n$ πίνακας είναι στηλοϊσοδύναμος με ένα $m\times n$ ανηγμένο Σ-κλιμακωτό πίνακα.

<u>Απόδειξη</u>.
Ανάλογη με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.4 (μέθοδος της απαλοιφής Gauss).

<u>Παράδειγμα</u>
Να μετατραπεί ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\2&-3&0&1\\-4&5&-1&-1\end{bmatrix}$$

(α) σε ανηγμένο Γ-κλιμακωτό, και
(β) σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό

(α)
$$\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\2&-3&0&1\\-4&5&-1&-1\end{bmatrix}\xrightarrow[r_3\to r_3+4r_1]{r_2\to r_2-2r_1}\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\0&-1&-4&-5\\0&1&7&11\end{bmatrix}\xrightarrow{r_2\to -r_2}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\0&1&4&5\\0&1&7&11\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to r_3-r_2}\begin{bmatrix}1&-1&2&3\\0&1&4&5\\0&0&3&6\end{bmatrix}\xrightarrow{r_3\to \frac{1}{3}r_3}$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&2&6\\0&1&4&5\\0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow[r_2\to r_2-4r_3]{r_1\to r_1-2r_3}\begin{bmatrix}1&-1&0&2\\0&1&0&-3\\0&0&1&2\end{bmatrix}\xrightarrow{r_1\to r_1+r_2.}$$

(Γ-κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 7 \\ 0 & 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{Ανηγμένος Γ-κλιμακωτός}$$

(β)
$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 0 & 1 \\ -4 & 5 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \to C_2 + C_1 \\ C_3 \to C_3 - 2C_1 \\ C_4 \to C_4 - 3C_1 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -4 & -5 \\ -4 & 1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \quad C_2 \to -C_2.$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ -4 & -1 & 7 & 11 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} C_3 \to C_3 + 4C_2 \\ C_4 \to C_4 + 5C_2 \end{array} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 3 & 6 \end{bmatrix} \quad C_3 \to \tfrac{1}{3} C_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 6 \end{bmatrix} \quad C_4 \to C_4 - 6C_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{array}{l} C_2 \to C_2 + C_3 \\ C_1 \to C_1 + 4C_3 \end{array}$$

(Σ-κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_1 \to C_1 - 2C_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ανηγμένος Σ-κλιμακωτός

---

**Ορισμός 5.3.1.3**

Ενας $n \times n$ πίνακας $\hat{E}$ λέγεται <u>στοιχειώδης πίνακας κατά στήλες</u> αν προκύπτει από τον ταυτοτικό πίνακα $I_n$ με εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού στηλών.

---

Εχουμε και εδώ τρεις τύπους στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες:

I $\quad \hat{E}_i^a \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{C_i \to aC_i} \hat{E}_i^a, \quad a \neq 0$

II $\quad \hat{E}_{i,j}^a \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{C_i \to C_i + aC_j} \hat{E}_{i,j}^a$

III $\quad \hat{E}_{i,j} \quad$ με $\quad I_n \xrightarrow{C_i \leftrightarrow C_j} \hat{E}_{i,j}$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει ότι:

$$\hat{E}_i^{a} = E_i^{a} \qquad (1)$$

$$\hat{E}_{i,j}^{a} = \left(E_{i,j}^{a}\right)^T = E_{j,i} \qquad (2)$$

$$\hat{E}_{i,j} = E_{i,j} \qquad (3)$$

Βλέπουμε ότι οι στοιχειώδεις πίνακες κατά στήλες αντιστοιχούν σε στοιχειώδεις πίνακες κατά γραμμές. Κατά συνέπεια, ισχύουν όλα τα σχετικά θεωρήματα. Έτσι, σύμφωνα με την Πρόταση 5.3.3 κάθε στοιχειώδης πίνακας κατά στήλες είναι αντιστρέψιμος και ο αντίστροφός του είναι επίσης στοιχειώδης πίνακας. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

$$\left(\hat{E}_i^{a}\right)^{-1} = \hat{E}_i^{1/a} \qquad (4)$$

$$\left(\hat{E}_{i,j}^{a}\right)^{-1} = \hat{E}_{i,j}^{-a} \qquad (5)$$

$$\left(\hat{E}_{i,j}\right)^{-1} = \hat{E}_{i,j} \qquad (6)$$

<u>Παράδειγμα</u>.

Να βρεθούν οι εξής στοιχειώδεις 4x4 πίνακες:

$\hat{E}_3^{a}$, $E_3^{a}$, $\hat{E}_{2,4}^{a}$, $E_{2,4}^{a}$, $\hat{E}_{4,1}$ και $E_{4,1}$.

$$\hat{E}_3^{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_3^{a} = \hat{E}_3^{a}$$

$$\hat{E}_{2,4}^{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad E_{2,4}^{a} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \left(\hat{E}_{2,4}^{a}\right)^T$$

$$\hat{E}_{4,1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad E_{4,1} = \hat{E}_{4,1}.$$

<u>Πρόταση 5.3.1.4</u>

Αν ο $m \times n$ πίνακας $B$ προκύπτει από τον $m \times n$ πίνακα $A$ εφαρμόζοντας ένα στοιχειώδη μετασχηματισμό στηλών, τότε

$$B = A\hat{E}$$

όπου $\hat{E}$ είναι ο αντίστοιχος στοιχειώδης πίνακας κατά στήλες.

<u>Απόδειξη</u>

Παρόμοια με αυτή της Πρότασης 5.3.2. □

Το πιο κάτω θεώρημα είναι το αντίστοιχο του θεωρήματος 5.3.4.

<u>Θεώρημα 5.3.1.5</u>

Αν οι $m \times n$ πίνακες $A$ και $B$ είναι στηλοϊσοδύναμοι, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$B = A\hat{E}_1\hat{E}_2\cdots\hat{E}_k$$

<u>Απόδειξη</u>

Το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.3.1. Η απόδειξη γίνεται επαγωγικά και είναι παρόμοια με την απόδειξη του Θ. 5.3.4. □

<u>Πόρισμα 1</u>

Αν ο $\hat{R}$ είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$A = \hat{R}\, \hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k$$

<u>Απόδειξη</u>

Αφήνεται ως άσκηση. □

Αν ο πίνακας $A$ είναι τετραγωνικός και ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του

$$\hat{R} = I_n \qquad (1)$$

τότε ο $A$ είναι αντιστρέψιμος. Πράγματι, σύμφωνα με το Πόρισμα 1, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \ldots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$A = I_n \hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k \qquad (2)$$

οπότε

$$A^{-1} = I_n \hat{E}_k^{-1} \cdots \hat{E}_2^{-1} \hat{E}_1^{-1} \qquad (3).$$

Έχουμε επίσης:

$$I_n = A A^{-1} = A \hat{E}_k^{-1} \cdots \hat{E}_2^{-1} \hat{E}_1^{-1} \qquad (4).$$

Από τις (3) και (4) συμπεραίνουμε ότι ο $A^{-1}$ μπορεί να βρεθεί εφαρμόζοντας στον $I_n$ τους ίδιους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που μετατρέπουν τον $A$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό $I_n$.

Έτσι, για την εύρεση του αντίστροφου ενός τετραγωνικού πίνακα $A$, μπορούμε να θεωρήσουμε το σύνθετο πίνακα

$$\left[\frac{A}{I_n}\right]$$

τον οποίο μετατρέπουμε στον ανηγμένο Σ-κλιμακωτό

$$\left[\frac{\hat{R}}{A'}\right]$$

– Αν $\hat{R} = I_n$, τότε ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = A'$$

– Αν $\hat{R} \neq I_n$ (αν δηλ. ο $\hat{R}$ έχει τουλάχιστο μία μηδενική στήλη), τότε ο $A$ δεν είναι αντιστρέψιμος.

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθεί ο αντίστροφος του $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

(είναι ο πίνακας του παραδείγματος 1 στη σελίδα 5.35).

Θα μετασχηματίσουμε το σύνθετο πίνακα $\left[\frac{A}{I}\right]$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό.

$$\left[\frac{A}{I}\right] = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} C_2 \to C_2 + C_1 \\ C_3 \to C_3 - 2C_1 \end{matrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \\ \hline 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad C_2 \leftrightarrow C_3$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 5 \\ 0 & -2 & 1 \\ \hline 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad C_2 \to -\tfrac{1}{2} C_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix} \quad C_3 \to C_3 - 5C_2$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \\ \hline 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1/2 & 5/2 \end{array}\right] \xrightarrow{C_3 \to -\frac{1}{4} C_3} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1/4 \\ 0 & -1/2 & -5/8 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \to C_2 - C_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1/4 & -1/4 \\ 0 & 1/8 & -5/8 \end{array}\right] \xrightarrow{C_1 \to C_1 - 3C_2} \left[\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{array}\right]$$

Ο $A$ είναι αντιστρέψιμος και
$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -3/4 & 1/4 & -1/4 \\ -3/8 & 1/8 & -5/8 \end{bmatrix}$$

Σύμφωνα με το Θ. 5.3.6, αν $A \in M_{m \times n}$ και $R$ είναι ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του $A$, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $P$ τέτοιος ώστε:

$$R = PA$$

Στην περίπτωση του ανηγμένου Σ-κλιμακωτού πίνακα ισχύει το πιο κάτω θεώρημα.

<u>Θεώρημα 5.3.1.6</u>

Αν $\hat{R}$ είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός πίνακας του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε υπάρχει ένας αντιστρέψιμος πίνακας $Q$ τέτοιος ώστε

$$\hat{R} = A Q$$

Απόδειξη

Σύμφωνα με το Θ. 5.3.1.5, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων κατά στήλες $\hat{E}_1, \hat{E}_2, \dots, \hat{E}_k$, έτσι ώστε

$$\hat{R} = A\,\hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k \qquad (1)$$

Θέτοντας

$$Q = \hat{E}_1 \hat{E}_2 \cdots \hat{E}_k \qquad (2)$$

έχουμε

$$\hat{R} = AQ \qquad (3)$$

Ο $Q$ είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο στοιχειωδών πινάκων.

Από τις (1) και (2) παρατηρούμε ότι ο $Q$ προκύπτει από τον $I_n$ εφαρμόζοντας τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών που εφαρμόζονται για την αναγωγή του $A$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό, δηλ.

$$\left[\frac{A_{m\times n}}{I_n}\right] \sim \left[\frac{\hat{R}_{m\times n}}{Q_{n\times n}}\right]$$

Είναι και εδώ φανερό ότι αν ο $A$ είναι τετραγωνικός και $\hat{R} = I_n$, τότε

$$Q = A^{-1}.$$

Παράδειγμα

Αν $\hat{R}$ είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

να βρεθεί τετραγωνικός πίνακας $Q$ τέτοιος ώστε

$$\hat{R} = AQ.$$

Θεωρούμε το σύνθετο πίνακα $\left[\dfrac{A}{I_4}\right]$ και τον μετασχηματίζουμε σε ανηγμένο $\Sigma$-κλιμακωτό.

$$\left[\frac{A}{I_4}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_1 \leftrightarrow C_4} \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 1 & 1 \\ -5 & 9 & 4 & 2 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 2C_1]{C_2 \to C_2 + C_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 3 \\ -5 & 4 & 4 & 12 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & -2 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 3C_2]{C_3 \to C_3 - C_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -5 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right] \xrightarrow{C_1 \to C_1 + C_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{array}\right]$$

Ο ζητούμενος πίνακας είναι $Q = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -5 \end{bmatrix}$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει την $\hat{R} = AQ$.

## 5.4 ΚΑΝΟΝΙΚΗ ΜΟΡΦΗ ΠΙΝΑΚΑ

**Ορισμός 5.4.1**

Καλούμε κανονική μορφή (normal form) N ένα $m \times n$ πίνακα που έχει τη σύνθετη μορφή:

$$N = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

**Παρατήρηση**

Ειδικές περιπτώσεις κανονικής μορφής είναι οι πίνακες

$$I\ , \quad [I\ O] \quad \text{και} \quad \begin{bmatrix} I \\ O \end{bmatrix}$$

**Πρόταση 5.4.2**

Κάθε μη μηδενικός $m\times n$ πίνακας μπορεί να αναχθεί με ένα πεπερασμένο πλήθος στοιχειωδών μετασχηματισμών στην κανονική μορφή N.

Ειδικά αν ο A είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος τότε η κανονική μορφή του είναι ο μοναδιαίος πίνακας $I_n$.

**Απόδειξη.**

Βασίζεται στις εξής παρατηρήσεις:

(α) Ο A μπορεί να αναχθεί με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών στον ανηγμένο Γ- κλιμακωτό R. Εστω ότι ο R έχει r το πλήθος μη μηδενικές γραμμές:

$$R = \begin{bmatrix} A'_{r\times n} \\ O_{(m-r)\times n} \end{bmatrix}$$

(β) Οι $(n-r)$ το πλήθος στήλες που δεν περιέχουν ηγετικά στοιχεία μπορούν να μεταφερθούν στα δεξιά του πίνακα με αντιμετάθεση στηλών, οπότε προκύπτει πίνακας της μορφής:

$$A' = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & F_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

(γ) Τα στοιχεία της πρώτης γραμμής του $F$ μπορούν να απαλειφθούν με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στηλών του τύπου

$$C_i \longrightarrow C_i - a'_{1i}\, C_1, \qquad i = r+1, \dots, n.$$

Τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής του $F$ μπορούν να απαλειφθούν με στοιχειώδεις μετασχηματισμούς στήλης του τύπου

$$C_i \longrightarrow C_i - a'_{2i}\, C_2, \qquad i = r+1, \dots, n$$

κ.ο.κ. Παίρνουμε τελικά την κανονική μορφή

$$N = \begin{bmatrix} I_{r\times r} & O_{r\times(n-r)} \\ O_{(m-r)\times r} & O_{(m-r)\times(n-r)} \end{bmatrix}$$

Όταν ο $A$ είναι τετραγωνικός και αντιστρέψιμος, ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός

$$R = I_n = N. \qquad \blacksquare$$

<u>Παρατήρηση</u>

Είναι φανερό ότι ο $N$ είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του Γ-κλιμακωτού πίνακα $R$.
Αντίστροφα, ο $N$ είναι ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του Σ-κλιμακωτού πίνακα $\hat{R}$.

Παράδειγμα

Να βρεθεί η κανονική μορφή $N$ του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Από το παράδειγμα της σ. 5.41, γνωρίζουμε ότι ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του $A$ είναι ο

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τον ανηγμένο Σ-κλιμακωτό του $R$.

$$R \xrightarrow[C_4 \to C_4 - 1/5\, C_1]{C_3 \to C_3 - \frac{1}{5} C_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[C_4 \to C_4 + 3/5\, C_2]{C_3 \to C_3 - \frac{2}{5} C_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = N$$

**Θεώρημα 5.4.3**

Αν $N$ είναι η κανονική μορφή του $m\times n$ πίνακα $A$, τότε υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P$ και $Q$ τέτοιοι ώστε

$$PAQ = N$$

Απόδειξη

Από το Θ. 5.3.6 γνωρίζουμε ότι υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P$ τέτοιος ώστε

$$R = PA \qquad (1)$$

όπου $R$ ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του $A$.

Η κανονική μορφή $N$ είναι ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός του $R$. Σύμφωνα με το Θ. 5.3.1.6 υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $Q$ τέτοιος ώστε

$$N = RQ \implies$$

$$N = PAQ. \quad \blacksquare$$

<u>Εύρεση των $P$ και $Q$.</u>

Για την εύρεση των $P$ και $Q$ εργαζόμαστε ως εξής:

I Μετασχηματίζουμε το σύνθετο πίνακα $[A \mid I_{m\times m}]$ σε ανηγμένο Γ-κλιμακωτό:

$$[R \mid P]$$

II Μετασχηματίζουμε τον $\left[\dfrac{R}{I_{n\times n}}\right]$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό:

$$\left[\dfrac{N}{Q}\right].$$

<u>Παρατήρηση</u>

Οι πίνακες $P$ και $Q$ δεν είναι μοναδικοί. Μπορείτε να δώσετε ένα παράδειγμα;

<u>Παράδειγμα 1</u>

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες $P$ και $Q$ έτσι ώστε ο $PAQ$ να είναι σε κανονική μορφή.

Από το παράδειγμα της σ. 5.41 γνωρίζουμε ότι ο

$$[A\,|\,I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

μετασχηματίζεται στον ανηγμένο Γ-κλιμακωτό

$$[R\,|\,P] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 & 2/5 & 1/5 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right]$$

Εχουμε έτσι $P = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Θα θεωρήσουμε τώρα τον $\left[\dfrac{R}{I_4}\right]$ και θα τον μετατρέ-γουμε σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό.

$$\left[\frac{R}{I_4}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 1/5 & 1/5 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - \frac{1}{5}C_1]{C_3 \to C_3 - \frac{1}{5}C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[C_4 \to C_4 + 3/5\,C_2.]{C_3 \to C_3 - 2/5\,C_2.} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & -\frac{1}{5} & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Βρίσκουμε δηλ. ότι

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 6 & 2 \end{bmatrix}$.

Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες $P$ και $Q$ τέτοιοι ώστε ο $PAQ$ να είναι σε κανονική μορφή.

Μετασχηματίζουμε πρώτα το σύνθετο πίνακα $[A|I_3]$ σε ανηγμένο Γ-κλιμακωτό $[R|P]$.

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 6 & 6 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{l} r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1 \end{array}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & -7 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 3r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 8 & 3 & -3 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{8} r_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 5r_3]{r_1 \to r_1 - 3r_3} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 0 & -1/8 & 9/8 & -3/8 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/8 & -7/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2} \left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/8 & -7/8 & 5/8 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{array}\right] = [R|P]$$

Άρα,

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -1/8 & -7/8 & 5/8 \\ 3/8 & -3/8 & 1/8 \end{bmatrix}$$

Για να βρούμε τους $Q$ και $N$, μετασχηματίζουμε τον $\left[\frac{R}{I_4}\right]$ σε ανηγμένο $\Sigma$-κλιμακωτό.

$$\left[\frac{R}{I_4}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_4} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{C_2 \leftrightarrow C_3}$$

$$\left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{C_4 \to C_4 - 2C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right] = \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Βρίσκουμε τελικά:

$$N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να επαληθεύσει την

$$N = PAQ.$$

Όπως προαναφέραμε οι τετραγωνικοί πίνακες $P$ και $Q$ για τους οποίους ισχύει

$$P\,A\,Q = N$$

όπου $A \in M_{m\times n}$ και $N$ η κανονική μορφή του $A$ δεν είναι μοναδικοί. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση όπου ο $P$ είναι κάτω τριγωνικός και ο $Q$ άνω τριγωνικός. Για την εύρεση τέτοιων τριγωνικών $P$ και $Q$ μπορούμε να εργαστούμε ως εξής:

I Μετασχηματίζουμε το σύνθετο πίνακα $[A \mid I_{m\times m}]$ σε <u>Γ-κλιμακωτό</u>, αποφεύγοντας τη δημιουργία μη μηδενικών στοιχείων πάνω από την κύρια διαγώνιο του $P$ (αυτό μπορεί να συμβεί με αντιμετάθεση γραμμών):

$$[A \mid I_{m\times m}] \sim [R' \mid P],$$

όπου $R'$ ο Γ-κλιμακωτός του $A$.

Από την προηγούμενη θεωρία είναι φανερό ότι

$$R' = P\,A$$

II Μετασχηματίζουμε το σύνθετο πίνακα $\left[\dfrac{R'}{I_{n\times n}}\right]$ σε <u>ανηγμένο Σ-κλιμακωτό</u>, αποφεύγοντας τη δημιουργία μη μηδενικών στοιχείων κάτω από την κύρια διαγώνιο του $Q$:

$$\left[\frac{R'}{I_{n\times n}}\right] \sim \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Από την προηγούμενη θεωρία είναι φανερό ότι

$$N = R'Q = P\,A\,Q$$

Εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι <u>δεν είναι πάντα δυνατό</u> να είναι οι $P$ και $Q$ τριγωνικοί.

Παράδειγμα

Εστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & 9 & 4 & -5 \end{bmatrix}$$

Στο παράδειγμα της σελ. 5.55 είδαμε ότι αν

$$P = \begin{bmatrix} 2/5 & 1/5 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/5 & -1/5 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

τότε ισχύει $PAQ = N$,

όπου $N = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ η κανονική μορφή του $A$.

Εδώ θα βρούμε άλλο ζευγάρι πινάκων $P$ και $Q$ έτσι ώστε ο $P$ να είναι κάτω τριγωνικός και ο $Q$ άνω τριγωνικός.

Μετασχηματίζουμε πρώτα το σύνθετο πίνακα $[A|I_3]$ σε Γ-κλιμακωτό:

$$[A|I_3] = \left[\begin{array}{cccc|ccc} 2 & -1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 9 & 4 & -5 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[r_1 \to \frac{1}{2} r_1]{r_3 \to r_3 - r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to r_2 - r_1}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 5/2 & 1 & -3/2 & -1/2 & 1 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_2 \to \frac{2}{5} r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 10 & 4 & -6 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 10 r_2}$$

$$\left[\begin{array}{cccc|ccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 & -1/5 & 2/5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & 1 \end{array}\right] = [R' \mid P]$$

Έχουμε έτσι $P = \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ -1/5 & 2/5 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \end{bmatrix}$

Μετατρέπουμε τώρα τον $\left[\dfrac{R'}{I_4}\right]$ σε ανηγμένο Σ-κλιμακωτό:

$$\left[\frac{R'}{I_4}\right] = \left[\begin{array}{cccc} 1 & -1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \xrightarrow[C_4 \to C_4 - \frac{1}{2}C_1]{C_2 \to C_2 + \frac{1}{2}C_1} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2/5 & -3/5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[C_4 \to C_4 + \frac{3}{5}C_2]{C_3 \to C_3 - \frac{2}{5}C_2} \left[\begin{array}{cccc} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1/2 & -1/5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\frac{N}{Q}\right]$$

Βρίσκουμε τώρα ότι $Q = \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & -1/5 & -1/2 \\ 0 & 1 & -2/5 & 3/5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

Όπως είπαμε και πιο πάνω, δεν είναι πάντα δυνατό να βρούμε τριγωνικούς $P$ και $Q$ έτσι ώστε $PAQ = N$. Αυτό συμβαίνει, για παράδειγμα, με τον πίνακα $A$ της σελ. 5.57. Ο αναγνώστης μπορεί να επιβεβαιώσει ότι μόνο ένας από τους $P$ και $Q$ μπορεί να είναι τριγωνικός.

**Ορισμός 5.4.4**
Δύο $m \times n$ πίνακες $A$ και $B$ είναι <u>ισοδύναμοι</u> αν υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P$ και $Q$ τέτοιοι ώστε
$$PAQ = B$$

Από τον ορισμό φαίνεται εύκολα ότι η σχέση

$$PAQ = B \qquad (1)$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο $M_{m\times n}(K)$, εφόσον κάθε πίνακας $A \in M_{m\times n}(K)$ είναι ισοδύναμος με τον εαυτό του:

$$I_m A I_n = A$$

(οι ταυτοτικοί πίνακες είναι αντιστρέψιμοι).

Εναλλακτικά, μπορούμε να πούμε ότι <u>αν οι πίνακες $A$ και $B$ είναι ισοδύναμοι τότε έχουν την ίδια κανονική μορφή $N$</u>. Πράγματι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η κανονική μορφή του πίνακα $A$ είναι ο πίνακας $N$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν αντιστρέψιμοι πίνακες $P'$ και $Q'$ τέτοιοι ώστε:

$$P' A Q' = N \qquad (2)$$

Εφόσον οι $P$ και $Q$ στην (1) είναι αντιστρέψιμοι, έχουμε:

$$A = P^{-1} B Q^{-1} \qquad (3)$$

Αντικαθιστώντας στην (2) βρίσκουμε

$$P' P^{-1} B Q^{-1} Q' = N$$

ή

$$P'' B Q'' = N \qquad (4)$$

όπου οι $P'' = P' P^{-1}$ και $Q'' = Q^{-1} Q'$ είναι αντιστρέψιμοι.

## 5.5 ΒΑΘΜΟΣ ΠΙΝΑΚΑ

Στα επόμενα τον πίνακα στήλης

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

με στοιχεία από το σώμα $K$ ($\mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$) θα τον θεωρούμε και διάνυσμα του $K^n$ και θα τον ονομάζουμε <u>διάνυσμα στήλης</u> ή πιο απλά <u>διάνυσμα</u>.

Θεωρούμε τώρα τον πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Εστω

$$r_i(A) = (a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}) \ , \quad i = 1, 2, \dots, m \qquad (2)$$

τα διανύσματα του $\mathbb{R}^n$ που αντιστοιχούν στις γραμμές του $A$, και

$$C_i(A) = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} \ , \qquad i = 1, 2, \dots, n \qquad (3)$$

τα διανύσματα του $\mathbb{R}^m$ που αντιστοιχούν στις στήλες του $A$.

Τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$

$$V_r(A) = L[r_1, r_2, \dots, r_m] \subseteq \mathbb{R}^n \qquad (4)$$

που παράγεται από τα διανύσματα των γραμμών του $A$ τον ονομάζουμε <u>γραμμικό χώρο των γραμμών του πίνακα $A$</u>.

Τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^m$

$$V_c(A) = L[C_1, C_2, \dots, C_n] \subseteq \mathbb{R}^m \qquad (5)$$

που παράγεται από τα διανύσματα των στηλών του $A$ τον ονομάζουμε <u>γραμμικό χώρο των στηλών του πίνακα $A$</u>.

Οι χώροι $V_r(A)$ και $V_c(A)$ είναι πεπερασμένης διάστασης. Εστω ότι

$$\gamma(A) = \dim V_r(A) \tag{6}$$

και

$$\sigma(A) = \dim V_c(A) \tag{7}$$.

Είναι φανερό από τον ορισμό της διάστασης, ότι η διάσταση $\gamma(A)$ του $V_r(A)$ είναι ο <u>μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών</u> του $A$, οπότε

$$\gamma(A) \leq m.$$

Ακόμα, επειδή ο $V_r(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\gamma(A) \leq n.$$

Εχουμε έτσι

$$\gamma(A) \leq \min(m,n) \tag{8}$$

Εντελώς ανάλογα, η διάσταση $\sigma(A)$ του $V_c(A)$ είναι ο <u>μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων στηλών του $A$</u> (άρα $\sigma(A) \leq n$) και επειδή ο $V_c(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^m$ έχουμε και σ' αυτή την περίπτωση:

$$\sigma(A) \leq \min(m,n) \tag{9}$$

Από τους πιο πάνω ορισμούς είναι φανερό ότι:

$$\gamma(A) = \sigma(A^T) \tag{10}$$

$$\sigma(A) = \gamma(A^T) \tag{11}$$

## Παράδειγμα 1

Εστω ο 2x4 πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Εχουμε:

$$r_1 = (1,2,0,1) \; , \; r_2 = (-1,1,1,2) \in \mathbb{R}^4$$

και

$$c_1 = (1,-1) \, , \; c_2 = (2,1) , \; c_3 = (0,1) \; , \; c_4 = (1,2) \in \mathbb{R}^2$$

Ο γραμμικός χώρος των γραμμών του A

$$V_r(A) = L(r_1, r_2)$$

είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^4$. Σύμφωνα με την (8),

$$\gamma(A) = \dim V_r(A) \leq \min(2,4) \Rightarrow \gamma(A) \leq 2 .$$

Εδώ παρατηρούμε ότι τα $r_1$ και $r_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, διότι στην αντίθετη περίπτωση το ένα θα ήταν βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Ετσι

$$\gamma(A) = \dim V_r(A) = 2$$

Για τη διάσταση του γραμμικού χώρου των στηλών του A

$$V_c(A) = L(c_1, c_2, c_3, c_4)$$

έχουμε από την (9):

$$\sigma(A) = \dim V_c(A) \leq \min(2,4) \Rightarrow \sigma(A) \leq 2 .$$

Ετσι στο σύνολο $\{c_1, c_2, c_3, c_4\}$ που παράγει τον $V_c(A)$ έχουμε το πολύ δύο γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία. Πράγματι, τα $c_1$ και $c_2$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (διαφορετικά, το ένα θα ήταν βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου), ενώ τα $c_3$ και $c_4$ είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $c_1$ και $c_2$:

$$C_3 = -2C_1 + C_2 = -2(1,-1) + (2,1) = (0,1)$$

$$C_4 = -C_1 + C_2 = -(1,-1) + (2,1) = (1,2)$$

Εχουμε έτσι

$$\sigma(A) = \dim V_c(A) = 2$$

[Αφού ο $V_c(A)$ είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^2$ και

$$\dim V_c(A) = 2 = \dim \mathbb{R}^2$$

είναι φανερό ότι

$$V_c(A) = \mathbb{R}^2 \ ].$$

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι οι διαστάσεις των $V_r(A)$ και $V_c(A)$ είναι ίσες:

$$\dim V_r(A) = \dim V_c(A) = 2$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω ο ταυτοτικός πίνακας

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Εχουμε:

$$\begin{aligned} r_1 &= (1,0,\ldots,0) \\ r_2 &= (0,1,\ldots,0) \\ &\vdots \\ r_n &= (0,0,\ldots,1) \end{aligned}$$

Οι γραμμές του $I_n$ αποτελούν τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, οπότε

$$V_r(I_n) = L(r_1, r_2, \ldots, r_n) = \mathbb{R}^n$$

και

$$\gamma(I_n) = \dim V_r(I_n) = \dim \mathbb{R}^n = n.$$

Επειδή

$$\sigma(I_n) = \gamma(I_n^T) = \gamma(I_n)$$

βρίσκουμε ότι

$$\sigma(I_n) = \dim V_c(I_n) = \dim V_r(I_n) = n.$$

Στα Παραδείγματα 1 και 2 βρήκαμε ότι οι διαστάσεις των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών των αντίστοιχων πινάκων είναι ίσες. Η πρόταση που ακολουθεί μας λέει ότι αυτό ισχύει για κάθε πίνακα $A \in M_{m\times n}$.

**Πρόταση 5.5.1**

Οι διαστάσεις των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ είναι ίσες:

$$\gamma(A) = \sigma(A) \qquad (12)$$

**Απόδειξη**

Έστω $\gamma = \gamma(A) \le m$ ο μέγιστος αριθμός γραμμικώς ανεξάρτητων γραμμών του $A$. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι πρώτες $\gamma$ το πλήθος γραμμές του $A$:

$$r_1, r_2, \ldots, r_\gamma$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Επειδή τα $r_1, r_2, \ldots, r_\gamma$ αποτελούν μιά βάση του γραμμικού χώρου των γραμμών του $A$, $V_r(A)$, κάθε γραμμή του $A$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $r_1, r_2, \ldots, r_\gamma$, δηλ.

$$
\begin{aligned}
r_1 &= 1\cdot r_1 + 0 r_2 + \cdots + 0 r_\gamma \\
r_2 &= 0 r_1 + 1\cdot r_2 + \cdots + 0 r_\gamma \\
&\vdots \\
r_\gamma &= 0 r_1 + 0 r_2 + \cdots + 1 r_\gamma \\
r_{\gamma+1} &= \lambda_{(\gamma+1),1} r_1 + \lambda_{(\gamma+1),2} r_2 + \cdots + \lambda_{(\gamma+1),\gamma} r_\gamma \\
&\vdots \\
r_m &= \lambda_{m1} r_1 + \lambda_{m2} r_2 + \cdots + \lambda_{m\gamma} r_\gamma .
\end{aligned}
$$

Παρατηρούμε ότι οι $i$ συνιστώσες των γραμμών $r_1, r_2, \ldots, r_m$ του $A$ δίνονται από τις σχέσεις:

$$
\left.
\begin{aligned}
a_{1i} &= 1\cdot a_{1i} + 0\cdot a_{2i} + \cdots + 0\cdot a_{\gamma i} \\
a_{2i} &= 0\cdot a_{1i} + 1\cdot a_{2i} + \cdots + 0\cdot a_{\gamma i} \\
&\vdots \\
a_{\gamma i} &= 0\cdot a_{1i} + 0\cdot a_{2i} + \cdots + 1\cdot a_{\gamma i} \\
a_{(\gamma+1)i} &= \lambda_{(\gamma+1),1} a_{1i} + \lambda_{(\gamma+1),2} a_{2i} + \cdots + \lambda_{(\gamma+1),\gamma} a_{\gamma i} \\
&\vdots \\
a_{mi} &= \lambda_{m1} a_{1i} + \lambda_{m2} a_{2i} + \cdots + \lambda_{m\gamma} a_{\gamma i}
\end{aligned}
\right\}
$$

$i = 1, 2, \ldots, n.$

Ετσι, για τη στήλη $C_i$ του $A$ έχουμε:

$$
C_i = \begin{bmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{\gamma i} \\ a_{(\gamma+1),i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{bmatrix} = a_{1i} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{(\gamma+1),1} \\ \vdots \\ \lambda_{m1} \end{bmatrix} + a_{2i} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \\ \lambda_{(\gamma+1),2} \\ \vdots \\ \lambda_{m2} \end{bmatrix} + \cdots + a_{\gamma i} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \lambda_{(\gamma+1),\gamma} \\ \vdots \\ \lambda_{m\gamma} \end{bmatrix} \quad (I) \Rightarrow
$$

$$
C_i = a_{1i} U_1 + a_{2i} U_2 + \cdots + a_{\gamma i} U_\gamma , \quad i = 1, 2, \ldots, n \qquad (II)
$$

όπου $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$ είναι τα διανύσματα στήλης στο δεξιό μέλος της (Ι).

Από την (ΙΙ) συμπεραίνουμε ότι κάθε στήλη $C_i$ του $A$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $\gamma$ το πλήθος σταθερών διανυσμάτων στήλης $u_1, u_2, \ldots, u_\gamma$. Έτσι για τη διάσταση $\sigma(A)$ του γραμμικού χώρου των στηλών του $A$ έχουμε:

$$\sigma(A) \leq \gamma = \gamma(A) \tag{III}$$

Εργαζόμενοι με παρόμοιο τρόπο στον ανάστροφο $A^T$ του $A$ βρίσκουμε ότι

$$\sigma(A^T) \leq \gamma(A^T) \tag{IV}$$

Από τις (10) και (11) γνωρίζουμε ότι

$$\gamma(A) = \sigma(A^T) \quad \text{και} \quad \sigma(A) = \gamma(A^T).$$

Αντικαθιστώντας στην IV, παίρνουμε

$$\gamma(A) \leq \sigma(A) \tag{V}$$

Από τις (ΙΙΙ) και (V) συνεπάγεται αμέσως ότι

$$\gamma(A) = \sigma(A). \quad \blacksquare$$

<u>Ορισμός 5.5.2</u>

Ονομάζουμε <u>βαθμό</u> (rank) ή <u>τάξη</u> ενός πίνακα $A \in M_{m \times n}$ και τον συμβολίζουμε με

$$\text{rank}(A)$$

την κοινή διάσταση των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών του $A$:

$$\text{rank}(A) = \gamma(A) = \sigma(A). \tag{13}$$

Από τον ορισμό 5.5.2 προκύπτουν άμεσα τα κάτωθι πορίσματα.

**Πόρισμα 1**

Για κάθε $m \times n$ πίνακα $A$ ισχύει

$$\operatorname{rank}(A) \leq \min(m,n) \tag{14}$$

**Πόρισμα 2**

Για κάθε πίνακα $A$ ισχύει

$$\operatorname{rank}(A^T) = \operatorname{rank}(A) \tag{15}$$

**Ορισμός 5.5.3**

Οι πίνακες $A, B \in M_{m\times n}$ είναι <u>ισοδύναμοι</u> (equivalent) αν έχουν τον ίδιο βαθμό; δηλ. αν

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(B) \tag{16}$$

Από τη θεωρία της διαστάσεως των γραμμικών χώρων γνωρίζουμε ότι η διάσταση ενός γραμμικού χώρου δεν μεταβάλλεται όταν στο σύνολο των γεννητόρων του χώρου εφαρμόσουμε μια ή περισσότερες από τις ακόλουθες πράξεις:

(1) Αντιμετάθεση δύο στοιχείων στο σύνολο των γεννητόρων.

(2) Αντικατάσταση ενός από τα στοιχεία αυτά με ένα βαθμωτό πολλαπλάσιό του (διάφορο του μηδενικού).

(3) Πρόσθεση σε ένα στοιχείο του βαθμωτού πολλαπλάσιου ενός άλλου.

Είναι φανερό ότι οι πιο πάνω πράξεις αντιστοιχούν στις στοιχειώδεις πράξεις που μπορούμε να εφαρμόσουμε πάνω στις γραμμές ή τις στήλες του πίνακα $A$. Έχουμε έτσι την εξής πολύ σημαντική πρόταση.

**Πρόταση 5.5.4.**
Αν δύο πίνακες είναι γραμμοϊσοδύναμοι (ή στηλοϊσοδύναμοι), τότε έχουν τον ίδιο βαθμό.

**Σημείωση:** Η πρόταση μπορεί να διατυπωθεί διαφορετικά ως εξής:
Ο βαθμός ενός πίνακα A δεν μεταβάλλεται όταν στο σύνολο των γραμμών (ή των στηλών) του A εφαρμοσθούν μια ή περισσότερες στοιχειώδεις πράξεις.

**Απόδειξη**
Εστω ο $m \times n$ πίνακας A με

$$\operatorname{rank}(A) = m. \qquad (I)$$

Αυτό σημαίνει ότι οι γραμμές $r_1, r_2, \ldots, r_m$ του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Συνεπώς ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\lambda_1 r_1 + \lambda_2 r_2 + \cdots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_m = 0 \qquad (II)$$

Θα δείξουμε ότι ο βαθμός του A δεν αλλάζει αν εφαρμόσουμε στον A έναν από τους στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών:

(α) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$$

Είναι προφανές ότι η (II) ισχύει και για τον νέο πίνακα B. Οι m γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, άρα

$$\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A) = m.$$

(β) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to a r_i} B, \quad a \neq 0.$$

Από την (II) παίρνουμε:

$$(a\lambda_1) r_1 + (a\lambda_2) r_2 + \cdots + \lambda_i (a r_i) + \cdots + (a\lambda_m) r_m = \mathbb{O} \Rightarrow$$

$$a\lambda_1 = a\lambda_2 = \cdots = \lambda_i = \cdots = a\lambda_m = 0 \qquad (III)$$

Οι $m$ γραμμές του $B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Άρα

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A) = m.$$

(γ) Έστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to r_i + a r_j} B$$

Από την (ΙΙ) παίρνουμε:

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_i r_i + \cdots + (\lambda_i a + \lambda_j) r_j + \cdots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_i a + \lambda_j = \cdots = \lambda_m = 0$$

ή ισοδύναμα

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_i r_i + \cdots + (\lambda_i a + \lambda_j) r_j + \cdots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_j = \cdots = \lambda_m = 0$$

ή ακόμα

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_i (r_i + a r_j) + \cdots + \lambda_j r_j + \cdots + \lambda_m r_m = \mathbb{O} \Rightarrow$$
$$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_j = \cdots = \lambda_m = 0. \qquad \text{(IV)}$$

Οι $m$ γραμμές του $B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Άρα

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A) = m.$$

Έχουμε μέχρι στιγμής δείξει ότι η Πρόταση ισχύει όταν $\mathrm{rank}(A) = m$.

Υποθέτουμε τώρα ότι

$$\mathrm{rank}(A) = k < m \qquad \text{(V)}$$

Έστω $B$ ο πίνακας που προκύπτει από τον $A$ με εφαρμογή ενός στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών. Για την απόδειξη της Προτάσεως αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathrm{rank}(B) \geq \mathrm{rank}(A) = k \qquad \text{(VI)}$$

Πράγματι, αν η (VI) ισχύει τότε θα έχουμε

$$\mathrm{rank}(A) \geq \mathrm{rank}(B) \qquad \text{(VII)}$$

αφού ο $A$ μπορεί να προκύψει από τον $B$ με εφαρμογή του αντίστροφου στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών.

Από τις (VI) και (VII) προκύπτει ότι:

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A).$$

Θα δείξουμε λοιπόν ότι η (VII) ισχύει για κάθε στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών.

(α) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$$

Το σύνολο των γραμμών του B είναι ίσο με το σύνολο των γραμμών του A, Εχουμε προφανώς:

$$\mathrm{rank}(B) = \mathrm{rank}(A).$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (αφού οι αντιμεταθέσεις γραμμών δεν αλλάζουν το βαθμό του πίνακα), θα υποθέσουμε τώρα ότι οι $k$ πρώτες γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ισχύει δηλαδή η συνεπαγωγή:

$$\lambda_1 r_1 + \cdots + \lambda_k r_k = \mathbb{O} \implies \lambda_1 = \cdots = \lambda_k = 0 \qquad \text{(VIII)}$$

ενώ οι υπόλοιπες γραμμές είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $r_1, r_2, \ldots, r_k$:

$$\left.\begin{array}{lcl} r_{k+1} & = & a_{k+1,1} r_1 + \cdots + a_{k+1,k} r_k. \\ \vdots & & \vdots \\ r_m & = & a_{m1} r_1 + \cdots + a_{mk} r_k \end{array}\right\} \qquad \text{(IX)}$$

(β) Εστω τώρα ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to a r_i} B \quad , \quad a \neq 0$$

Αν $i \leq k$ τότε από την (VIII) έχουμε:

$$(a\lambda_1) r_1 + \cdots + \lambda_i (a r_i) + \cdots + (a\lambda_k) r_k = \mathbb{O} \implies$$

$$\implies a\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = a\lambda_k = 0$$

Ετσι οι $k$ πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες $\implies$

$$\mathrm{rank}(B) \geq k.$$

Αν $i > k$, τότε πάλι ισχύει η

$$\mathrm{rank}(B) \geq k.$$

αφού οι κ πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.

(γ) Εστω ότι

$$A \xrightarrow{r_i \to r_i + a r_j} B.$$

- Αν $i > k$, τότε οι κ πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες.
- Αν $i \leq k$ και $j \leq k$, τότε εργαζόμαστε όπως στο (γ) του πρώτου μέλους της απόδειξης και βρίσκουμε ότι οι κ πρώτες γραμμές του B είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αρα

$$\operatorname{rank}(B) \geq k.$$

- Αν, τέλος, $i \leq k$ και $j > k$, τότε η $r_j$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $r_1, r_2, \dots, r_k$:

$$r_j = a_{j1} r_1 + \cdots + a_{ji} r_i + \cdots + a_{jk} r_k \qquad (X)$$

Θεωρούμε την

$$\lambda_1 r_1^B + \cdots + \lambda_i r_i^B + \cdots + \lambda_k r_k^B = \mathbb{O} \qquad (XI)$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\lambda_1 r_1^A + \cdots + \lambda_i (r_i^A + a r_j^A) + \cdots + \lambda_k r_k^A = \mathbb{O} \iff$$

$$\lambda_1 r_1^A + \cdots + \lambda_i \left[ r_i^A + a a_{j1} r_1^A + \cdots + a a_{ji} r_i^A + \cdots + a a_{jk} r_k^A \right] + \cdots + \lambda_k r_k^A = \mathbb{O} \iff$$

$$(\lambda_1 + \lambda_i a a_{j1}) r_1^A + \cdots + \lambda_i (1 + a a_{ji}) r_i^A + \cdots + (\lambda_k + \lambda_i a a_{jk}) r_k^A = \mathbb{O} \qquad (XII)$$

Από τις (VIII) και (XII) συνεπάγεται ότι:

$$\lambda_1 + \lambda_i a a_{j1} = \cdots = \lambda_i (1 + a a_{ji}) = \cdots = \lambda_k + \lambda_i a a_{jk} = 0 \qquad \text{(XIII)}$$

Αν $1 + a a_{ji} \neq 0$ τότε $\lambda_i = 0$ και έχουμε

$\lambda_1 = \cdots = \lambda_i = \cdots = \lambda_k = 0$.

Άρα οι $k$ πρώτες γραμμές του $B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, οπότε

$$\operatorname{rank}(B) \geqslant k.$$

Απομένει να εξετάσουμε την περίπτωση όπου

$$1 + a a_{ji} = 0 \implies a_{ji} = -\frac{1}{a} \neq 0, \quad a \neq 0 \qquad \text{(XIV)}$$

(αν $a = 0$ τότε $B = A$ και $\operatorname{rank}(B) = \operatorname{rank}(A)$). Τότε η γραμμή $r_i^B$ του $B$ είναι γραμμικός συνδυασμός των $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k$. Πράγματι

$$r_i^B = r_i^A + a r_j^A = a a_{j1} r_1^A + \cdots + (1 + a a_{ji}) r_i^A + \cdots + a a_{jk} r_k.$$

$$\implies$$

$$r_i^B = a a_{j1} r_1^A + \cdots + a a_{j,i-1} r_{i-1}^A + a a_{j,i+1} r_{i+1}^A + \cdots + a a_{jk} r_k.$$

Έτσι στις πρώτες $k$ γραμμές του $B$ έχουμε μόνο $(k-1)$ γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές. Θα δείξουμε ότι οι γραμμές $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k, r_j$ του $B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αν αυτό ισχύει, τότε υπάρχουν $k$ γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές του $B$ οπότε

$$\operatorname{rank}(B) \geqslant k.$$

και η απόδειξη είναι πλήρης.

Αν οι $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k, r_j$ είναι γραμμικώς εξαρτημένες τότε η $r_j$ μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των άλλων γραμμών:

$$r_j = b_{j1} r_1 + \cdots + b_{j,i-1} r_{i-1} + b_{j,i+1} r_{i+1} + \cdots + b_{jk} r_{jk} \qquad \text{(XV)}$$

Αφαιρώντας κατά μέλη τις (X) και (XV) έχουμε:

$$0 = (a_{j1}-b_{j1})\, r_1^A + \cdots + (a_{j,i-1}-b_{j,i-1})\, r_{i-1}^A + a_{ji}\, r_i^A + (a_{j,i+1}-b_{j,i+1})\, r_{i+1}^A + \cdots + (a_{jk}-b_{jk})\, r_k^A . \quad \text{(XVI)}$$

Επειδή τώρα οι $k$ πρώτες γραμμές του $A$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες, η (XVI) συνεπάγεται ότι:

$$a_{j1}-b_{j1} = \cdots = a_{ji} = \cdots = a_{jk}-b_{jk} = 0 .$$

Αυτό όμως είναι άτοπο, λόγω της υπόθεσης $a_{ji} \neq 0$. Άρα οι γραμμές $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_k, r_j$ του $B$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. ■

Η πρόταση 5.5.4 είναι ιδιαίτερα χρήσιμη. Από αυτήν προκύπτει άμεσα το εξής πόρισμα.

<u>Πόρισμα 1</u>

(α) Αν $R'$ και $R$ είναι ο Γ-κλιμακωτός και ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός, αντίστοιχα, του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(R') = \operatorname{rank}(R). \quad (17)$$

(β) Αν $\hat{R}'$ και $\hat{R}$ είναι ο Σ-κλιμακωτός και ο ανηγμένος Σ-κλιμακωτός, αντίστοιχα, του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\hat{R}') = \operatorname{rank}(\hat{R}). \quad (18)$$

(γ) Αν $N$ είναι η κανονική μορφή του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(N). \quad (19)$$

Το θεώρημα που ακολουθεί μας παρέχει ένα άμεσο τρόπο για την εύρεση του βαθμού ενός πίνακα.

**Θεώρημα 5.5.5**

Αν $R'$ είναι ο Γ-κλιμακωτός του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = k \qquad (20)$$

όπου $k$ ο αριθμός των μη-μηδενικών γραμμών του $R'$.

**Απόδειξη**

Εστω $R$ ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του $A$. Εφόσον οι $A$, $R'$ και $R$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι έχουμε (Θ. 5.5.4, Πόρισμα 1α):

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(R') = \operatorname{rank}(R) \qquad (\mathrm{I})$$

Εφόσον ο $R'$ έχει $k$ μη-μηδενικές γραμμές, τότε έχει το πολύ $k$ γραμμικώς ανεξάρτητες γραμμές:

$$\operatorname{rank}(R') \leq k . \qquad (\mathrm{II})$$

Σε κάθε μη μηδενική γραμμή $r_i$, $i=1,2,\ldots,k$ του $R$ υπάρχει ένα ηγετικό 1 στη θέση $(i, m(i))$, όπου

$$m(i) < m(i+1) \leq n \ , \ i = 1, 2, \ldots, k-1 .$$

Οι στήλες $C_{m(i)}$ του $R$ έχουν τη μορφή:

$$C_{m(i)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \text{(θέση } i) ,$$

είναι δηλαδή στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^m$ και άρα είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Ο $R$ έχει έτσι τουλάχιστο $k$ γραμμικώς ανεξάρτητες στήλες. Αρα

$$\operatorname{rank}(R) = \dim V_c(R) \geq k . \qquad (\mathrm{III})$$

Από τις (I)-(III) έπεται ότι

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(R') = k . \qquad \blacksquare$$

## Παράδειγμα 1

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -5 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

Ο A είναι Γ-κλιμακωτός με 3 μη-μηδενικές γραμμές. Αρα, $\mathrm{rank}(A) = 3$.

## Παράδειγμα 2

Να βρεθούν οι βαθμοί των πινάκων:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$

(α) Οι γραμμές του A είναι γραμμικώς ανεξάρτητες. Αρα,

$$\mathrm{rank}(A) = 2.$$

(β) Οι γραμμές του B είναι γραμμικώς εξαρτημένες. Ο B έχει μόνο μία γραμμικώς ανεξάρτητη γραμμή. Αρα,

$$\mathrm{rank}(B) = 1.$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν βρούμε τον Γ-κλιμακωτό του B:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 - 2r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = R'$$

Ο $R'$ έχει 1 μη μηδενική γραμμή. Αρα $\mathrm{rank}(B) = 1$.

## Παράδειγμα 3

Να βρεθούν οι βαθμοί των πινάκων.

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -7 & 9 \end{bmatrix}$

(α) Βρίσκουμε τον Γ-κλιμακωτό του A.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 5 & 4 & 5 \\ 3 & 7 & 1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 + r_1]{\substack{r_2 \to r_2 - 5r_1 \\ r_3 \to r_3 - 3r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \leftrightarrow r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & -6 & -5 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{\substack{r_3 \to r_3 + 6r_2. \\ r_4 \to r_4 - r_2.}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -35 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{r_3}{35}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - 9r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Γ-κλιμακωτός του A έχει 3 μη-μηδενικές γραμμές. Άρα

$$\text{rank}(A) = 3.$$

(β)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & -6 & 6 \\ 1 & 3 & 4 & -5 & 8 \\ 1 & 3 & 5 & -7 & 9 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_1]{\substack{r_2 \to \frac{1}{2} r_2. \\ r_3 \to r_3 - r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & -2 & 4 \\ 0 & 2 & 3 & -4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_3 \to r_3 - 2r_2. \\ r_4 \to r_4 - 2r_2.}}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 4 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to -\frac{1}{2} r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 + r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & -3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & -3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ο Γ-κλιμακωτός του B έχει 3 μη μηδενικές γραμμές. Άρα

$$\text{rank}(B) = 3.$$

Παρατηρούμε στο παράδειγμα αυτό ότι δύο πίνακες μπορεί να έχουν τον ίδιο βαθμό χωρίς να είναι του ίδιου τύπου.

Από το θεώρημα 5.5.5 προκύπτουν άμεσα τα εξής πορίσματα.

<u>Πόρισμα 1.</u>

Αν $\hat{R}'$ είναι ο Σ-κλιμακωτός του $m \times n$ πίνακα $A$, τότε

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(\hat{R}') = k, \tag{21}$$

όπου $k$ ο αριθμός των μη-μηδενικών στηλών του $\hat{R}'$.

<u>Πόρισμα 2</u>

Αν $A \in M_{m \times n}$ και η κανονική μορφή του $A$ είναι:

$$N = \begin{bmatrix} I_{k \times k} & O_{k \times (n-k)} \\ O_{(m-k) \times k} & O_{(m-k) \times (n-k)} \end{bmatrix},$$

τότε

$$\operatorname{rank}(A) = k \tag{22}$$

<u>Πόρισμα 3</u>

$$\operatorname{rank}(I_n) = n \tag{23}$$

<u>Πόρισμα 4</u>

Για κάθε στοιχειώδη $n \times n$ πίνακα $E$, ισχύει

$$\operatorname{rank}(E) = n. \tag{24}$$

<u>Απόδειξη</u>

Πολύ απλή. Αφήνεται ως άσκηση. □

Το θεώρημα που ακολουθεί μας λέει ότι ο βαθμός ενός πίνακα δεν μεταβάλλεται αν τον πολλαπλασιάσουμε (από τ' αριστερά ή από τα δεξιά) μ' έναν οποιοδήποτε αντιστρέψιμο πίνακα.

**<u>Θεώρημα 5.5.6.</u>**

Εστω ο $m \times n$ πίνακας $A$.

(α) Αν ο $m \times m$ πίνακας $B$ είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\text{rank}(BA) = \text{rank}(A) \tag{25}$$

(β) Αν ο $n \times n$ πίνακας $B$ είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\text{rank}(AB) = \text{rank}(A) \tag{26}$$

<u>Απόδειξη.</u>

(α) Αν ο $B$ είναι αντιστρέψιμος, τότε σύμφωνα με το Θ. 5.3.5 ο $B$ είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων:

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k.$$

Αρα

$$BA = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

οπότε οι $BA$ και $A$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι και ως εκ τούτου του ίδιου βαθμού (Πρ. 5.5.4).

(β) Αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. ■

**<u>Θεώρημα 5.5.7</u>**

Ο $n \times n$ πίνακας $A$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν

$$\text{rank}(A) = n \tag{27}$$

<u>Απόδειξη.</u>

Αν ο $A$ είναι αντιστρέψιμος τότε ο ανηγμένος κλιμακωτός του είναι ο $I_n$:

$$R = I_n.$$

Εφόσον οι $A$ και $I_n$ είναι γραμμοϊσοδύναμοι, τότε σύμφωνα με την Πρ. 5.5.4

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(I_n) = n.$$

(Χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 3 του Θ. 5.5.5).

Αντίστροφα, αν $\text{rank}(A) = n$, τότε $\text{rank}(R) = n$. Άρα ο $R$ δεν έχει μηδενική γραμμή και $R = I_n$. Άρα ο $A$ είναι αντιστρέψιμος.

■

**Θεώρημα 5.5.8.**
Το $m \times n$ γραμμικό σύστημα
$$AX = B$$
έχει λύση αν και μόνο αν ο πίνακας $A$ και ο επαυξημένος πίνακας $[A|B]$ έχουν τον ίδιο βαθμό, δηλ. αν και μόνο αν
$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}([A|B]) \qquad (28)$$

Απόδειξη.
Εστω $R$ και $[R|S]$ οι ανηγμένοι κλιμακωτοί των $A$ και $[A|B]$, αντίστοιχα. Σύμφωνα με την Πρ. 5.5.4,
$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(R) \quad \text{και} \quad \operatorname{rank}([A|B]) = \operatorname{rank}([R|S]). \quad (\mathrm{I})$$
Σύμφωνα τώρα με το Πόρισμα 2 του Θ. 5.2.2, το γραμμικό σύστημα $AX=B$ έχει λύση αν και μόνο αν ο $[R|S]$ δεν έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη, δηλ. αν και μόνο αν οι $R$ και $[R|S]$ έχουν ίσο πλήθος μη μηδενικών γραμμών, ή, ισοδύναμα, αν και μόνο αν
$$\operatorname{rank}(R) = \operatorname{rank}([R|S]) \qquad (\mathrm{II})$$
(Θεώρημα 5.5.5). Λαμβάνοντας υπόψη την (Ι), το θεώρημα έχει αποδειχθεί. ■

Παράδειγμα.
Αν
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν οι $\operatorname{rank}(A)$ και $\operatorname{rank}([A|B])$

(β) Είναι το σύστημα $AX=B$ συμβιβαστό;

(γ) Αν ναι, να βρεθεί η λύση του συστήματος.

(α)

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 & 3 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 - 3r_1]{r_2 \to r_2 - 2r_1}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -6 & -18 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to -r_2.]{r_2 \leftrightarrow r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & -3 & 6 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_3 \to r_3 + 3r_2.]{r_1 \to r_1 - r_2.}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -15 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 18 & 54 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{18} r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -5 & -15 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 6 & 18 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] \xrightarrow[r_2 \to r_2 - 6r_3]{r_1 \to r_1 + 5r_3}$$

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right] = [R|S].$$

Οι $R$ και $[R|S]$ έχουν 3 μη μηδενικές γραμμές. Αρα

$$\text{rank}(A) = \text{rank}(R) = 3 \quad \text{και}$$

$$\text{rank}([A|B]) = \text{rank}([R|S]) = 3.$$

(β) Το σύστημα $AX = B$ είναι συμβιβαστό αφού $\text{rank}(A) = \text{rank}([A|B])$.

(γ) Το σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$RX = S.$$

ή

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad\qquad &= 1 \\ x_2 - 2x_3 \qquad\quad &= 0 \\ x_4 + 3x_5 &= 0. \end{aligned}$$

Εχουμε άπειρες το πλήθος λύσεις με δύο ελεύθερες μεταβλητές.
Θέτουμε $x_3 = \lambda$ και $x_5 = \mu$ και έχουμε τη γενική λύση.

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2\lambda$$
$$x_3 = \lambda$$
$$x_4 = -3\mu$$
$$x_5 = \mu.$$

# ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

5.1 Να βρεθούν οι ανηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες των ακόλουθων πινάκων:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$

5.2 Νά βρεθοῦν οἱ ἀνηγμένοι κλιμακωτοί πίνακες τῶν ἀκόλουθων πινάκων

(i) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (ii) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

(iii) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 5 & 4 \\ 4 & -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ (iv) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 2 & 2 \\ -1 & 4 & 3 & 3 & 4 & 7 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 8 & 3 \\ 3 & 1 & 4 & -1 & 4 & 0 \\ 5 & 2 & 7 & 0 & 10 & 2 \end{pmatrix}$

(v) $\begin{pmatrix} i & 1-i & i & 0 \\ 1 & -2 & 0 & i \\ 1-i & -1+i & 1 & 1 \end{pmatrix}$

(vi) $\begin{pmatrix} 1 & 1-\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & -3 & 1+\sqrt{2} & -1-2\sqrt{2} \\ -1 & \sqrt{2} & -1 & 1 \\ \sqrt{2}-2 & -2+4\sqrt{2} & -2-\sqrt{2} & 3+\sqrt{2} \end{pmatrix}$

5.3 Νά ἐξετασθεῖ ἄν οἱ πίνακες στίς παρακάτω περιπτώσεις (i) καί (ii) εἶναι γραμμοϊσοδύναμοι.

(i) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 0 \\ -2 & -5 & 4 & 3 \end{pmatrix}$

5.4 Να βρεθούν οι λύσεις (αν υπάρχουν) των ακόλουθων γραμμικών συστημάτων:

(α)
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 + x_3 + x_4 &= 1 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 + 3x_4 &= 1 \\ 2x_1 - 2x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 + x_2 - x_3 - 3x_4 &= 3 \end{aligned}$$

(β)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_3 &= -1 \\ 2x_1 + x_2 - 2x_3 &= 1 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 &= 1 \end{aligned}$$

(γ)
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - 3x_4 - x_5 &= 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 &= 0 \\ 4x_1 - 2x_2 + 6x_3 + 3x_4 - 4x_5 &= 0 \\ 2x_1 + 4x_2 - 2x_3 + 4x_4 - 7x_5 &= 0 \end{aligned}$$

[Σημείωση: δες το Πρόβλημα 5.1 (β)-(δ)]

5.5 Να βρεθεί ο ανηγμένος κλιμακωτός του πίνακα:

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 & -3 & 2 & 6 \\ 2 & -3 & 5 & -1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 4 & 3 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 3 & 3 & -9 & -6 \end{bmatrix}$$

Στη συνέχεια να βρεθεί η λύση (αν υπάρχει) του συστήματος:

$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 - 3x_4 + 2x_5 &= 6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 - x_4 + x_5 &= 8 \\ 4x_3 + 3x_4 + 2x_5 &= 3 \\ -2x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 3x_4 - 9x_5 &= -6 . \end{aligned}$$

**5.6** Νά λυθοῦν τά ὁμογενή γραμμικά συστήματα μέ τούς ἀκόλουθους πίνακες συντελεστῶν

(i) $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -8 & 5 & -6 & -1 \end{pmatrix}$

(ii) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 2 & 3 \\ 5 & 2 & 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ (iii) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & -3 \end{pmatrix}$

(iv) $\begin{pmatrix} 5 & -3 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 & 2 & 1 & -1 \\ 2 & -3 & 5 & -5 & -4 & 6 \\ 3 & -6 & 11 & -12 & -5 & 9 \\ 7 & -3 & 0 & 5 & 3 & -1 \end{pmatrix}$

**5.7** Νά λυθοῦν τά μή-ὁμογενή γραμμικά συστήματα μέ τούς ἀκόλουθους ἐπαυξημένους πίνακες

(i) $\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -1 & 0 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right)$ (ii) $\left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 1 & -1 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 & 5 & 3 \\ 2 & 1 & 1 & 6 & 2 \end{array}\right)$

(iii) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 1 & -1 & 1 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 2 & 4 & 4 & 8 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 & 3 \\ -1 & 1 & 5 & 1 & 1 & 2 \end{array}\right)$

(iv) $\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 0 & 1 & -1 & 1 & 4 \\ -1 & 0 & 2 & 3 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 & 4 & 10 & 7 \end{array}\right)$

**5.8** Νά βρεθοῦν οἱ συνθῆκες τίς ὁποῖες πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τά $\lambda$ καί $\mu$ ἔτσι ὥστε τά ἀκόλουθα γραμμικά συστήματα νά ἔχουν (i) μιά μοναδική λύση, (ii) καμιά λύση, (iii) ἄπειρο ἀριθμό λύσεων

(a) $$\begin{aligned} 2x + 3y + z &= 5 \\ 3x - y + \lambda z &= 2 \\ x + 7y - 6z &= \mu \end{aligned}$$

(b) $$\begin{aligned} x + y - 4z &= 0 \\ 2x + 3y + z &= 1 \\ 4x + 7y + \lambda z &= \mu \end{aligned}$$

**5.9** Γιά ποιές τιμές τοῦ λ οἱ ἐξισώσεις

$$x + y + z = a$$
$$\lambda x + 2y + z = b$$
$$\lambda^2 + 4\lambda + z = c$$

ἔχουν μιά μοναδική λύση; Στίς ειδικές περιπτώσεις, νά ϐρεθοῦν οἱ συνθῆκες τίς ὁποῖες πρέπει νά ἱκανοποιοῦν τά $a$, $b$, $c$ ἔτσι ὥστε νά ὑπάρχει μιά λύση καί νά ϐρεθεῖ ἡ γενική λύση.

**5.10** Νά ὁρισθοῦν οἱ τιμές τοῦ λ γιά τίς ὁποῖες τά ἑπόμενα γραμμικά συστήματα εἶναι συμβιβαστά καί γιά τίς ζητούμενες τιμές τοῦ λ νά ϐρεθοῦν οἱ πλήρεις λύσεις

(i)
$$\begin{aligned} 5x + 2y - z &= 1 \\ 2x + 3y + 4z &= 7 \\ 4x - 5y + \lambda z &= \lambda - 5 \end{aligned}$$

(ii)
$$\begin{aligned} x + 2y + \lambda z &= 0 \\ 2x + 3y - 2z &= \lambda \\ \lambda x + y + \lambda z &= 3 \end{aligned}$$

(iii)
$$\begin{aligned} x - 5y + 3 &= 0 \\ 5x + y - \lambda &= 0 \\ x + 2y + \lambda &= 0 \end{aligned}$$

(iv)
$$\begin{aligned} 2x + 3y + z + t &= 0 \\ x + 2y + z - t &= 1 \\ 3x + 5y + 2z + t &= \lambda \\ 6x + 10y + 4z + t &= (\lambda + 1)^2 \end{aligned}$$

**5.11** Νά ϐρεθοῦν οἱ πλήρεις λύσεις τοῦ συστήματος

$$\begin{aligned} y + z + u + 2v &= 2 \\ -x + 4y + 3z + 3u + 4v &= 7 \\ 2x + y + 3z + 2u + 8v &= 3 \\ 3x + y + 4z - u + 4v &= 0 \\ 5x + 2y + 7z + 10v &= 2 \end{aligned}$$

**5.12** Νά λυθεῖ πλήρως τό σύστημα

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 &= 0 \\ x_2 + x_3 + x_4 &= 0 \\ &\cdots\cdots\cdots \\ x_{n-3} + x_{n-2} + x_{n-1} &= 0 \\ x_{n-2} + x_{n-1} + x_n &= 0 \\ x_{n-1} + x_n &= 0 \end{aligned}$$

ὅταν (i) $n = 8$, (ii) $n = 9$.

5.13 Να βρεθούν οι αντίστροφοι των ακόλουθων πινάκων (αν υπάρχουν).

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ (γ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(δ) $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ (ε) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -5 \\ -4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

5.14 Να βρεθούν οι αντίστροφοι (αν υπάρχουν) των ακόλουθων πινάκων

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & 4 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 2 & -5 & -1 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & i & 0 \\ i & -1 & 1+i \\ 1-i & 0 & 2 \end{bmatrix}$

5.15 Να βρεθούν αντιστρέψιμοι πίνακες P και Q τέτοιοι ώστε ο PAQ να είναι η κανονική μορφή για τους ακόλουθους πίνακες A:

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

5.16 Να υπολογιστεί ο πίνακας X που ικανοποιεί την εξίσωση $AX = B$, όπου

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$$

5.17 Αν

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} 5 \\ 2 \\ 7 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν οι rank(A) και rank([A|B])

(β) Είναι το σύστημα $AX=B$ συμβιβαστό;

(γ) Αν ναι, να βρεθεί η λύση του συστήματος.

5.18 Βρείτε τους βαθμούς των παρακάτω πινάκων.

(α) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -1 & 1 \end{bmatrix}$ (β) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 4 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(γ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 2 \end{bmatrix}$ (δ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 & 3 \\ 1 & -3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 7 \\ 1 & 0 & -4 & 10 \end{bmatrix}$

5.19 Να επαναληφθεί η άσκηση 5.17 όταν

I $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 3 \\ 1 \end{bmatrix}$

II $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$

III $\quad A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$