6 ΟΡΙΖΟΥΣΕΣ

Στο κεφάλαιο αυτό θα ορίσουμε την έννοια της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα και θα μελετήσουμε τις βασικές ιδιότητες των οριζουσών. Οι ορίζουσες βρίσκουν εφαρμογές στην επίλυση γραμμικών συστημάτων, στην εύρεση του αντίστροφου πίνακα, στη μελέτη γραμμικών απεικονίσεων και αλλού.

Υπάρχουν δύο βασικοί τρόποι ορισμού της ορίζουσας ενός τετραγωνικού πίνακα:

1 Επαγωγικά.

Ορίζεται πρώτα η 2x2 ορίζουσα. Η 3x3 ορίζουσα μπορεί να οριστεί συναρτήσει 2x2 οριζουσών κ.ο.κ.

3 Άμεσα, με τη βοήθεια της έννοιας της μετάθεσης.

Εδώ επιλέξαμε το δεύτερο τρόπο. Ο επαγωγικός τρόπος θα συζητηθεί σε επόμενη παράγραφο.

6.1 ΜΕΤΑΘΕΣΕΙΣ

Ορισμός 6.1.1

Θεωρούμε το σύνολο $T_n = \{1, 2, \ldots, n\} \subseteq \mathbb{N}$ των φυσικών αριθμών από 1 ως n με αύξουσα τάξη. Ονομάζουμε μετάθεση (permutation) των $1, 2, \ldots, n$ κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση σ του T_n επί τον εαυτού του (δηλ. $\sigma : T_n \to T_n$) και τη συμβολίζουμε με

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$$

ή $\quad \sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$

Παράδειγμα

Εστω η μετάθεση $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ των $1, 2, 3, 4$.

Η σ γράφεται επίσης $\sigma = (4, 2, 1, 3)$ γιατί $\sigma_1 = 4$, $\sigma_2 = 2$, $\sigma_3 = 1$ και $\sigma_4 = 3$.

Εστω S_n το σύνολο των μεταθέσεων των $1, 2, \ldots, n$. Είναι φανερό ότι $S_n \neq \emptyset$ αφού η φυσική διάταξη

$$e = (1, 2, \ldots, n) \in S_n.$$

Η μετάθεση e καλείται ταυτοτική.

Παράδειγμα: Να βρεθούν όλες οι μεταθέσεις των $T_1 = \{1\}$, $T_2 = \{1, 2\}$ και $T_3 = \{1, 2, 3\}$.

(α) $T_1 = \{1\}$: (1)

(β) $T_2 = \{1, 2\}$: $(1, 2)$ και $(2, 1)$

(γ) $T_3 = \{1, 2, 3\}$: $(1,2,3)$, $(1,3,2)$, $(2,3,1)$, $(2,1,3)$, $(3,1,2)$, $(3,2,1)$.

Θεώρημα 6.1.2

Το πλήθος των μεταθέσεων των $1, 2, \dots, n$ είναι $n!$

Απόδειξη

Η πρώτη θέση μιας μετάθεσης των $1, 2, \dots, n$ μπορεί να καταληφθεί από οποιοδήποτε από τους n ακέραιους. Η δεύτερη θέση μπορεί να καταληφθεί από οποιοδήποτε από τους εναπομένοντες $(n-1)$ ακέραιους, η τρίτη θέση από οποιοδήποτε από τους εναπομένοντες $(n-2)$ ακέραιους κ.ο.κ. Η τελευταία θέση θα καταληφθεί από τον εναπομένοντα ακέραιο.

Εχουμε έτσι

$$n(n-1)\cdots 2\cdot 1 = n!$$

πιθανές μεταθέσεις των $1, 2, \dots, n$.

Η <u>σύνθεση</u> $\tau\sigma$ δύο μεταθέσεων τ, σ του S_n, που θα τη συμβολίζουμε πιο απλά με $\tau\sigma$ είναι η μετάθεση:

$$\tau\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau_1 & \tau_2 & \cdots & \tau_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \tau_{\sigma_1} & \tau_{\sigma_2} & \cdots & \tau_{\sigma_n} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Παράδειγμα.

Εστω οι μεταθέσεις $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Εχουμε για τις $\tau\sigma$ και $\sigma\tau$:

$$\tau\sigma = (\tau_{\sigma_1}, \tau_{\sigma_2}, \tau_{\sigma_3}) = (\tau_2, \tau_1, \tau_3) = (1, 3, 2)$$

$$\sigma\tau = (\sigma_{\tau_1}, \sigma_{\tau_2}, \sigma_{\tau_3}) = (\sigma_3, \sigma_1, \sigma_2) = (3, 2, 1)$$

Παρατηρούμε ότι η σύνθεση μεταθέσεων δεν είναι αντιμεταθετική, δηλαδή γενικά

$$\tau\sigma \neq \sigma\tau \qquad (2).$$

Είναι όμως φανερό ότι για κάθε $\tau \in S_n$, ισχύει:

$$\tau e = e\tau = \tau \qquad (3)$$

όπου e η ταυτοτική μετάθεση.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η σύνθεση μεταθέσεων είναι προσεταιριστική, δηλαδή για $\sigma, \tau, \upsilon \in S_n$ ισχύει:

$$\sigma(\tau\upsilon) = (\sigma\tau)\upsilon \qquad (4)$$

Η <u>αντίστροφη</u> μετάθεση της $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \end{pmatrix}$ συμβολίζεται με σ^{-1} και είναι η

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \cdots & \sigma_n \\ 1 & 2 & \cdots & n \end{pmatrix}. \qquad (5)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι

$$\sigma\sigma^{-1} = \sigma^{-1}\sigma = e \qquad (6)$$

<u>Παράδειγμα</u>.

Η αντίστροφη μετάθεση της $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ είναι η

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>Πρόταση 6.1.3</u>

Το σύνολο S_n των μεταθέσεων των $1, 2, \dots, n$ αποτελεί <u>αλγεβρική ομάδα</u> ως προς τη σύνθεση "$\circ$". Δηλαδή ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) $\sigma \circ \tau \in S_n \quad \forall\, \sigma, \tau \in S_n$

(ii) $\sigma \circ (\tau \circ \upsilon) = (\sigma \circ \tau) \circ \upsilon \quad \forall\, \sigma, \tau, \upsilon \in S_n$

(iii) Υπάρχει και ορίζεται μάλιστα μονοσήμαντα το ταυτοτικό στοιχείο $e \in S_n$, τέτοιο ώστε:

$$\tau \circ e = e \circ \tau = \tau \quad \forall\, \tau \in S_n$$

(iv) Για κάθε $\tau \in S_n$ υπάρχει η αντίστροφη μετάθεση τ^{-1}, έτσι ώστε.

$$\tau \circ \tau^{-1} = \tau^{-1} \circ \tau = e$$

Το σύνολο S_n λέγεται συνήθως <u>συμμετρική ομάδα</u>.

Από την Πρόταση 6.1.3 βγαίνουν τα ακόλουθα σημαντικά συμπεράσματα:

(α) Όταν η σ διατρέχει το S_n τότε και η σ^{-1} διατρέχει το S_n.

(β) Αν $\tau \in S_n$ είναι μια σταθερή μετάθεση και η σ διατρέχει το S_n τότε και οι $\sigma \circ \tau$, $\tau \circ \sigma$, $\sigma^{-1} \circ \tau$, $\tau \circ \sigma^{-1}$, $\tau^{-1} \circ \sigma$, $\sigma \circ \tau^{-1}$ και $\tau^{-1} \circ \sigma^{-1}$ διατρέχουν το S_n.

<u>Παράδειγμα</u> Οι μεταθέσεις του S_2 είναι οι $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ και $\tau = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.
Εχουμε για τις αντίστροφές τους:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \sigma \quad \text{και} \quad \tau^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \tau.$$

Επαληθεύσαμε έτσι το συμπέρασμα (α).

<u>Ασκηση:</u> Να επαληθευτεί το συμπέρασμα (α) για το S_3.

<u>Ορισμός 6.1.4</u>

Θα λέμε ότι η μετάθεση $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ παρουσιάζει μία <u>αντιστροφή</u> (inversion) ή <u>παράβαση</u> όταν

για $i<j$ ισχύει $\sigma_i>\sigma_j$,

δηλαδή όταν ένας αριθμός προηγείται ενός μικρότερού του. Διαφορετικά, θα λέμε ότι έχουμε <u>τήρηση</u>.

Το πλήθος των αντιστροφών μιάς μεταθέσεως σ λέγεται <u>δείκτρια</u> της μεταθέσεως και συμβολίζεται με $\mu(\sigma)$.

Η δείκτρια $\mu(\sigma)$ μιας μεταθέσεως $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)$ υπολογίζεται ως εξής: Έστω a_i το πλήθος των μικρότερων από το σ_i ακέραιων που βρίσκονται δεξιά του σ_i. ($i=1,2,\ldots,n$). Τότε

$$\mu(\sigma)=a_1+a_2+\cdots+a_n=\sum_{i=1}^{n}a_i \qquad (7)$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

Εστω η μετάθεση $\sigma=(1,3,2,4)$.

Εχουμε $\sigma_1=1$ και προφανώς $a_1=0$. Ο $\sigma_2=3$ ακολουθείται από έναν μικρότερο του, τον $\sigma_3=2$, άρα $a_2=1$. Οι $\sigma_3=2$ και $\sigma_4=4$ δεν ακολουθούνται από μικρότερους αριθμούς και έτσι $a_3=a_4=0$. Εχουμε τελικά:

$$\mu(\sigma)=0+1+0+0=1.$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω η μετάθεση $\tau=(4,3,2,1)$.

Τον $\tau_1=4$ ακολουθούν τρεις αριθμοί που είναι μικρότεροί του, άρα $a_1=3$.

Ο $\tau_2 = 3$ ακολουθείται από δύο μικρότερούς του αριθμούς, άρα $a_2 = 2$. Παρομοίως, βρίσκουμε ότι

$$a_3 = 1 \quad \text{και} \quad a_4 = 0 .$$

Άρα

$$\mu(\tau) = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 + 2 + 1 + 0 = 6 .$$

<u>Παράδειγμα 3.</u>

Η ταυτοτική μετάθεση $e = (1, 2, \ldots, n)$ δεν έχει αντιστροφή. Άρα

$$\mu(e) = 0$$

<u>Ερώτηση</u>: Ποιος είναι ο μέγιστος δυνατός αριθμός αντιστροφών της μετάθεσης $\sigma = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in S_n$;

<u>Ορισμός 6.1.5</u>

Μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ ονομάζεται <u>άρτια</u> αν ο αριθμός των αντιστροφών που παρουσιάζει είναι <u>άρτιος</u>. Αν αυτό δεν συμβαίνει, η σ είναι <u>περιττή</u>.

<u>Παράδειγμα 1.</u>

Είδαμε σε προηγούμενα παραδείγματα ότι

$$\mu((1,3,2,4)) = 1 \quad \text{και} \quad \mu((4,3,2,1)) = 6 .$$

Η πρώτη μετάθεση είναι περιττή και η δεύτερη άρτια.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Για τις μεταθέσεις των $1, 2, 3$ έχουμε:

$$\mu((1,2,3)) = 0 + 0 + 0 = 0$$
$$\mu((3,1,2)) = 2 + 0 + 0 = 2$$
$$\mu((2,3,1)) = 1 + 1 + 0 = 2$$
$$\mu((3,2,1)) = 2 + 1 + 0 = 3$$
$$\mu((1,3,2)) = 0 + 1 + 0 = 1$$
$$\mu((2,1,3)) = 1 + 0 + 0 = 1$$

Βλέπουμε ότι οι τρεις πρώτες μεταθέσεις είναι άρτιες ενώ οι άλλες τρεις είναι περιττές.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Επειδή $\mu(e)=0$, όλες οι ταυτοτικές μεταθέσεις είναι άρτιες.

Ο καθορισμός του πλήθους των αντιστροφών μιας μεταθέσεως έχει ιδιαίτερη σημασία για τον προσδιορισμό ενός βασικού χαρακτηριστικού μιας μεταθέσεως, του <u>προσήμου</u> της.

Εστω η μετάθεση $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in S_n$. Θεωρούμε το γινόμενο

$$\Pi=\prod_{i<j}^{1,n}(\sigma_j-\sigma_i)=\begin{array}{l}(\sigma_2-\sigma_1)\,(\sigma_3-\sigma_1)\cdots(\sigma_n-\sigma_1)\\ \qquad\qquad\;(\sigma_3-\sigma_2)\cdots(\sigma_n-\sigma_2)\\ \qquad\qquad\qquad\quad\ddots\qquad\vdots\\ \qquad\qquad\qquad\qquad\;(\sigma_n-\sigma_{n-1})\end{array}\qquad(8)$$

Αν $\mu(\sigma)=2K$, τότε το πλήθος των αρνητικών παραγόντων του Π θα είναι άρτιο και επομένως θα έχουμε:

$$(\text{Πρόσημο } \Pi)1=(-1)^{2K}=1$$

Αν $\mu(\sigma)=2K+1$, τότε το πλήθος των αρνητικών παραγόντων του Π θα είναι περιττό και επομένως θα έχουμε:

$$(\text{Πρόσημο } \Pi)\,1=(-1)^{2K+1}=-1$$

Το πρόσημο του γινομένου Π το ονομάζουμε <u>πρόσημο της μεταθέσεως σ</u>. και το συμβολίζουμε με $\operatorname{sgn}(\sigma)$. Εχουμε έτσι τον ακόλουθο ορισμό:

Ορισμός 6.1.6

Εστω ότι η μετάθεση $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in S_n$ έχει $\mu(\sigma)$ το πλήθος αντιστροφές. Η συνάρτηση $sgn(\sigma)$ του συνόλου S_n επί του $\{-1,1\}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$sgn(\sigma) = (-1)^{\mu(\sigma)}$$

ονομάζεται <u>πρόσημο της μεταθέσεως σ</u>.

Ετσι έχουμε

$$sgn(\sigma)=\begin{cases} +1, & \text{αν } \sigma \text{ άρτια} \\ -1, & \text{αν } \sigma \text{ περιττή}. \end{cases}$$

Παράδειγμα 1

Για τις μεταθέσεις των 1,2,3 έχουμε:

$$\mu((1,2,3))=0 \Rightarrow sgn((1,2,3))=1$$
$$\mu((3,1,2))=2 \Rightarrow sgn((3,1,2))=1$$
$$\mu((2,3,1))=2 \Rightarrow sgn((2,3,1))=1$$
$$\mu((3,2,1))=3 \Rightarrow sgn((3,2,1))=-1$$
$$\mu((1,3,2))=1 \Rightarrow sgn((1,3,2))=-1$$
$$\mu((2,1,3))=1 \Rightarrow sgn((2,1,3))=-1$$

Πρόταση 6.1.7.

Για την ταυτοτική μετάθεση $e=(1,2,\dots,n)$ ισχύει

$$sgn(e)=1.$$

Απόδειξη.

Η ταυτοτική μετάθεση δεν παρουσιάζει αντιστροφές. Αρα $\mu(e)=0$ και $sgn(e)=(-1)^0=1$ ∎

Πρόταση 6.1.8

Αν $\sigma, \tau \in S_n$, τότε

$$\operatorname{sgn}(\tau\sigma) = \operatorname{sgn}(\tau)\, \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Απόδειξη.

Δεν θεωρείται σημαντική στις ανά χείρας σημειώσεις. Ο αναγνώστης παραπέμπεται στο βιβλίο των Γ. Παντελίδη, Δ. Κραββαρίτη, Β. Νασόπουλου και Π. Τσεκρέκου : "Γραμμική Άλγεβρα", Εκδόσεις Συμεών, Αθήνα 1992. □

Πόρισμα 1

Για κάθε $\sigma \in S_n$ ισχύει

$$\operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma).$$

Απόδειξη

Επειδή $\sigma\sigma^{-1} = e$, από την Πρ. 6.1.8 έχουμε

$$\operatorname{sgn}(e) = \operatorname{sgn}(\sigma\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}).$$

Επειδή τώρα $\operatorname{sgn}(e) = 1$ (Πρ. 6.1.7), έχουμε

$$1 = \operatorname{sgn}(\sigma)\, \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \Longrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = 1/\operatorname{sgn}(\sigma)$$

$$\Longrightarrow \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) = \operatorname{sgn}(\sigma). \quad ■$$

Η πιο κάτω πρόταση είναι ιδιαίτερα χρήσιμη.

Πρόταση 6.1.9.

Αν σε μια μετάθεση $\sigma \in S_n$ εναλλάξουμε δύο στοιχεία, τότε το πρόσημο της μετάθεσης αλλάζει.

Απόδειξη

Δεν εμπίπτει στους στόχους των σημειώσεων. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να προστρέξει στο βιβλίο του Δ.Γ. Δασκαλόπουλου, "Εφηρμοσμένη Γραμμική Αλγεβρα", Αθήναι (1979) ή στο βιβλίο του H. Eves, "Elementary Matrix Theory", Dover, New York (1980). $\square$

Παράδειγμα 1 Να βρεθούν τα πρόσημα των μεταθέσεων:

$$\sigma = (6,5,4,3,2,1)$$
$$\tau = (6,3,4,5,2,1)$$
$$\upsilon = (1,5,4,2,3,6).$$

Για τη σ έχουμε:

$$\mu(\sigma) = 5+4+3+2+1+0 = 15,$$

άρα

$$sgn(\sigma) = (-1)^{15} = -1.$$

Η τ προκύπτει από τη σ αν εναλλάξουμε ~~το~~ 5 με το 3. Σύμφωνα με την πρόταση 6.1.9:

$$sgn(\tau) = -sgn(\sigma) = +1.$$

Η υ προκύπτει από τη σ αν εναλλάξουμε το 6 με το 1 και το 3 με το 2. Σύμφωνα με την Πρ. 6.1.9,

$$sgn(\upsilon) = sgn(\sigma) = -1.$$

Παράδειγμα 2 Να βρεθεί το πρόσημο της

$$\sigma = (1,2,3,4,8,6,7,5).$$

Η σ προκύπτει από την ταυτοτική μετάθεση με μια εναλλαγή στοιχείων (το 8 με το 5). Άρα

$$sgn(\sigma) = -sgn(e) = -1.$$

6.2 ΓΕΝΙΚΑ ΠΕΡΙ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Ορισμός 6.2.1

Εστω ο τετραγωνικός $n\times n$ πίνακας

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{bmatrix}.$$

Καλούμε ορίζουσα (determinant) του πίνακα A το άθροισμα

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n} \qquad (1).$$

Το άθροισμα (1) θεωρείται πάνω σ' όλες τις μεταθέσεις $\sigma=(\sigma_1,\sigma_2,\dots,\sigma_n)\in S_n$.

Ο αριθμός n είναι η τάξη της ορίζουσας. Την ορίζουσα του πίνακα A τη συμβολίζουμε με

$$\det A \quad \text{ή} \quad |A| \quad \text{ή} \quad D(A) \quad \text{ή} \quad D(a_1,a_2,\dots,a_n),$$

όπου a_j οι στήλες του A, ή ακόμα με

$$\begin{vmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n}\\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn}\end{vmatrix}$$

Το πλήθος των όρων του αθροίσματος (1) είναι $n!$ (βλ. Θ. 6.1.2). Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι κάθε όρος

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n} \qquad (2)$$

του αθροίσματος (1) περιέχει ακριβώς ένα όρο από κάθε

<u>γραμμή του A και ακριβώς ένα όρο από κάθε στήλη.</u>
Πράγματι, αν j είναι ένας από τους δείκτες $1, 2, \dots, n$ τότε θα υπάρχει ακριβώς ένα σ_k με $\sigma_k = j$. Ετσι, στον όρο (2) θα υπάρχει το στοιχείο $a_{i\sigma_i}$ από την i-γραμμή (και μόνο αυτό) και το στοιχείο $a_{k\sigma_k} = a_{kj}$ από τη j-στήλη (και μόνο αυτό). Είναι τέλος φανερό ότι κάθε όρος (2) έχει ακριβώς n παράγοντες.

Ορίζουσα 1ης τάξεως

Εστω ο 1×1 πίνακας

$$A = [a_{11}].$$

Για την ορίζουσα του A έχουμε:

$$|a_{11}| = \sum_{\sigma \in S_1} \operatorname{sgn}(\sigma_1)\, a_{1\sigma_1} = \operatorname{sgn}(1)\, a_{11} = (-1)^0 a_{11} \Longrightarrow$$

$$\boxed{|a_{11}| = a_{11}} \qquad (3)$$

Ορίζουσα 2ης τάξεως

Για τον 2×2 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_2} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2}$$

Οι μεταθέσεις του S_2 είναι οι $(1,2)$ και $(2,1)$.
Η πρώτη είναι άρτια και η δεύτερη περιττή. Ετσι, έχουμε:

$$|A| = sgn(1,2)\, a_{11} a_{22} + sgn(2,1)\, a_{12} a_{21}$$
$$= (-1)^0 a_{11} a_{22} + (-1)^1 a_{12} a_{21} \Longrightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}} \qquad (4)$$

Σχηματικά, η ορίζουσα 2ης τάξεως έχει τιμή ίση με τη διαφορά των γινομένων των στοιχείων της κύριας διαγωνίου και της δευτερεύουσας διαγωνίου:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{vmatrix} = \alpha\delta - \beta\gamma$$

<u>Ορίζουσα 3ης τάξεως - Κανόνας του Sarrus</u>

Για τον 3x3 πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

έχουμε:

$$|A| = \sum_{\sigma \in S_3} sgn(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} a_{3\sigma_3} .$$

Οι μεταθέσεις του S_3 είναι οι:

$(1,2,3)$, $(3,1,2)$, $(2,3,1)$, $(3,2,1)$, $(1,3,2)$ και $(2,1,3)$.

Οι πρώτες τρεις είναι άρτιες και οι υπόλοιπες περιττές.

Ετσι παίρνουμε για την ορίζουσα $|A|$:

$$|A| = sgn((1,2,3))\, a_{11} a_{22} a_{33} + sgn((3,1,2))\, a_{13} a_{21} a_{32} +$$

$$+\operatorname{sgn}((2,3,1))\, a_{12}a_{23}a_{31} + \operatorname{sgn}((3,2,1))\, a_{13}a_{22}a_{31} +$$
$$+\operatorname{sgn}((1,3,2))\, a_{11}a_{23}a_{32} + \operatorname{sgn}((2,1,3))\, a_{12}a_{21}a_{33} \Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{array}{l} a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{23}a_{31} \\ -a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33} \end{array}} \quad (5)$$

Το τελευταίο αποτέλεσμα εξηγεί και τον κανόνα του Sarrus ο οποίος ισχύει μόνο για ορίζουσες 3ης τάξεως. Γράφουμε τις δύο πρώτες στήλες δεξιά της τρίτης στήλης και φέρνουμε ευθείες παράλληλες προς την κύρια και τη δευτερεύουσα διαγώνιο. Στη συνέχεια, παίρνουμε τα γινόμενα των στοιχείων στη διεύθυνση από άνω αριστερά προς τα κάτω δεξιά με πρόσημο +, ενώ τα άλλα γινόμενα (από άνω δεξιά προς τα κάτω αριστερά) με πρόσημο −, όπως φαίνεται στο σχήμα:

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}$$

Παίρνουμε έτσι την τιμή της ορίζουσας:

$$|A| = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 2\cdot 5 - (-1)\cdot 3 = 10 + 3 = 13$$

Παράδειγμα 2

Να υπολογιστούν οι ορίζουσες των παρακάτω πινάκων.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 5 & 6 \\ -1 & -2 & 4 \end{bmatrix} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{bmatrix} \qquad C = \begin{bmatrix} a & b & c \\ c & a & b \\ b & c & a \end{bmatrix}$$

Χρησιμοποιούμε τον κανόνα του Sarrus.

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ 2 & 1 & -3 & 2 & 1 \\ 0 & 5 & 6 & 0 & 5 \\ -1 & -2 & 4 & -1 & -2 \end{array}$$

$$|A| = 2\cdot5\cdot4 + 1\cdot6\cdot(-1) + (-3)\cdot0(-2) - (-3)\cdot5\cdot(-1) - 2\cdot6\cdot(-2)$$
$$- 1\cdot0\cdot4 = 40 - 6 + 0 - 15 + 24 + 0 = 43$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & a & b \\ a^2 & b^2 & c^2 & a^2 & b^2 \end{array}$$

$$|B| = bc^2 + ca^2 + ab^2 - ba^2 - cb^2 - ac^2$$
$$= bc^2 + ca^2 + ab^2 + abc - ba^2 - cb^2 - ac^2 - abc$$
$$= c(ab - b^2 - ac + bc) - a(ab - b^2 - ac + bc)$$
$$= (c-a)(ab - b^2 - ac + bc) = (a-b)(b-c)(c-a).$$

$$\begin{array}{ccc|cc} + & + & + & - & - \quad - \\ a & b & c & a & b \\ c & a & b & c & a \\ b & c & a & b & c \end{array}$$

$$|C| = a^3 + b^3 + c^3 - abc - abc - abc = a^3 + b^3 + c^3 - 3abc.$$

Ο υπολογισμός οριζουσών τάξεως 4 και άνω με τον τύπο (1) είναι ιδιαίτερα επίπονος. Για παράδειγμα, στην περίπτωση της ορίζουσας 5ης τάξεως, το άθροισμα (1) περιέχει $5! = 120$ όρους. Στις επόμενες παραγράφους θα δώσουμε δύο συστηματικούς τρόπους για τον υπολογισμό οριζουσών. Ο πρώτος βασίζεται στην αξιοποίηση των ιδιοτήτων των οριζουσών ενώ ο δεύτερος βασίζεται στην ιδέα του αναπτύγματος μιας ορίζουσας.

6.3 ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΟΡΙΖΟΥΣΩΝ

Θεώρημα 6.3.1

Για κάθε τετραγωνικό πίνακα A ισχύει:

$$\det(A^T) = \det(A) \tag{1}$$

Απόδειξη

Εστω $A = (a_{ij})_{n\times n}$ και

$A^T = (b_{ij})_{n\times n}$ όπου $b_{ij} = a_{ji}$ (I)

Από τον Ορισμό 6.2.1 έχουμε:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \cdots b_{n\sigma_n}$$

Αντικαθιστώντας την (I) παίρνουμε:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n} \tag{II}$$

Σε κάθε όρο μπορούμε να αλλάζουμε τη θέση των παραγόντων ώστε να πετύχουμε οι δείκτες των γραμμών να έχουν τη φυσική διάταξη. Αφού στον σ_i αντιστοιχεί ο i, στον δείκτη i θα αντιστοιχεί ο σ_i^{-1}.

Ετσι η (II) γράφεται:

$$\det(A^T) = \sum_{\sigma\in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1^{-1}} a_{2\sigma_2^{-1}} \cdots a_{n\sigma_n^{-1}}$$

Θέτουμε $\tau = \sigma^{-1}$ οπότε $\sigma = \tau^{-1}$ και επομένως:

$$\det(A^T) = \sum_{\tau^{-1} \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau^{-1})\, a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n} \qquad (\text{III})$$

Σύμφωνα με την παρατήρηση (α) στη σελίδα 6.5 όταν η τ διατρέχει το S_n τότε και η τ^{-1} διατρέχει το S_n. Επίσης, από το Πόρισμα 1 της Πρότασης 6.1.8 έχουμε:

$$\operatorname{sgn}(\tau^{-1}) = \operatorname{sgn}(\tau)$$

Εχουμε τελικά:

$$\det(A^T) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau)\, a_{1\tau_1} a_{2\tau_2} \cdots a_{n\tau_n} \Longrightarrow$$

$$\det(A^T) = \det(A). \qquad \blacksquare$$

<u>Πόρισμα 1</u>

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{\sigma_1 1} a_{\sigma_2 2} \cdots a_{\sigma_n n} \qquad (2)$$

Από το Θεώρημα 6.3.1 συμπεραίνουμε αμέσως ότι σε κάθε μια από τις επόμενες προτάσεις που αναφέρονται στις ιδιότητες των οριζουσών, μπορούμε να αντιμεταθέσουμε τις λέξεις "γραμμή" και "στήλη" χωρίς να μεταβληθεί η τιμή αληθείας της πρότασης.

Πρόταση 6.3.2

Αν όλα τα στοιχεία μιας γραμμής (αντ. στήλης) του τετραγωνικού πίνακα A είναι μηδέν, τότε

$$\det(A) = 0$$

Απόδειξη

Από τον ορισμό 6.2.1 έχουμε

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad (I)$$

Κάθε όρος του αθροίσματος περιέχει ένα όρο από κάθε γραμμή του A, άρα και από τη μηδενική γραμμή. Συνεπώς όλοι οι όροι του αθροίσματος I είναι μηδέν,

$\Longrightarrow \det(A) = 0$ $\blacksquare$

Πρόταση 6.3.3

Αν ο A είναι τριγωνικός (άνω ή κάτω), τότε η ορίζουσα του είναι ίση με το γινόμενο των στοιχείων της κύριας διαγωνίου του, δηλαδή:

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \qquad (3)$$

Απόδειξη

Θα αποδείξουμε την πρόταση για την περίπτωση όπου ο $A = (a_{ij})$ είναι κάτω τριγωνικός, δηλ.

$$a_{ij} = 0 \quad \text{αν } i < j.$$

Η απόδειξη για τον άνω τριγωνικό πίνακα γίνεται με ανάλογο τρόπο. Για την ορίζουσα του A έχουμε:

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad I$$

Ο μόνος όρος του αθροίσματος Ι που δεν είναι μηδέν είναι αυτός που αντιστοιχεί στη μετάθεση $e \in S_n$:

$$\operatorname{sgn}(e)\, a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Για οποιαδήποτε άλλη μετάθεση $\sigma \in S_n$, ο όρος

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

είναι μηδέν, γιατί υπάρχει $k \in \{1, 2, \ldots n\}$ με

$$\sigma_k > k$$

οπότε το στοιχείο $a_{k\sigma_k}$ είναι μηδέν αφού ο A είναι κάτω τριγωνικός πίνακας. Άρα

$$\det(A) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn} \qquad \blacksquare$$

Παρατήρηση

Από τη σχέση (3) προκύπτει ότι η ορίζουσα ενός τριγωνικού πίνακα είναι μηδέν, αν και μόνο αν κάποιο στοιχείο της κύριας διαγωνίου του είναι μηδέν.

Πόρισμα 1

$$\det\big(\operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn})\big) = a_{11} a_{22} \cdots a_{nn}$$

Πόρισμα 2

Κάθε μοναδιαίος πίνακας έχει ορίζουσα ίση με 1, δηλ.

$$\det(I) = 1 \tag{4}$$

Παράδειγμα

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & -1 \\ 0 & 5 & 6 & 7 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 1 \cdot 5 \cdot 3 \cdot (-1) \cdot 2 = -30$$

Πρόταση 6.3.4

Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $n\times n$ πίνακα A όταν πολλαπλασιάσουμε τα στοιχεία μιας γραμμής (αντ. στήλης) με ένα αριθμό λ, τότε

$$\det(B) = \lambda \det(A) \tag{5}$$

Απόδειξη

Έστω ότι πολλαπλασιάζουμε τα στοιχεία της i γραμμής του A με τον αριθμό λ:

$$A \xrightarrow{r_i \to \lambda r_i} B$$

Για την ορίζουσα του B έχουμε:

$$\det(B) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma_1} b_{2\sigma_2} \cdots b_{i\sigma_i} \cdots b_{n\sigma_n}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots (\lambda a_{i\sigma_i}) \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$= \lambda \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{i\sigma_i} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$\Longrightarrow \quad \det(B) = \lambda \det(A) \qquad ■$$

Πόρισμα 1

Αν ο A είναι $n\times n$ πίνακας και λ ένας αριθμός, τότε

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A) \tag{6}$$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. □

<u>Πρόταση 6.3.5</u>

Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $n\times n$ πίνακα A, όταν αντιμεταθέσουμε δύο γραμμές (αντ. στήλες) του A, τότε

$$\det(B) = -\det(A) \qquad (7)$$

Με διαφορετικά λόγια, αν αντιμετατεθούν δύο γραμμές (αντ. στήλες) σε μια ορίζουσα, η ορίζουσα αλλάζει σημείο.

<u>Απόδειξη.</u>

Εστω ότι ο B προκύπτει από τον A με την αντιμετάθεση της i με τη j γραμμή:

$$A \xrightarrow{r_i \leftrightarrow r_j} B$$

Ετσι: $b_{ik} = a_{jk}$, $b_{jk} = a_{ik}$, $k=1,2,\dots,n$ και
$b_{lk} = a_{lk}$ όταν $l \neq i, j$.

Για την ορίζουσα του B έχουμε:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, b_{1\sigma_1} \cdots b_{i\sigma_i} \cdots b_{j\sigma_j} \cdots b_{n\sigma_n} \Rightarrow$$

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{j\sigma_i} \cdots a_{i\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad (I)$$

Η μετάθεση $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_n)$ προκύπτει από την

$$\sigma' = (\sigma_1, \dots, \sigma_j, \dots, \sigma_i, \dots, \sigma_n)$$

με μια εναλλαγή δύο στοιχείων. Σύμφωνα με την Πρ. 6.1.9,

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = -\operatorname{sgn}(\sigma') \qquad (II)$$

Οταν η σ διατρέχει το S_n, τότε και η σ' διατρέχει το S_n, οπότε από την (I) παίρνουμε:

$$\det(B) = \sum_{\sigma' \in S_n} -\mathrm{sgn}(\sigma')\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{j\sigma_i} \cdots a_{i\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$= -\sum_{\sigma' \in S_n} \mathrm{sgn}(\sigma')\, a_{1\sigma'_1} \cdots a_{j\sigma'_j} \cdots a_{i\sigma'_i} \cdots a_{n\sigma'_n}$$

$$\Rightarrow \quad \det(B) = -\det(A). \quad \blacksquare$$

Πρόταση 6.3.6

Αν δύο γραμμές (αντ. στήλες) ενός τετραγωνικού πίνακα A είναι ίσες, τότε

$$\det(A) = 0$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι η i γραμμή του A είναι ίση με την j γραμμή. Αν αντιμεταθέσουμε τις γραμμές αυτές ο πίνακας παραμένει αμετάβλητος. Σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.5, έχουμε:

$$\det(A) = -\det(A) \Longrightarrow \det(A) = 0. \quad \blacksquare$$

Πρόταση 6.3.7

Αν σε ένα τετραγωνικό πίνακα A μια γραμμή (αντ. στήλη) είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο μιας άλλης γραμμής (αντ. στήλης), τότε

$$\det(A) = 0.$$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Πρόταση 6.3.8

Αν B είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον $n \times n$ πίνακα A αν προσθέσουμε στα στοιχεία μιας γραμμής (αντ. στήλης) τα στοιχεία μιας άλλης γραμμής (αντ. στήλης) πολλαπλασιασμένα με ένα αριθμό λ, τότε

$$\det(B) = \det(A) \qquad (8)$$

Απόδειξη

Ας υποθέσουμε ότι προσθέτουμε στα στοιχεία της i γραμμής τα στοιχεία της j γραμμής του A πολλαπλασιασμένα με ένα αριθμό λ:

$$A \xrightarrow{r_i \to r_i + \lambda r_j} B$$

Για την ορίζουσα του B έχουμε διαδοχικά:

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots (a_{i\sigma_i} + \lambda a_{j\sigma_i}) \cdots a_{j\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$\Rightarrow$

$$\det(B) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{i\sigma_i} \cdots a_{j\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$+ \lambda \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots a_{j\sigma_i} \cdots a_{j\sigma_j} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad (I)$$

Το πρώτο άθροισμα της (I) είναι η ορίζουσα του πίνακα A, ενώ το δεύτερο άθροισμα είναι η ορίζουσα ενός πίνακα που έχει δύο γραμμές ίσες, τις i και j, άρα (σύμφωνα με την Πρόταση 6.3.6) είναι μηδέν. Έτσι έχουμε:

$$\det(B) = \det(A) + \lambda \cdot 0 = \det(A) \qquad \blacksquare$$

Στα παραδείγματα που ακολουθούν χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες των οριζουσών για την εύρεση της τιμής τους. Στόχος είναι ο μετασχηματισμός της ορίζουσας σε μια άλλη απλούστερη, π.χ. σε μια ορίζουσα που έχει περισσότερα μηδενικά ή είναι τριγωνικής μορφής).

Παράδειγμα 1

$$\begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 2 & -14 & 1 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_3 \to r_3 - 2r_1}{=} \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \\ 0 & -6 & 1 & -9 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \overset{r_2 \leftrightarrow r_4}{=}$$

$$= - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -6 & 1 & -9 \\ 0 & -2 & 0 & -3 \end{vmatrix} \overset{\substack{r_3 \to r_3 + 6r_2 \\ r_4 \to r_4 + 2r_2}}{=} - \begin{vmatrix} 1 & -4 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} =$$

$$= - 1 \cdot 1 \cdot 1 \, (-1) = 1$$

Παράδειγμα 2

Αφου δειχτεί ότι

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\,(a-b)^3$$

να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας: $\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

Για την πρώτη ορίζουσα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b) \begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix}$$

$(c_1 \to c_1 + c_2 + c_3 + c_4)$

$$= (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = (a+3b)\,(a-b)^3$$

Για τη δεύτερη ορίζουσα έχουμε:

$$\begin{vmatrix} 4 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 6 & 4 & 1 \\ 2 & 3 & 8 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 2\cdot 3\cdot 4 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 24\cdot(2+3)(2-1)^3 = 120$$

Πρόταση 6.3.9

Εστω ότι οι $n\times n$ πίνακες A, B και Γ διαφέρουν μόνο στη r γραμμή (αντ. στήλη) και ότι

$$a_{rj} = b_{rj} + \gamma_{rj}\ ,\quad j = 1, 2, \ldots, n$$

(αντ. $a_{jr} = b_{jr} + \gamma_{jr}\ ,\ j = 1, 2, \ldots, n$). Τότε

$$\det(A) = \det(B) + \det(\Gamma) \tag{9}$$

Απόδειξη.

Θα αποδείξουμε την πρόταση για την περίπτωση όπου οι πίνακες A, B και Γ διαφέρουν στη r γραμμή. Από τον ορισμό έχουμε:

$$\det(A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots a_{r\sigma_r}\cdots a_{n\sigma_n}$$

$$= \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\cdots (b_{r\sigma_r} + \gamma_{r\sigma_r})\cdots a_{n\sigma_n} \Rightarrow$$

$\Rightarrow$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots b_{r\sigma_r} \cdots a_{n\sigma_n}$$

$$+ \sum_{\sigma \in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{1\sigma_1} \cdots \gamma_{r\sigma_r} \cdots a_{n\sigma_n} \qquad (I)$$

Επειδή οι A, B και Γ διαφέρουν μόνο στη r γραμμή:

$a_{ij} = b_{ij} = \gamma_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$ με $i \neq r$ και $j = 1, \ldots, n$,

Το πρώτο άθροισμα της (I) είναι η $\det(B)$ και το δεύτερο η $\det(\Gamma)$. Εχουμε τελικά

$$\det(A) = \det(B) + \det(\Gamma). \ \blacksquare$$

<u>Παρατήρηση</u>

Η πρόταση επεκτείνεται εύκολα στην <u>περίπτωση</u> που

$$a_{rj} = b_{rj} + \gamma_{rj} + \delta_{rj} + \cdots, \quad j = 1, 2, \ldots, n$$

Εχουμε τότε

$$\det(A) = \det(B) + \det(\Gamma) + \det(\Delta) + \cdots \qquad (10)$$

<u>Παράδειγμα 1</u>

$$\begin{vmatrix} b_{11}+\gamma_{11} & b_{12}+\gamma_{12} & b_{13}+\gamma_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

<u>Παράδειγμα 2</u>

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 4 \cdot 6 + \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

Πρόταση 6.3.10

Για τις ορίζουσες των στοιχειωδών πινάκων έχουμε:

$$\det(E_i^a) = \det(\hat{E}_i^a)^T = a\,,\quad a \neq 0 \tag{11}$$

$$\det(E_{ij}^a) = \det(\hat{E}_{ij}^a)^T = 1 \tag{12}$$

$$\det(E_{ij}) = \det(\hat{E}_{ij})^T = -1 \tag{13}$$

Απόδειξη

Γνωρίζουμε από το Κεφ. 5 (σελ. 5.45) ότι

$$E_i^a = (\hat{E}_i^a)^T\,,\quad E_{ij}^a = (\hat{E}_{ij}^a)^T \text{ και } E_{ij} = (\hat{E}_{ij})^T.$$

Ο E_i^a προκύπτει από το μοναδιαίο πίνακα I με τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $r_i \to a r_i$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.4 έχουμε

$$\det(E_i^a) = a\det(I) = a\,,\quad a \neq 0.$$

Ο E_{ij}^a προκύπτει από τον I με το μετασχηματισμό $r_i \to r_i + a r_j$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.8 έχουμε:

$$\det(E_{ij}^a) = \det(I) = 1.$$

Ο E_{ij} προκύπτει από τον I με το μετασχηματισμό $r_i \leftrightarrow r_j$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.5 έχουμε:

$$\det(E_{ij}) = -\det(I) = -1.$$

Πόρισμα 1

Αν E είναι ένας στοιχειώδης πίνακας, τότε

$$\det(E) \neq 0. \tag{14}$$

Πρόταση 6.3.11

Αν A είναι ένας $n \times n$ πίνακας και E ένας στοιχειώδης $n \times n$ πίνακας, τότε

$$\det(AE) = \det(EA) = \det(A)\det(E) \tag{15}$$

<u>Απόδειξη</u>

Θα αποδείξουμε μόνο την $\det(EA) = \det(A)\det(E)$.

Σύμφωνα με την Πρ. 5.3.2, ο EA προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον στοιχειώδη μετασχηματισμό γραμμών που αντιστοιχεί στον E.

Αν $E = E_i^a$, τότε ο $E_i^a A$ είναι ο πίνακας που προκύπτει από τον A εφαρμόζοντας τον στοιχειώδη μετασχηματισμό $r_i \longrightarrow a r_i$. Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.4 έχουμε:

$$\det(E_i^a A) = a \det(A) = \det(E_i^a)\det(A).$$

(χρησιμοποιήσαμε την (11)).

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$\det(E_{i,j}^a A) = 1 \det(A) = \det(E_{i,j}^a)\det(A)$$

και

$$\det(E_{i,j} A) = -1 \cdot \det(A) = \det(E_{i,j})\det(A)$$

Βρίσκουμε έτσι ότι για οποιοδήποτε στοιχειώδη $n\times n$ πίνακα E ισχύει

$$\det(EA) = \det(A)\det(E).$$

Η πρόταση 6.3.11 γενικεύεται εύκολα ως εξής:

<u>Πρόταση 6.3.12</u>

Αν οι $E_1, E_2, \ldots, E_k$ είναι στοιχειώδεις $n\times n$ πίνακες και ο A είναι ένας $n\times n$ πίνακας, τότε

$$\det(AE_1E_2\cdots E_k) = \det(E_1E_2\cdots E_kA) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(A) \tag{16}$$

<u>Πόρισμα 1</u>

$$\det(E_1E_2\cdots E_k) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k) \tag{17}$$

Ορισμός 6.3.13

Ενας τετραγωνικός πίνακας λέγεται <u>ομαλός</u> ή <u>μη ιδιάζων</u> αν

$$\det A \neq 0 .$$

Αλλοιώς, αν δηλαδή $\det A = 0$, ο A λέγεται <u>μη ομαλός</u> ή <u>ιδιάζων</u>.

Θεώρημα 6.3.14

Ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν είναι ομαλός.

Απόδειξη

Εστω R ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1 του Θ. 5.3.4, υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ έτσι ώστε

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k \, R \qquad (\mathrm{I})$$

Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.12 έχουμε:

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\det(R) \qquad (\mathrm{II}).$$

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $R = I$ και $\det(R) = 1$. Από την (ΙΙ) παίρνουμε:

$$\det(A) = \det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k) \qquad (\mathrm{III})$$

Επειδή $\det(E_i) \neq 0$ (Πόρισμα 1 της Πρ. 6.3.10), ισχύει

$$\det(A) \neq 0 .$$

Αν τώρα ο A δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε ο R έχει μία τουλάχιστο μηδενική γραμμή και σύμφωνα με την Πρ. 6.3.2, $\det(R) = 0$. Παίρνουμε έτσι από την (ΙΙ):

$$\det(A) = \det(E_1)\cdots\det(E_k)\cdot 0 = 0 . \qquad \blacksquare$$

Πόρισμα 1

Ενας τριγωνικός πίνακας είναι αντιστρέψιμος, όταν και μόνο όταν όλα τα στοιχεία της κύριας διαγωνίου του είναι διαφορετικά από το 0.

Θεώρημα 6.3.15

Αν οι A και B είναι $n\times n$ πίνακες, τότε

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) \tag{18}$$

Απόδειξη

Αν κάποιος από τους A και B δεν είναι αντιστρέψιμος η ορίζουσα του είναι μηδέν οπότε

$$\det(A)\det(B) = 0 .$$

Επίσης ο AB δεν είναι αντιστρέψιμος στην περίπτωση αυτή και έτσι

$$\det(AB) = 0 = \det(A)\det(B) .$$

Αν τώρα οι A και B είναι αντιστρέψιμοι τότε υπάρχουν στοιχειώδεις πίνακες $E_1, E_2, \ldots, E_k$ και $E_1', E_2', \ldots, E_\ell'$ τέτοιοι ώστε:

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k \quad \text{και} \quad B = E_1' E_2' \cdots E_\ell' .$$

Εχουμε για τον AB:

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_k \; E_1' E_2' \cdots E_\ell' \Longrightarrow$$

$$\det(AB) = \{\det(E_1)\det(E_2)\cdots\det(E_k)\}\{\det(E_1')\det(E_2')\cdots\det(E_\ell')\}$$

(πόρισμα 1 της Πρ. 6.3.12) $\Longrightarrow$

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) . \blacksquare$$

Πόρισμα 1

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)} \tag{19}$$

Απόδειξη

Αφήνεται σαν άσκηση. $\square$

Παράδειγμα

Εστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ t & s & 0 & 0 \\ t^2 & s^2 & r & 0 \\ t^3 & s^3 & r^2 & q \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad B = \begin{bmatrix} q & r^2 & s^3 & t^3 \\ 0 & r & s^2 & t^2 \\ 0 & 0 & s & t \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Οι A και B είναι τριγωνικοί και επομένως

$$\det(AB) = \det(A)\det(B) = (1\,s\,r\,q)\cdot(q\,r\,s\,1) = s^2 r^2 q^2 .$$

6.4 ΑΝΑΠΤΥΓΜΑ ΟΡΙΖΟΥΣΑΣ

Ορισμός 6.4.1

Εστω A ένας $n \times n$ πίνακας. Συμβολίζουμε με M_{ij} την ορίζουσα τάξεως $(n-1)$ που προκύπτει από την ορίζουσα $|A|$ αν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη.

Η ορίζουσα M_{ij} ονομάζεται ελάσσονα (minor) ορίζουσα του στοιχείου a_{ij}.

Η προσημασμένη ελάσσονα ορίζουσα

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij} \tag{1}$$

ονομάζεται αλγεβρικό συμπλήρωμα (cofactor) του στοιχείου a_{ij} του πίνακα A.

Παράδειγμα 1

Θα υπολογίσουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των εννέα στοιχείων του πίνακα

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

Εχουμε:

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 1\ (8-0) = 8$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -1\ (12+1) = -13$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 1\ (0-2) = -2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -4$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = +8$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1\ (0-1) = 1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = +2$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 1\,(4-3) = 1$$

Παράδειγμα 2

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}$

Θα υπολογίσουμε το αλγεβρικό συμπλήρωμα A_{33}.

$$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & -2 & -5 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 7 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 & 3 \\ 0 & 2 & -5 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -11 \end{vmatrix} = 1\cdot 2\cdot 1\,(-11) = -22.$$

Παρατήρηση.

Τα πρόσημα των αλγεβρικών συμπληρωμάτων εναλλάσσονται όπως φαίνεται στο πιο κάτω σχήμα:

$$\begin{vmatrix} + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ + & - & + & - & \cdots \\ - & + & - & + & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{vmatrix}$$

<u>Θεώρημα 6.4.2</u>

Αν $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας, τότε για κάθε $i, j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ ισχύουν τα εξής:

$$\det(A) = a_{i1} A_{i1} + a_{i2} A_{i2} + \cdots + a_{in} A_{in} \qquad (2)$$

$$\det(A) = a_{1j} A_{1j} + a_{2j} A_{2j} + \cdots + a_{nj} A_{nj} \qquad (3)$$

όπου A_{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij}.

<u>Απόδειξη.</u>

Βλ. Γ. Παντελίδη, Δ. Κραββαρίτη, Β. Νασόπουλου και Π. Τσεκρέκου, "Γραμμική Άλγεβρα", Εκδόσεις Ζυγεών, Αθήνα 1992 (σελ. 84). $\square$

Οι τύποι (2) και (3) ονομάζονται <u>ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ κατά τα στοιχεία της i γραμμής</u> και <u>ανάπτυγμα της ορίζουσας $|A|$ κατά τα στοιχεία της j στήλης</u>, αντίστοιχα.

<u>Παράδειγμα 1</u>

Εστω ο πίνακας $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ του παραδείγματος της σελ. 6.34.

Αναπτύσσοντας την $|A|$ ως προς τα στοιχεία της δεύτερης γραμμής έχουμε:

$$\det(A) = 3 A_{21} + 2 A_{22} - 1 A_{23}$$
$$= 3(-4) + 2(8) - 1(1) = -12 + 16 - 1 = 3$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης έχουμε:

$$\det(A) = 0 \cdot A_{13} - 1 A_{23} + 4 A_{33} = -1(1) + 4(1) = 3$$

Παρατηρούμε ότι η ανάπτυξη της ορίζουσας είναι προτιμότερο να γίνει ως προς τα στοιχεία της γραμμής ή της στήλης που περιέχει τα περισσότερα μηδενικά.

<u>Παράδειγμα 2</u>

Εστω η ορίζουσα $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 6 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}$

Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της τρίτης στήλης.

$$|A| = +(1)\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \\ 5 & 0 & 2 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης.}} = -(2)\underbrace{\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{vmatrix}}_{\text{Αναπτύσσουμε ως προς τα στοιχεία της τρίτης γραμμής}} \Rightarrow$$

$$|A| = -2\left[5\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}\right] = -2\left[5\cdot 12 - 2(9-5)\right] \Rightarrow$$

$$|A| = -2(60-8) = -104$$

Είναι επίσης φανερό ότι για τον υπολογισμό της τιμής μιας ορίζουσας μπορούμε να συνδυάσουμε την μέθοδο του αναπτύγματος μιας ορίζουσας με τη χρήση των ιδιοτήτων της προηγούμενης παραγράφου.

<u>Παράδειγμα 3</u>

Να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & 1 \\ -3 & 2 & -1 & 0 \\ 2 & -3 & -2 & 1 \end{vmatrix}$$

$$|A|=\begin{vmatrix}1&2&0&2\\-1&2&3&1\\-3&2&-1&0\\2&-3&-2&1\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&2&0&2\\0&4&3&3\\0&8&-1&6\\0&-7&-2&-3\end{vmatrix}=+1\begin{vmatrix}4&3&3\\8&-1&6\\-7&-2&-3\end{vmatrix}\Rightarrow$$

$r_3\to r_3+r_1$

$$|A|=\begin{vmatrix}4&3&3\\8&-1&6\\-3&1&0\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}13&3&3\\5&-1&6\\0&1&0\end{vmatrix}=-(1)\begin{vmatrix}13&3\\5&6\end{vmatrix}=-3\begin{vmatrix}13&1\\5&2\end{vmatrix}$$

$c_1\to c_1+3c_2$

$$\Rightarrow\quad |A|=-3\,(26-5)=-63$$

<u>Παράδειγμα 4</u>

Να δειχθεί ότι $\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z-y)$

$$\begin{vmatrix}1&1&1\\x&y&z\\x^2&y^2&z^2\end{vmatrix}\overset{\substack{c_2\to c_2-c_1\\ c_3\to c_3-c_1}}{=}\begin{vmatrix}1&0&0\\x&y-x&z-x\\x^2&y^2-x^2&z^2-x^2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}y-x&z-x\\y^2-x^2&z^2-x^2\end{vmatrix}$$

$$=(y-x)(z-x)\begin{vmatrix}1&1\\y+x&z+x\end{vmatrix}=(y-x)(z-x)(z+x-y-x)$$

$$=(y-x)(z-x)(z-y).$$

<u>Παράδειγμα 5</u> Να λυθεί η εξίσωση $\begin{vmatrix}2-x&0&3\\2&x&1\\1&0&-x\end{vmatrix}=0. \quad (I)$

Αναπτύσσοντας ως προς τα στοιχεία της δεύτερης στήλης, έχουμε:

$$+x\begin{vmatrix}2-x&3\\1&-x\end{vmatrix}=0\Rightarrow x\,(-2x+x^2-3)=0\Rightarrow$$

$x\,(x-3)(x+1)=0$. Οι λύσεις της I είναι οι: 0, 3 και −1.

Θεώρημα 6.4.3

Αν $A=(a_{ij})$ είναι ένας $n\times n$ πίνακας και A_{ij} το αλγεβρικό συμπλήρωμα του a_{ij}, τότε ισχύουν οι τύποι:

$$a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}=0 \quad \text{όταν } i\neq j \qquad (4)$$

$$a_{1i}A_{1j}+a_{2i}A_{2j}+\cdots+a_{ni}A_{nj}=0 \quad \text{όταν } i\neq j \qquad (5)$$

Απόδειξη

Έστω B ο πίνακας που προκύπτει από τον πίνακα A αν αντικαταστήσουμε τα στοιχεία της j γραμμής με τα στοιχεία της i γραμμής. Ο πίνακας B έχει έτσι δύο γραμμές ίσες. Άρα $\det(B)=0$. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα $\det(B)$ ως προς τα στοιχεία της j γραμμής έχουμε

$$0=\det(B)=b_{j1}A_{j1}+b_{j2}A_{j2}+\cdots+b_{jn}A_{jn} \Rightarrow$$

[αφού $B_{jk}=A_{jk}$, $k=1,2,\ldots,n$].

$$0=a_{i1}A_{j1}+a_{i2}A_{j2}+\cdots+a_{in}A_{jn}$$

Η (5) είναι άμεση συνέπεια του Θ. 6.3.1. ■

Παράδειγμα

Έστω ο πίνακας $A=\begin{bmatrix}2&1&0\\3&2&-1\\1&0&4\end{bmatrix}$

Είδαμε στο παράδειγμα της σελίδας 6.34 ότι:

$$A_{21}=-4,\quad A_{22}=8 \quad \text{και} \quad A_{23}=1.$$

Έχουμε:

$$a_{11}A_{21}+a_{12}A_{22}+a_{13}A_{23}=2(-4)+1(8)+0(1)=0$$
$$a_{21}A_{21}+a_{22}A_{22}+a_{23}A_{23}=3(-4)+2(8)-1(1)=3$$
$$a_{31}A_{21}+a_{32}A_{22}+a_{33}A_{23}=1(-4)+0(8)+4(1)=0.$$

6.5 ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΗ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΟΥ ΠΙΝΑΚΑ

Ορισμός 6.5.1

Εστω $A=(a_{ij})$ ένας $n \times n$ πίνακας. Ο ανάστροφος του πίνακα (A_{ij}) των αλγεβρικών συμπληρωμάτων των στοιχείων του A ονομάζεται συμπληρωματικός ή προσαρτημένος (adjoint) του A και συμβολίζεται με adj(A):

$$\operatorname{adj}(A) = (A_{ij})^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \qquad (1)$$

Παράδειγμα 1

Για τον πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$A_{11} = 4, \quad A_{12} = -2, \quad A_{21} = -3 \quad \text{και} \quad A_{22} = 1;$$

οπότε σύμφωνα με τον τύπο (1) ο συμπληρωματικός του A είναι ο

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 2

Για τον πίνακα $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

έχουμε:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 4 \qquad B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

$$B_{21} = -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{22} = \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{23} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

$$B_{31} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 \qquad B_{32} = - \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = -1 \qquad B_{33} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1$$

οπότε ο συμπληρωματικός του B είναι ο πίνακας:

$$\operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} B_{11} & B_{21} & B_{31} \\ B_{12} & B_{22} & B_{32} \\ B_{13} & B_{23} & B_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

<u>Θεώρημα 6.5.2.</u>

Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \tag{2}$$

<u>Απόδειξη</u>

Θα υπολογίσουμε το γινόμενο

$$B = A \operatorname{adj}(A) = (a_{ij})(A_{ij})^T = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} A_{jk} \right)_{n \times n} \Longrightarrow$$

$$B = (b_{ij})_{n \times n} = \left(a_{i1} A_{j1} + a_{i2} A_{j2} + \dots + a_{in} A_{jn} \right) \tag{I}$$

Από τον τύπο (6) της 6.4 έχουμε:

$$b_{ij} = \begin{cases} \det(A), & \text{όταν } i = j \\ 0, & \text{όταν } i \neq j \end{cases}$$

και έτσι:

$$B = A \operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \det(A) & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \det(A) & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \det(A) \end{bmatrix} = \det(A)\, I \tag{II}$$

Εφόσον ο A είναι αντιστρέψιμος, $\det(A) \neq 0$ και από την (II) παίρνουμε

$$A \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = I$$

που σημαίνει ότι ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \quad \blacksquare$$

Σημείωση

Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) \; A = I .$$

Αυτό σημαίνει ότι οι σχέσεις $AA^{-1} = I$ και $A^{-1}A = I$ είναι ισοδύναμες.

Πρόταση 6.5.3

Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\det\{\operatorname{adj}(A)\} = (\det A)^{n-1} \tag{3}$$

Απόδειξη

Αφήνεται ως άσκηση. $\square$

Παράδειγμα 3

Για τους πίνακες $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

των παραδειγμάτων 1 και 2 βρήκαμε ότι:

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \operatorname{adj}(B) = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Επειδή

$$\det(A) = 4 - 6 = -2 \neq 0$$

και

$$\det(B) = -1 \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \neq 0$$

οι πίνακες A και B είναι αντιστρέψιμοι και μάλιστα:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\,\mathrm{adj}(A) = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

και

$$B^{-1} = \frac{1}{\det B}\,\mathrm{adj}(B) = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} -2 & -1 & 2 \\ 4 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Παράδειγμα 4.

Να βρεθούν, αν υπάρχουν, οι αντίστροφοι των παρακάτω πινάκων:

(α) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \end{bmatrix}$ (β) $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$

(α) Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της πρώτης γραμμής του A:

$$A_{11} = +\begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -7$$

$$A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -8$$

$$A_{13} = +\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 2$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα A κατά τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε:

$$\det(A) = 1(-7) + 0(-8) + 2(2) = -3 \neq 0.$$

Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος. Βρίσκουμε λοιπόν και τα υπόλοιπα αλγεβρικά συμπληρώματα.

$$A_{21} = -\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{22} = +\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$A_{23} = -\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1$$

$$A_{31} = +\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = 2$$

$$A_{32} = -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1$$

$$A_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -1$$

Ο συμπληρωματικός πίνακας του A είναι ο

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} -7 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Από τον τύπο (2) προσδιορίζεται ο A^{-1}:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \operatorname{adj}(A) = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} -7 & 2 & 2 \\ -8 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

(β) Βρίσκουμε τα αλγεβρικά συμπληρώματα των στοιχείων της πρώτης γραμμής του B:

$$B_{11} = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix} = 8 \qquad B_{12} = -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 5 & -3 \end{vmatrix} = +8 \qquad B_{13} = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 8$$

Αναπτύσσοντας την ορίζουσα του πίνακα B ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε:

$$\det(B) = 1 \cdot 8 + 2\,(+8) - 3\,(8) = 0$$

Άρα ο πίνακας B δεν είναι αντιστρέψιμος.

Πρέπει να σημειώσουμε ότι η εύρεση του αντίστροφου μέσω του συμπληρωματικού πίνακα καθίσταται επίπονη όταν η τάξη του πίνακα είναι μεγαλύτερη του 3. Είναι τότε προτιμότερη η μέθοδος των στοιχειωδών μετασχηματισμών του κεφαλαίου 5.

Παράδειγμα 5

Να βρεθεί ο αντίστροφος του πίνακα $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

Ο συμπληρωματικός πίνακας του A είναι ο

$$\operatorname{adj}(A) = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -14 & -7 & 7 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

Αναπτύσσοντας την $\det(A)$ ως προς τα στοιχεία της πρώτης γραμμής έχουμε:

$$\det(A) = 1\,A_{11} - A_{12} + 2\,A_{13} = 4 + 14 - 4 = 14$$

Ο αντίστροφος του A είναι ο

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\operatorname{adj}(A) = \frac{1}{14}\begin{bmatrix} 4 & 3 & 1 \\ -14 & -7 & 7 \\ -2 & -5 & 3 \end{bmatrix}$$

6.6 ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ – Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRAMER

Θεώρημα 6.6.1

Έστω το $n\times n$ γραμμικό σύστημα:

$$AX=B. \qquad (1)$$

Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(α) Το σύστημα $AX=B$ έχει μία ακριβώς λύση,

(β) Ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος,

(γ) Ο πίνακας A είναι ομαλός, δηλαδή $\det(A)\neq 0$.

Απόδειξη

Το Θεώρημα προκύπτει άμεσα από τα Θεωρήματα 5.3.5 και 6.3.14. $\blacksquare$

Πόρισμα 1

Το $n\times n$ ομογενές γραμμικό σύστημα

$$AX=0 \qquad (2)$$

έχει μη τετριμμένη λύση αν και μόνο αν

$$\det A = 0$$

Παράδειγμα 1

Να βρεθούν οι τιμές του λ για τις οποίες το γραμμικό σύστημα

$$\begin{aligned}
(1-\lambda)x_1 + x_2 + x_3 &= 0\\
(3-\lambda)x_2 + 3x_3 &= 0\\
-2x_1 + x_2 + (1-\lambda)x_3 &= 0
\end{aligned}$$

έχει μη τετριμμένη λύση (δηλ. άπειρες το πλήθος λύσεις).

Πρέπει η ορίζουσα του πίνακα των συντελεστών του συστήματος να είναι μηδέν (Πόρισμα 1) $\Longrightarrow$

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1\\ 0 & 3-\lambda & 3\\ -2 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Longrightarrow$$

$$(1-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3-\lambda & 3 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)-3\right] - 2(3-3+\lambda) = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)(3-\lambda-3\lambda+\lambda^2-3) - 2\lambda = 0 \Rightarrow$$

$$(1-\lambda)(\lambda^2-4\lambda) - 2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda\left[\lambda-4-\lambda^2+4\lambda-2\right] = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda(-\lambda^2+5\lambda-6) = 0 \Rightarrow -\lambda(\lambda-2)(\lambda-3) = 0$$

Το σύστημα έχει μη τετριμμένη λύση όταν $\lambda = 0$ ή 2 ή 3.

6.6.1 Η ΜΕΘΟΔΟΣ CRAMER

Εστω το γραμμικό σύστημα

$$AX = B \quad \text{όπου} \quad A \in M_{n\times n} \qquad (1).$$

Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det(A)}\,\mathrm{adj}(A)\,B, \qquad (2)$$

δηλαδή

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_i \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \cdots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \cdots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1i} & A_{2i} & \cdots & A_{ni} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \cdots & A_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_i \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}$$

$\Rightarrow$

$$x_i = \frac{1}{\det(A)}\left[b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni}\right] \qquad (3)$$

$$i = 1, 2, \ldots, n$$

Εστω A_i ο πίνακας που προκύπτει από τον A αντικαθιστώντας την i στήλη με το διάνυσμα στήλη B:

$$A_i = \begin{bmatrix} a_{11} \cdots a_{1,i-1} & b_1 & a_{1,i+1} \cdots a_{1n} \\ a_{21} \cdots a_{2,i-1} & b_2 & a_{2,i+1} \cdots a_{2n} \\ \vdots \quad\quad \vdots & \vdots & \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{n1} \cdots a_{n,i-1} & b_n & a_{n,i+1} \cdots a_{nn} \end{bmatrix} \quad (4)$$

Αναπτύσσοντας την $\det(A_i)$ ως προς τα στοιχεία της i στήλης έχουμε:

$$\det(A_i) = b_1 A_{1i} + b_2 A_{2i} + \cdots + b_n A_{ni} \quad (5)$$

Από τις (3) και (5) παίρνουμε:

$$\boxed{X_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)} \quad , \quad i = 1, 2, \ldots, n} \quad (6)$$

Οι τύποι (6) μας δίνουν τη λύση του συστήματος $AX = B$. και λέγονται τύποι του Cramer.

Η μέθοδος Cramer είναι μια εναλλακτική μέθοδος επίλυσης γραμμικών συστημάτων. Είναι φανερό ότι μπορεί να εφαρμοστεί μόνο όταν ο πίνακας A των συντελεστών είναι τετραγωνικός ($n \times n$). Επειδή απαιτεί τον υπολογισμό ($n+1$) οριζουσών τάξεως n, η μέθοδος δεν είναι βολική για την επίλυση συστημάτων με περισσότερες από τρεις εξισώσεις. Είναι τότε προτιμότερη η μέθοδος της απαλοιφής Gauss που εξετάστηκε στο Κεφάλαιο 5.

Παράδειγμα 1

Να βρεθεί με τη μέθοδο Cramer η λύση του συστήματος:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 4 \\ 3x_1 + 2x_2 - x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= 2 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 8 & -4 \\ 1 & 5 & 3 \end{vmatrix} = 24 + 20 = 44 \neq 0$$

$$\det(A_1) = \begin{vmatrix} 4 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = 44 + 0 = 44$$

$$\det(A_2) = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -12 & -4 \\ 0 & -2 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -12 & -4 \\ -2 & 3 \end{vmatrix} = -36 - 8 = -44$$

$$\det(A_3) = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 0 & 8 & -12 \\ 0 & 5 & -2 \end{vmatrix} = -16 + 60 = 44$$

Η λύση του συστήματος είναι η:

$$x_1 = \frac{\det(A_1)}{\det(A)} = 1 \;, \quad x_2 = \frac{\det(A_2)}{\det(A)} = -1 \quad \text{και} \quad x_3 = \frac{\det(A_3)}{\det(A)} = 1 .$$

Παράδειγμα 2

Να λυθεί με τη μέθοδο Cramer το σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + x_3 &= 7 \\ 3x_1 - x_2 + 3x_3 &= 1 \\ 6x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= -20 \end{aligned}$$

Ο πίνακας των συντελεστών είναι ο $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & 3 \\ 6 & 3 & 4 \end{bmatrix}$

Για την ορίζουσα του A έχουμε:

$$\det(A)=\begin{vmatrix}1&-2&1\\3&-1&3\\6&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&1\\0&5&0\\0&9&-2\end{vmatrix}=-10\neq 0$$

($\det(A)\neq 0 \Rightarrow$ το σύστημα έχει μία ακριβώς λύση).

Βρίσκουμε τώρα τις $\det(A_1)$, $\det(A_2)$ και $\det(A_3)$.

$$\det(A_1)=\begin{vmatrix}7&-2&1\\1&-1&3\\-20&3&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}0&5&-20\\1&-1&3\\0&-17&64\end{vmatrix}=-\begin{vmatrix}5&-20\\-17&64\end{vmatrix}=-5\begin{vmatrix}1&-4\\-17&64\end{vmatrix}$$

$$=20\begin{vmatrix}1&1\\-17&16\end{vmatrix}=20$$

$$\det(A_2)=\begin{vmatrix}1&7&1\\3&1&3\\6&-20&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&0&0\\3&-20&0\\6&-62&-2\end{vmatrix}=40$$

$$\det(A_3)=\begin{vmatrix}1&-2&7\\3&-1&1\\6&3&-20\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1&-2&7\\0&5&-20\\0&15&-62\end{vmatrix}=-310+300=-10$$

Η λύση του συστήματος είναι:

$$x_1=\frac{\det(A_1)}{\det(A)}=-2,\quad x_2=\frac{\det(A_2)}{\det(A)}=-4,\quad x_3=\frac{\det(A_3)}{\det(A)}=1.$$

<u>Παρατήρηση</u>

Σύμφωνα με το Θ. 6.6.1 το $n\times n$ γραμμικό σύστημα $AX=B$ έχει μία ακριβώς λύση αν και μόνο αν $\det(A)\neq 0$.

Αν τώρα $\det(A)=0$ υπάρχουν δύο περιπτώσεις:

(i) Αν

$$\det(A_i)=0 \text{ για όλα τα } i=1,2,\dots,n,$$

τότε το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων.

(ii) Αν

$$\det(A_i)\neq 0 \text{ για κάποιο } i\in\{1,2,\dots,n\}$$

τότε το σύστημα είναι μη συμβιβαστό.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ $6^{ΟΥ}$ ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ

6.1 Να υπολογιστούν οι παρακάτω ορίζουσες

α) $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 6 \\ 3 & 4 & 15 \\ 5 & 6 & 21 \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6.2 Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} x & -1 \\ 3 & 1-x \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & x & -6 \\ 1 & 3 & x-5 \end{vmatrix}$$

6.3 Να δειχθεί ότι η τιμή της πιο κάτω ορίζουσας είναι ανεξάρτητη του θ.

$$\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ -\cos\theta & \sin\theta & 0 \\ \sin\theta-\cos\theta & \sin\theta+\cos\theta & 1 \end{vmatrix}$$

6.4 Να βρεθούν οι τιμές των παρακάτω οριζουσών, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες:

α) $\begin{vmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -2 & 4 & 1 \\ 5 & -2 & 2 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 3 & -6 & 9 \\ -2 & 7 & -2 \\ 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ -5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{vmatrix}$

δ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{vmatrix}$ ε) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1/2 & 1/2 & 1 & 1/2 \\ 2/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ -1/3 & 2/3 & 0 & 0 \end{vmatrix}$ στ) $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & -7 & 0 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$

6.5 Να δειχθεί ότι

α) $\begin{vmatrix} 1 & x & yz \\ 1 & y & xz \\ 1 & z & xy \end{vmatrix} =(x-y)(y-z)(z-x)$

β) $\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta+\gamma \\ 1 & \beta & \gamma+\alpha \\ 1 & \gamma & \alpha+\beta \end{vmatrix} =0$

6.6 Δίνεται ότι $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = -6.$

Να βρεθούν τα εξής:

α) $\begin{vmatrix} d & e & f \\ g & h & i \\ a & b & c \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 3a & 3b & 3c \\ -d & -e & -f \\ 4g & 4h & 4i \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} a+g & b+h & c+i \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} -3a & -3b & -3c \\ d & e & f \\ g-4d & h-4e & i-4f \end{vmatrix}$

6.7 Εστω ότι $\det(A)=-7$, όπου A ένας 3x3 πίνακας. Να βρεθούν
α) $\det(3A)$, β) $\det(2A^{-1})$, γ) $\det((2A)^{-1})$ δ) $\det(A^2)$

6.8 Χωρίς να αναπτυχθούν οι ορίζουσες να δειχτεί ότι

α) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^3 \\ 1 & \beta & \beta^3 \\ 1 & \gamma & \gamma^3 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+\gamma)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)(\alpha-\beta)$$

β) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \alpha^2-\beta\gamma \\ 1 & \beta & \beta^2-\gamma\alpha \\ 1 & \gamma & \gamma^2-\alpha\beta \end{vmatrix} = 0$$

γ) $$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & \beta \\ \alpha & 1 & \beta \\ \alpha & \beta & 1 \end{vmatrix} = (\alpha+\beta+1)(\alpha-1)(\beta-1)$$

δ) $$\begin{vmatrix} \beta+\gamma & \gamma+\alpha & \alpha+\beta \\ q+r & r+p & p+q \\ y+z & z+x & x+y \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

6.9 Εστω ο πίνακας $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 6 & 7 & -1 \\ -3 & 1 & 4 \end{bmatrix}$

Για κάθε στοιχείο του **A** να βρεθούν

α) η ελάσσων ορίζουσα

β) το αλγεβρικό συμπλήρωμα

Να υπολογιστεί η det(**A**) αναπτύσσοντας κατά τα στοιχεία της

i) πρώτης γραμμής ii) πρώτης στήλης
iii) δεύτερης γραμμής iv) δεύτερης στήλης
v) τρίτης γραμμής vi) τρίτης στήλης

6.10 Να υπολογιστούν με ανάπτυξη κατά τα στοιχεία μιας γραμμής ή στήλης οι ορίζουσες.

α) $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \\ 2 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 \\ -2 & 5 & -4 \end{vmatrix}$ γ) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & 8 \\ -2 & 1 & 5 \\ -3 & 2 & 4 \end{vmatrix}$

δ) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 2 \\ 9 & 3 & 4 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ ε) $\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 & 5 \\ 4 & 2 & 5 & 6 \\ 1 & 0 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 6 & 4 \end{vmatrix}$

6.11 Χρησιμοποιώντας τον τύπο $A^{-1}=\frac{1}{\det(A)}\,adj(A)$ Να βρεθούν οι αντίστροφοι (αν υπάρχουν) των παρακάτω πινάκων

α) $\begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 1 \end{bmatrix}$ β) $\begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix}$ γ) $\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{bmatrix}$

δ) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ε) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ στ) $\begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 5 & -6 & 11 \\ 3 & 2 & 7 \end{bmatrix}$

6.12 Αν $\mathbf{A}=\begin{bmatrix} -3 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -2 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ να επιβεβαιωθούν οι παρακάτω ιδιότητες

α) $A\,adj(A)=adj(A)A=\det(A)I$

β) $\det(adj(A))=[\det(A)]^2$

6.13 Να υπολογιστούν οι ορίζουσες

α) $\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \\ -5 & 3 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$ β) $\begin{vmatrix} 1 & 4 & -1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -5 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

γ) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & 4 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & -5 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ δ) $\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 2 & -5 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

6.14 Με τη χρήση του κανόνα του Cramer να λυθούν τα συστήματα

α) $\begin{aligned} 2x+3y-z&=1 \\ 3x+5y+2z&=8 \\ x-2y-3z&=-1 \end{aligned}$ β) $\begin{aligned} 2x-5y+2z&=7 \\ x+2y-4z&=3 \\ 3x-4y-6z&=5 \end{aligned}$ γ) $\begin{aligned} 2z+10&=y+3x \\ x-3z&=2y+8 \\ 4y+z&=3-2x \end{aligned}$

δ) $\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3-2x_4&=3 \\ 2x_1 \quad -2x_3-4x_4&=-4 \\ x_1+x_2 \quad +x_4&=3 \\ 2x_1+5x_2+3x_3+6x_4&=16 \end{aligned}$ ε) $\begin{aligned} x_1-x_2-x_3-x_4&=4 \\ 2x_1+x_2+x_3+x_4&=-1 \\ x_1+3x_2+2x_3+2x_4&=-5 \\ x_1-x_2+x_3-x_4&=2 \end{aligned}$

6.15 Να λυθεί το σύστημα

$$\begin{aligned} x_1+3x_2+x_3-2x_4&=0 \\ 2x_1 \quad -2x_3-4x_4&=0 \\ x_1+x_2 \quad +x_4&=0 \\ 2x_1+5x_2+3x_3+6x_4&=0 \end{aligned}$$

6.16 Να αποδειχθούν οι ιδιότητες 6.3.1 – 6.3.9 και τα πορίσματά τους για τις ορίζουσες τάξεως 2.

6.17 Να αποδειχθεί το Πόρισμα 1 της Πρότασης 6.3.4

6.18 Να αποδειχθεί η Πρόταση 6.3.7

6.19 Να αποδειχθεί το Πόρισμα 1 του Θ. 6.3.15:
Αν ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, τότε

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

6.20 Να βρεθούν οι τιμές των κάτωθι οριζουσών:

(α) $\begin{vmatrix} 0 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & -2 & 2 \\ 3 & 4 & 2 & -2 \\ 4 & 3 & -1 & 1 \end{vmatrix}$ (β) $\begin{vmatrix} 2 & 4 & -2 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ (γ) $\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{vmatrix}$

6.21 Να λυθεί η εξίσωση

$$\begin{vmatrix} 16-x & -8 & 12 \\ -8 & 4-x & -6 \\ 12 & -6 & 9-x \end{vmatrix} = 0$$

6.22 Να δειχθεί ότι:

$$\begin{vmatrix} a & b+c & a^2 \\ b & c+a & b^2 \\ c & a+b & c^2 \end{vmatrix} = -(a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c)$$

6.23 Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 6.3.12 να δείξετε ότι για κάθε nxn πίνακα ισχύει

$$\det A^T = \det A$$

6.24 Να βρεθούν οι αντίστροφοι (αν υπάρχουν) των κάτωθι πινάκων:

(α) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}$ (β) $A=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & -1 & 10 \end{bmatrix}$ (γ) $A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

(δ) $A=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \\ 2 & -2 & 7 \end{bmatrix}$ (ε) $A=\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 12 & 2 & -5 \\ 4 & 2 & 3 \end{bmatrix}$

Σημείωση: Να χρησιμοποιηθεί ο τύπος: $A^{-1} = \dfrac{\operatorname{adj}(A)}{\det(A)}$.

6.25 Να βρεθούν με τη μέθοδο Cramer οι λύσεις των πιο κάτω συστημάτων:

(α)
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 + 3x_3 &= 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 &= 3 \\ x_1 - 5x_2 + x_3 &= -8 \end{aligned}$$

(β)
$$\begin{aligned} 3x_1 - 4x_2 + x_3 &= 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 &= 0 \\ x_1 + 3x_2 - 4x_3 &= 5 \end{aligned}$$

6.26 Αν ο nxn πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, να δειχθεί ότι

$$\det\{\operatorname{adj}(A)\} = (\det A)^{n-1}.$$

6.27 Αν $S_j = a^j + \beta^j + \gamma^j$, εκφράζοντας την ορίζουσα σαν γινόμενο δύο οριζουσών να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} 3 & S_1 & S_2 \\ S_1 & S_2 & S_3 \\ S_2 & S_3 & S_4 \end{vmatrix} = (a-\beta)^2 (a-\gamma)^2 (\beta-\gamma)^2$$

Να υπολογιστεί η ορίζουσα:

$$\begin{vmatrix} 3 & S_1 & S_3 \\ S_1 & S_2 & S_4 \\ S_2 & S_3 & S_5 \end{vmatrix}$$

6.28 Αν $S_r = a^r + \beta^r + \gamma^r$, να δειχθεί ότι

$$\begin{vmatrix} S_r & S_{r+1} & S_{r+2} \\ S_{r+1} & S_{r+2} & S_{r+3} \\ S_{r+2} & S_{r+3} & S_{r+4} \end{vmatrix} = a^r \beta^r \gamma^r (\beta-\gamma)^2 (\gamma-a)^2 (a-\beta)^2.$$

6.29 Εστω οι πίνακες.

$$A = \begin{bmatrix} a + bx + cx^2 & a + by + cy^2 & a + bz + cz^2 \\ c + ax + bx^2 & c + ay + by^2 & c + az + bz^2 \\ b + cx + ax^2 & b + cy + ay^2 & b + cz + az^2 \end{bmatrix}.$$

και

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί ένας πίνακας C έτσι ώστε
$$A = CB$$

(β) Να δειχθεί ότι

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a + c + b & b + a + c & c + b + a \\ ax + cy + bz & bx + ay + cz & cx + by + az \\ ax^2 + cy^2 + bz^2 & bx^2 + ay^2 + cz^2 & cx^2 + by^2 + az^2 \end{vmatrix}$$