Κεφάλαιο 7

ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

7.1 Γενικά περί απεικονίσεων

Ορισμός 7.1.1
Έστω δύο μη κενά σύνολα A και B και ένας *νόμος* F που αντιστοιχίζει κάθε στοιχείο $x \in A$ σε **ακριβώς ένα** στοιχείο $y \in B$. Λέμε τότε ότι ο F είναι μια **απεικόνιση** (mapping ή map) ή **συνάρτηση** (function) **από το** A **στο** B και γράφουμε

$$F : A \to B$$

για τα σύνολα ή

$$x \overset{F}{\longmapsto} y$$

για τα συσχετιζόμενα στοιχεία.
Το A καλείται **σύνολο αφετηρίας** (domain) και το B **σύνολο άφιξης** (co-domain).
Η έκφραση

$$y \;=\; F(x)$$

καλείται **τύπος** της F.
Επίσης, το x καλείται **αρχέτυπο** ή **πρότυπο** ή ακόμα **προ-εικόνα** (pre-image) του y, ενώ το y καλείται **εικόνα** (image) **του** x **μέσω της** F ή **τιμή** (value) **της** F **στο** x.
Μια απεικόνιση από κάποιο μη κενό σύνολο A στον εαυτό του, $F : A \to A$, καλείται **τελεστής** (operator).

Παρατήρηση: Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.1.1, οι όροι *απεικόνιση* και *συνάρτηση* είναι ισοδύναμοι. Ο δεύτερος χρησιμοποιείται συνήθως όταν $A, B \subseteq K^n$. Για παράδειγμα, η $f : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ καλείται *βαθμωτή συνάρτηση* αν m=1 και *διανυσματική συνάρτηση* αν m >1. Η $f : A \subseteq \mathbf{R} \to B \subseteq \mathbf{R}$ είναι η γνωστή μας *πραγματική συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής*.

Το σύνολο των $x \in A$ που έχουν εικόνα μέσω της $F : A \to B$ καλείται **πεδίο ορισμού** της F και συμβολίζεται με $D(F)$:

$$D(F) \;=\; \{x \in A \mid \exists y \in B \;\; \text{τ.ω.} \;\; y \;=\; F(x)\} \; .$$

Είναι φανερό ότι
$$D(F) \subseteq A \,.$$
Στον Ορισμό 7.1.1, θεωρήσαμε ότι *κάθε* $x \in A$ έχει εικόνα μέσω της F, δηλ. θεωρήσαμε ότι το πεδίο ορισμού ταυτίζεται με το σύνολο αφετηρίας:
$$D(F) \;=\; A \,.$$
Σ'ένα γενικότερο ορισμό, $D(F) \subseteq A$ και σε κάποιο $x \in A$ μπορεί να αντιστοιχούν περισσότερα από ένα $y \in B$. Τότε όμως δεν έχουμε απεικόνιση αλλά απλώς *αντιστοιχία.*

Το σύνολο που απαρτίζεται από όλα τα στοιχεία $y \in B$ τα οποία είναι εικόνες αντίστοιχων $x \in A$ καλείται **εικόνα** (image) ή **πεδίο τιμών** (range) της F και συμβολίζεται με ImF:
$$ImF \;=\; \{y \in B \,|\, \exists x \in A \;\; \text{τ.ω.} \;\; y \;=\; F(x)\} \;.$$
Είναι φανερό ότι
$$ImF \subseteq B \,.$$
Άλλα σύμβολα που χρησιμοποιούνται για την εικόνα ImF είναι τα $R(F)$ και $F(A)$.

Δύο απεικονίσεις με κοινά σύνολα αφετηρίας και άφιξης, $F : A \to B$ και $G : A \to B$, λέμε ότι είναι **ίσες**, συμβολικά $F{=}G$, αν ισχύει
$$F(x) \;=\; G(x) \quad \forall x \in A \,.$$

Παραδείγματα

1. Σε κάθε μη κενό σύνολο A ορίζεται η απεικόνιση $I_A : A \to A$ που αντιστοιχίζει κάθε $x \in A$ στον εαυτό του:
$$I_A(x) \;=\; x \quad \forall x \in A \,.$$
Η I_A καλείται **ταυτοτική απεικόνιση** (identity mapping) ή **ταυτοτικός μετασχηματισμός** (identity transformation) ή **ταυτοτικός τελεστής** (identity operator). Είναι φανερό ότι $ImI_A{=}A$.

2. Μια απεικόνιση $F : A \to B$ που αντιστοιχίζει κάθε $x \in A$ στο σταθερό στοιχείο $y_0 \in B$,
$$F(x) \;=\; y_0 \quad \forall x \in A \,,$$
καλείται **σταθερή απεικόνιση** (constant mapping). Είναι φανερό ότι $ImF{=}\{y_0\}$.

Μια απεικόνιση $F : A \to B$ λέμε ότι είναι **αμφιμονοσήμαντη** ή **ένα προς ένα** (one-to-one) αν διαφορετικά στοιχεία του A έχουν διαφορετικές εικόνες μέσω της F στο B, δηλ. αν
$$\boxed{x_1 \neq x_2 \quad \Longrightarrow \quad F(x_1) \neq F(x_2) \,, \quad x_1, x_2 \in A \,.}$$
Μια πιο εύχρηστη μορφή της πιο πάνω συνθήκης είναι η

$$\boxed{F(x_1) = F(x_2) \implies x_1 = x_2\,, \quad x_1, x_2 \in A\,.}$$

(στοιχεία με ίσες εικόνες είναι αναγκαστικά ίσα).

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x){=}x^2$ *δεν είναι* αμφιμονοσήμαντη καθόσον $f(-x_0){=}f(x_0){=}x_0^2$.
   Τουναντίον, η συνάρτηση $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο $g(x){=}x+1$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Πραγματικά, αν
   $$g(x_1) = g(x_2) \implies x_1 + 1 = x_2 + 1 \implies x_1 = x_2\,.$$

2. Η συνάρτηση $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ με τύπο
   $$f(x,y) = (x+1,\, y+2)$$
   είναι αμφιμονοσήμαντη. Πραγματικά, από την
   $$f(x_1,y_1) = f(x_2,y_2) \implies (x_1{+}1, y_1{+}2) = (x_2{+}1, y_2{+}2) \implies (x_1,y_1) = (x_2,y_2).$$
   Η F έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία. Έστω το διάνυσμα $u{=}(1,2) \in \mathbf{R}^2$. Η F μπορεί να γραφεί στη μορφή
   $$F(x,y) = (x,y) + u$$
   ή
   $$F(v) = v + u\,, \quad v \in \mathbf{R}^2\,.$$
   Άρα η F αντιστοιχίζει κάθε διάνυσμα $v \in \mathbf{R}^2$ στο $v{+}u$, όπου u δοσμένο σταθερό διάνυσμα.

   Γενικεύοντας το παράδειγμά μας, θεωρούμε ένα γραμμικό χώρο V και κάποιο δοσμένο στοιχείο $u \in V$. Η απεικόνιση $T_u : V \to V$ με τύπο
   $$T_u(v) = v + u\,, \quad v \in V\,,$$
   ονομάζεται **μετατόπιση κατά** u (translation by u).

Αν κάθε στοιχείο $y \in B$ είναι εικόνα ενός τουλάχιστον στοιχείου $x \in A$ μέσω της απεικόνισης $F : A \to B$, αν δηλαδή

$$\forall y \in B \quad \exists x \in A \quad \text{τ.ω.} \quad y = F(x)\,,$$

θα λέμε ότι η απεικόνιση F είναι **επί** (onto). Από τον ορισμό της εικόνας της F είναι φανερό ότι η F είναι επί αν $ImF{=}B$.

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο $f(x){=}x^2{+}1$ δεν είναι επί αφού $Imf{=}[1,\infty)$. Είναι όμως φανερό ότι καθίσταται επί αν οριστεί ως $f : \mathbf{R} \to [1,\infty)$.

2. Η συνάρτηση $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με τύπο $g(x)=x+1$ είναι επί αφού $Img=\mathbf{R}$.

3. Η συνάρτηση $\sin : \mathbf{R} \to [-1,1]$ είναι επί. Δεν είναι όμως αμφιμονοσήμαντη αφού $\sin 0=\sin 2\pi=0$.

Συνδυάζοντας του προηγούμενους ορισμούς, θα λέμε ότι η απεικόνιση $f : A \to B$ είναι **αμφιμονοσήμαντη και επί** ή **ένα προς ένα και επί** (one-to-one and onto) αν είναι ταυτόχρονα αμφιμονοσήμαντη και επί!

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1,1]$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

2. Ο ταυτοτικός τελεστής $I_A : A \to A$, όπου A οποιοδήποτε μη κενό σύνολο, είναι αμφιμονοσήμαντος και επί.

Σημείωση
Θα πρέπει να αναφέρουμε την πληθώρα εναλλακτικών όρων που χρησιμοποιούνται, τόσο στα Ελληνικά όσο και στα Αγγλικά, για τις έννοιες αυτής της παραγράφου:

- **ένα προς ένα** (one-to-one), συμβολικά 1-1, ή **αμφιμονοσήμαντη** ή **αμφιμονότιμη** ή **ερριπτική** (injective) ή **έρριψη** (injection)
- **επί** (onto) ή **επιρριπτική** (surjective) ή **επίρριψη** (surjection)
- **ένα προς ένα και επί** ή **1-1 και επί** (one-to-one and onto) ή **αμφιμονοσήμαντη και επί** ή **αμφιμονότιμη και επί** ή **αμφιρριπτική** (bijective) ή **αμφίρριψη** (bijection)

Σε μερικά Ελληνικά βιβλία, ο όρος *αμφιμονοσήμαντη* χρησιμοποιείται λανθασμένα για απεικονίσεις που είναι *ένα προς ένα και επί.* Επίσης χρησιμοποιούνται οι όροι **ένεση** (injection), **έφεση** (surjection) και **αμφίεση** (bijection), οι οποίοι σημασιολογικά είναι παραπλανητικοί και ως προς την ετυμολογία είναι ασυνεπείς. Μέχρι στιγμής, *δεν έχουν* χρησιμοποιηθεί οι όροι **δίεση**, **άφεση** και **μεταμφίεση**, παρά την **έφεση** (και **άνεση**) που έχουν μερικοί συγγραφείς στην εισαγωγή νέας ορολογίας.

7.1.1 Σύνθεση απεικονίσεων

Θεωρούμε δύο απεικονίσεις τέτοιες ώστε το σύνολο άφιξης της πρώτης να ταυτίζεται με το σύνολο αφετηρίας της δεύτερης (στη γενική περίπτωση αρκεί να είναι υποσύνολό του):

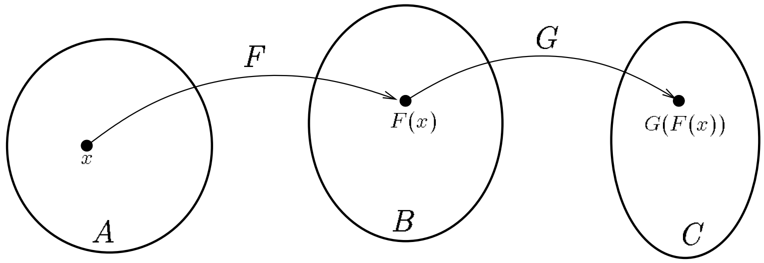
$$F : A \to B \quad \text{και} \quad G : B \to C\,.$$

Σε κάθε στοιχείο $x \in A$, η F αντιστοιχίζει ένα μοναδικό στοιχείο

$$y \;=\; F(x) \;\in B\,.$$

Η G τώρα αντιστοιχίζει αυτό το y σ'ένα μοναδικό στοιχείο $z \in C$:

$$z \;=\; G(y) \;=\; G(F(x)) \;\in C\,.$$



Με αυτό τον τρόπο, σε κάθε στοιχείο $x \in A$ αντιστοιχίσαμε ένα μοναδικό στοιχείο $z \in C$. Ορίσαμε έτσι μια απεικόνιση από το A στο C την οποία καλούμε **σύνθεση** (composition) **των** F **και** G και τη συμβολίζουμε με $G \circ F$:

$$\boxed{G \circ F : A \to C\,, \quad (G \circ F)(x) \;=\; G(F(x))}$$

Παρατήρηση: Σε μερικά βιβλία συναντούμε το συμβολισμό xF αντί του γνωστού μας $F(x)$ για την εικόνα του $x \in A$ μέσω της F και το συμβολισμό $F \circ G$ αντί του $G \circ F$ για τη σύνθεση $G(F(x))$ των $F : A \to B$ και $G : B \to C$.

Παραδείγματα

1. Έστω οι απεικονίσεις $F : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}^2$ και $G : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$:

$$F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \;=\; (a+d,\, b+c) \quad \textbf{και} \quad G(x,y) \;=\; x^2 \,+\, y^2\,.$$

   Για τη σύνθεσή τους $G \circ F : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathbf{R}$ έχουμε

$$(G \circ F)\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) \;=\; G\left(F\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)\right) \;=\; G(a+d,\, b+c) \;=\; (a+d)^2 + (b+c)^2.$$

   Είναι φανερό ότι η σύνθεση $F \circ G$ δεν ορίζεται.

2. Έστω ο τελεστής $F : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ με τύπο

$$F(x,y) \;=\; (x^2+1,\; x+y)\,.$$

   Η σύνθεση $F \circ F$ συμβολίζεται επίσης με F^2. Έχουμε:

$$F^2(x,y) \;=\; F(F(x,y)) \;=\; F(x^2+1,\; x+y) \;=\; \Big((x^2+1)^2+1,\; x^2+1+x+y\Big)\,.$$

Πρόταση 7.1.2
Για τις απεικονίσεις $F : A \to B$ και $G : B \to C$ ισχύουν τα εξής:
(i) Αν οι F και G είναι αμφιμονοσήμαντες, τότε και η σύνθεση $G \circ F$ είναι αμφιμονοσήμαντη.
(ii) Αν οι F και G είναι επί, τότε και η σύνθεση $G \circ F$ είναι επί.

Απόδειξη
(i) Αν για κάποια $x_1, x_2 \in A$ είναι $(G\circ F)(x_1)=(G\circ F)(x_2)$, τότε $G(F(x_1))=G(F(x_2))$. Επειδή η G είναι αμφιμονοσήμαντη, $F(x_1)=F(x_2)$. Επειδή η F είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη, $x_1=x_2$. Άρα η $G\circ F$ είναι αμφιμονοσήμαντη.
(ii) Επειδή η G είναι επί, για $z \in C$, υπάρχει $y \in B$ τέτοιο ώστε $G(y)=z$. Επειδή η F είναι επίσης επί, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε

$$F(x) = y \quad \Longrightarrow \quad G(F(x)) = G(y) = z\,.$$

Βρήκαμε έτσι $x \in A$ τέτοιο ώστε $(G\circ F)(x)=z$. Άρα η $G\circ F$ είναι επί. □

Στην περίπτωση απεικονίσεων $F : A \to B$ και $G : B \to A$, είναι φανερό ότι οι συνθέσεις $G\circ F : A \to A$ και $F \circ G : B \to B$ είναι τελεστές σε διαφορετικά σύνολα. Στην περίπτωση τώρα τελεστών $F : A \to A$ και $G : A \to A$ οι συνθέσεις $G\circ F : A \to A$ και $F\circ G : A \to A$ είναι τελεστές στο ίδιο σύνολο αλλά δεν είναι αναγκαστικά ίσοι μεταξύ τους. Με διαφορετικά λόγια, η σύνθεση τελεστών **δεν είναι αντιμεταθετική** (commutative).

Παράδειγμα
Έστω οι τελεστές $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ και $G : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ που δίνονται από τις

$$F(x) = 2x+1 \quad \text{και} \quad G(x) = x^2-1\,.$$

Για τις $G\circ F$ και $F\circ G$ έχουμε

$$(G\circ F)(x) = G(F(x)) = G(2x+1) = (2x+1)^2-1 = 4x^2+4x$$

και

$$(F\circ G)(x) = F(G(x)) = F(x^2-1) = 2(x^2-1)+1 = 2x^2-1\,.$$

Παρατηρούμε ότι $G\circ F \neq F\circ G$.

Η σύνθεση απεικονίσεων είναι **προσεταιριστική** (associative). Αν

$$F : A \to B\,, \quad G : B \to C \quad \text{και} \quad H : C \to D$$

τότε οι $(H\circ G)\circ F$ και $H\circ(G\circ F)$ είναι απεικονίσεις από το A στο D και

$$[(H\circ G)\circ F](x) = (H\circ G)(F(x)) = H(G(F(x)))\,,$$

$$[H\circ(G\circ F)](x) = H((G\circ F)(x)) = H(G(F(x)))\,.$$

Συμπεραίνουμε ότι

$$\boxed{(H\circ G)\circ F = H\circ(G\circ F)}$$

Έστω τώρα μια απεικόνιση $F : A \to B$ και οι ταυτοτικοί τελεστές στα σύνολα A και B:

$$I_A(x) = x \ \ \forall x \in A \quad \text{και} \quad I_B(x) = x \ \ \forall x \in B\,.$$

Για κάθε $x \in A$ έχουμε

$$F(x) \;=\; F(I_A(x)) \;=\; (F \circ I_A)(x)$$

και

$$F(x) \;=\; I_B(F(x)) \;=\; (I_B \circ F)(x)\,.$$

Άρα ισχύει

$$\boxed{F \circ I_A \;=\; I_B \circ F \;=\; F}$$

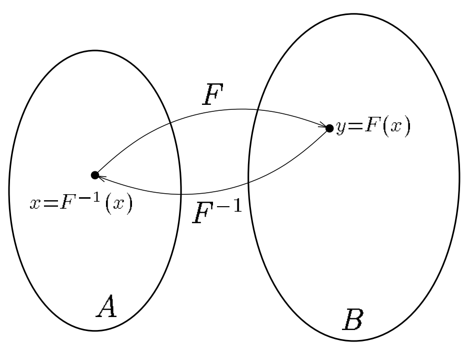
7.1.2 Η αντίστροφη απεικόνιση

Αν η απεικόνιση $F : A \to B$ με τύπο

$$y \;=\; F(x) \tag{7.1}$$

είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, τότε κάθε στοιχείο $y \in B$ έχει ένα μοναδικό αρχέτυπο $x \in A$. Η απεικόνιση από το B στο A που πραγματοποιεί αυτή την αντιστοίχιση ονομάζεται **αντίστροφη απεικόνιση** (inverse mapping) και συμβολίζεται με F^{-1}:

$$x \;=\; F^{-1}(y)\,. \tag{7.2}$$



Οι ισότητες (7.1) και (7.2) είναι ισοδύναμες:

$$\boxed{y \;=\; F(x) \quad\Longleftrightarrow\quad x \;=\; F^{-1}(y)\,. \qquad (7.3)}$$

Συνδυάζοντας τις πιο πάνω σχέσεις παίρνουμε

$$F^{-1}(F(x)) \;=\; x\,, \quad x \in A \quad \text{και} \quad F(F^{-1}(y)) \;=\; y\,, \quad y \in B \tag{7.4}$$

ή ακόμα

$$F^{-1} \circ F \;=\; I_A \qquad \text{και} \qquad F \circ F^{-1} \;=\; I_B\,. \tag{7.5}$$

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι αν η $F : A \to B$ έχει αντίστροφη, τότε και η F^{-1} είναι αντιστρέψιμη και

$$\left(F^{-1}\right)^{-1} = F . \tag{7.6}$$

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι βασικό.

Πρόταση 7.1.3
Η απεικόνιση $F : A \to B$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

Απόδειξη
Θεωρούμε πρώτα ότι η F έχει αντίστροφη. Θα δείξουμε ότι είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Έστω $x_1, x_2 \in A$ τέτοια ώστε

$$F(x_1) = F(x_2) \quad \Longrightarrow \quad F^{-1}(F(x_1)) = F^{-1}(F(x_2)) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 .$$

(Χρησιμοποιήσαμε την (7.4)). Άρα η F είναι αμφιμονοσήμαντη.
Αν τώρα $y \in B$,

$$F(F^{-1}(y)) = y$$

οπότε για $x^*{=}F^{-1}(y)$ έχουμε $y{=}F(x^*)$. Άρα η F είναι επί.
Για το αντίστροφο, παίρνουμε τυχόν $y \in B$. Εφόσον η F είναι επί, υπάρχει $x \in A$ τέτοιο ώστε $F(x){=}y$. Επειδή η F είναι αμφιμονοσήμαντη, το x είναι μοναδικό. Άρα μπορούμε να ορίσουμε μια νέα απεικόνιση $G : B \to A$ τέτοια ώστε αν $y{=}F(x)$ να ισχύει

$$G(y) = x .$$

Είναι φανερό ότι

$$F(G(y)) = F(x) = y \quad \text{και} \quad G(F(x)) = G(y) = x ,$$

οπότε η G είναι η αντίστροφη F^{-1} της F. $\square$

Παραδείγματα

1. Η συνάρτηση $f : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο $f(x){=}x^2$, όπου $\mathbf{R}_0^+{=}\{x \in \mathbf{R} \mid x \geq 0\}$, είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Άρα είναι αντιστρέψιμη. Η αντίστροφή της είναι η $g : \mathbf{R}_0^+ \to \mathbf{R}_0^+$ με τύπο $g(x){=}\sqrt{x}$.

2. Η συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ με τύπο $f(x){=}e^x$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Η αντίστροφή της δεν είναι άλλη από το γνωστό μας φυσικό λογάριθμο, $ln : \mathbf{R}^+ \to \mathbf{R}$.

3. Η συνάρτηση $\sin : [-\pi/2, \pi/2] \to [-1, 1]$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Η αντίστροφή της είναι το γνωστό μας τόξο ημιτόνου, $\sin^{-1} : [-1, 1] \to [-\pi/2, \pi/2]$.

Πρόταση 7.1.4
Αν η απεικόνιση $F : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη και επί, τότε και η αντίστροφή της είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

Απόδειξη
Το ότι η F έχει αντίστροφη εξασφαλίζεται από το Θεώρημα 7.1.3. Η $F^{-1} : B \to A$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και άρα είναι αμφιμονοσήμαντη και επί[1]. □

Παρατήρηση: Στην περίπτωση που η $F : A \to B$ είναι αμφιμονοσήμαντη αλλά όχι επί, δηλ. αν $ImF \subset B$, τότε η θεωρία που αναπτύξαμε πιο πάνω ισχύει για την $F : A \to ImF$.

Με βάση την (7.5) μπορούμε να δώσουμε ένα εναλλακτικό ορισμό της αντίστροφης απεικόνισης.

Ορισμός 7.1.5
(α) Η απεικόνιση $F : A \to B$ είναι **αντιστρέψιμη ή αντιστρεπτή** (invertible) αν υπάρχει απεικόνιση $F^{-1} : B \to A$ τέτοια ώστε

$$F^{-1} \circ F \;=\; I_A \quad \text{και} \quad F \circ F^{-1} \;=\; I_B \,,$$

όπου I_A και I_B οι ταυτοτικοί τελεστές στα A και B. Η F^{-1} καλείται **αντίστροφη απεικόνιση** (inverse mapping) της F.
(β) Ο τελεστής $F : A \to A$ είναι **αντιστρέψιμος** αν υπάρχει τελεστής $F^{-1} : A \to A$ τέτοιος ώστε

$$F \circ F^{-1} \;=\; F^{-1} \circ F \;=\; I_A \,.$$

Ο F^{-1} καλείται **αντίστροφος τελεστής** του F.

Πρόταση 7.1.6
Αν οι απεικονίσεις $F : A \to B$ και $G : B \to C$ είναι αντιστρέψιμες, τότε η σύνθεση $G \circ F : A \to C$ είναι επίσης αντιστρέψιμη και

$$(G \circ F)^{-1} \;=\; F^{-1} \circ G^{-1} \,. \tag{7.7}$$

Απόδειξη
Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.1.3, οι F και G είναι αμφιμονοσήμαντες και επί αφού είναι αντιστρέψιμες. Σύμφωνα δε με την Πρ. 7.1.2, η σύνθεσή τους $G \circ F$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη και επί, οπότε και αυτή είναι αντιστρέψιμη[2]. Η $(G \circ F)^{-1}$, όπως

[1] **Εναλλακτική απόδειξη:** Έστω $y_1, y_2 \in B$ τέτοια ώστε

$$F^{-1}(y_1) \;=\; F^{-1}(y_2) \quad \Longrightarrow \quad F(F^{-1}(y_1)) \;=\; F(F^{-1}(y_2)) \quad \Longrightarrow$$

$$(F \circ F^{-1})(y_1) \;=\; (F \circ F^{-1})(y_2) \quad \Longrightarrow \quad I_B(y_1) \;=\; I_B(y_2) \quad \Longrightarrow \quad y_1 \;=\; y_2 \,.$$

Άρα η $F^{-1} : B \to A$ είναι αμφιμονοσήμαντη. Εφόσον τώρα η F είναι επί, η F^{-1} ορίζεται για κάθε $y \in B$ και $ImF^{-1}{=}A$. Άρα η F^{-1} είναι επί.

[2] **1η εναλλακτική απόδειξη:** Έστω $H : C \to A$ η αντίστροφη της $G \circ F$. Από τον Ορ. 7.1.5 έχουμε

$$H \circ (G \circ F) \;=\; I_A \quad \Longrightarrow \quad H \circ (G \circ F) \circ F^{-1} \circ G^{-1} \;=\; I_A \circ F^{-1} \circ G^{-1} \,.$$

δίνεται από την (7.7), ικανοποιεί τις απαιτήσεις του Ορισμού 7.1.5:

$$(F^{-1} \circ G^{-1}) \circ (G \circ F) \;=\; F^{-1} \circ (G^{-1} \circ G) \circ F \;=\; F^{-1} \circ (I_B \circ F) \;=\; F^{-1} \circ F \;=\; I_A$$

και

$$(G \circ F) \circ (F^{-1} \circ G^{-1}) \;=\; G \circ (F \circ F^{-1}) \circ G^{-1} \;=\; G \circ (I_B \circ G^{-1}) \;=\; G \circ G^{-1} \;=\; I_C\,.$$

(Χρησιμοποιήσαμε την προσεταιριστική ιδιότητα και την (7.5)). □

Χρησιμοποιώντας την προσεταιριστική ιδιότητα και τις $F \circ F^{-1}{=}I_B$ και $G \circ G^{-1}{=}I_C$, έχουμε διαδοχικά:

$$H \circ G \circ (F \circ F^{-1}) \circ G^{-1} \;=\; (I_A \circ F^{-1}) \circ G^{-1} \quad\Longrightarrow\quad H \circ G \circ (I_B \circ G^{-1}) \;=\; F^{-1} \circ G^{-1} \quad\Longrightarrow$$

$$H \circ (G \circ G^{-1}) \;=\; F^{-1} \circ G^{-1} \quad\Longrightarrow\quad H \circ I_C \;=\; F^{-1} \circ G^{-1} \quad\Longrightarrow\quad H \;=\; F^{-1} \circ G^{-1}\,.$$

(Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν πάρουμε την $(G \circ F) \circ H{=}I_C$). Άρα $(G \circ F)^{-1}{=}F^{-1} \circ G^{-1}$.
2η εναλλακτική απόδειξη: Έστω $z \in C$ και $x \in A$ τέτοια ώστε

$$(G \circ F)(x) \;=\; z \quad\Longleftrightarrow\quad (G \circ F)^{-1}(z) \;=\; x\,. \qquad \text{(i)}$$

Αν $y{=}F(x)$ και $z{=}G(y)$, τότε επειδή οι F και G είναι αντιστρέψιμες έχουμε:

$$y \;=\; F(x) \quad\Longleftrightarrow\quad x \;=\; F^{-1}(y) \qquad \text{και} \qquad z \;=\; G(y) \quad\Longleftrightarrow\quad y \;=\; G^{-1}(z)$$

οπότε

$$x \;=\; F^{-1}(G^{-1}(z)) \quad\Longrightarrow\quad x \;=\; (F^{-1} \circ G^{-1})(z)\,. \qquad \text{(ii)}$$

Από τις (i) και (ii) βρίσκουμε τελικά ότι $(G \circ F)^{-1}{=}F^{-1} \circ G^{-1}$.

7.2 Γραμμικές απεικονίσεις

Στο Εδάφιο 7.1, ασχοληθήκαμε με απεικονίσεις της γενικής μορφής $F : A \to B$, όπου A και B μη κενά σύνολα. Ορίσαμε επίσης την έννοια της ισότητας μεταξύ απεικονίσεων με κοινά σύνολα αφετηρίας και άφιξης, καθώς και τη σύνθεση απεικονίσεων. Δεν ορίσαμε άλλες πράξεις όπως η πρόσθεση και ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός, αφού αυτό δεν είναι δυνατό σε κάθε σύνολο B.

Στο παρόν εδάφιο, θα ασχοληθούμε με απεικονίσεις της μορφής

$$T : V_1 \to V_2 \,,$$

όπου τα σύνολα αφετηρίας και άφιξης, V_1 και V_2, είναι *γραμμικοί χώροι πάνω στο ίδιο σώμα* K. Ειδικότερα μας ενδιαφέρουν οι απεικονίσεις που υπακούουν στις δύο πράξεις που χαρακτηρίζουν τη δομή ενός γραμμικού χώρου, δηλαδή την πρόσθεση και τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Αυτές καλούνται *γραμμικές* και ορίζονται ως εξής:

Ορισμός 7.2.1
Η απεικόνιση $T : V_1 \to V_2$, όπου V_1 και V_2 γραμμικοί χώροι πάνω σε κάποιο σώμα K, καλείται **γραμμική απεικόνιση** (linear mapping) **από το** V_1 **στο** V_2 αν για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda \in K$ ισχύουν οι ιδιότητες:
(i) $T(x + y) \,=\, T(x) \,+\, T(y)$
(ii) $\lambda\, T(x) \,=\, \lambda\, T(x)$
Μια γραμμική απεικόνιση από τον γραμμικό χώρο V στον εαυτό του, $T : V \to V$, καλείται **γραμμικός τελεστής** (linear operator) **πάνω στο** V.

Παρατηρήσεις

1. Οι πράξεις στα αριστερά και δεξιά μέλη των (i) και (ii) είναι πράξεις στους γραμμικούς χώρους V_1 και V_2, αντίστοιχα. Για παράδειγμα, το σύμβολο $+$ στο αριστερό μέλος της (i) είναι το σύμβολο της πρόσθεσης στο V_1 ενώ το $+$ στο δεξιό μέλος είναι το σύμβολο της πρόσθεσης στο V_2. Εφόσον είναι σαφής ο χώρος όπου εκτελείται η πρόσθεση, δεν πρέπει να υπάρχει σύγχυση.

2. Έχουμε και εδώ πληθώρα εναλλακτικών όρων τόσο στα Ελληνικά όσο και στα Αγγλικά:

   - Για την $T : V_1 \to V_2$: **γραμμική απεικόνιση** (linear mapping ή linear map) ή **γραμμικός μετασχηματισμός** (linear transformation) ή **ομομορφισμός** ή **μορφισμός** (homomorphism)
   - Για τον $T : V \to V$: **γραμμικός τελεστής** (linear operator) ή **ενδομορφισμός** (endomorphism)

   Ακόμα, αν θέλουμε να προσδιορίσουμε το σώμα K, λέμε ότι η T είναι K-**γραμμική** ή K-**ομομορφισμός**. Παραλείπουμε συνήθως το πρόθημα K όταν δεν υπάρχει περίπτωση σύγχυσης.

3. Στα επόμενα, θα χρησιμοποιούμε συχνά το σώμα **R** αντί του γενικού K για ευκολότερη κατανόηση των αποδείξεων. Η αλήθεια των σχετικών προτάσεων δεν περιορίζεται στο **R** και επεκτείνεται αμέσως στο άλλο σώμα που μας ενδιαφέρει, δηλαδή το **C**.

4. Από την ιδιότητα (ii) του Ορισμού 7.2.1, παρατηρούμε ότι για $\lambda=0$

$$T(0\cdot x) \;=\; 0\cdot T(x) \quad\Longrightarrow\quad T(\mathbf{0}) \;=\; \mathbf{0}\;\;\in V_2\,,$$

   δηλαδή η T απεικονίζει το $\mathbf{0}\in V_1$ στο $\mathbf{0}\in V_2$. Αν λοιπόν, $T(\mathbf{0})\neq\mathbf{0}$, τότε η T *δεν είναι* γραμμική.

Για να προσδιορίσουμε αν μια απεικόνιση είναι γραμμική, μπορούμε, αντί του Ορισμού 7.2.1, να χρησιμοποιούμε την πρόταση που ακολουθεί. Αυτή συνδυάζει τις ιδιότητες (i) και (ii) σε μια σχέση η οποία είναι πιο εύχρηστη.

Πρόταση 7.2.2
Η απεικόνιση $T:V_1\to V_2$ είναι γραμμική αν και μόνο αν για κάθε $x,y\in V_1$ και $\lambda,\mu\in K$ ισχύει

$$T(\lambda x\;+\;\mu y)\;=\;\lambda\,T(x)\;+\;\mu\,T(y)\,. \tag{7.8}$$

Απόδειξη
Αν η T είναι γραμμική, χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (i) και (ii) του Ορισμού 7.2.1, έχουμε

$$T(\lambda x\;+\;\mu y)\;=\;T(\lambda x)\;+\;T(\mu y)\;=\;\lambda\,T(x)\;+\;\mu\,T(y)\,.$$

Αντίστροφα, θέτοντας $\lambda=\mu=1$ στην (7.8) παίρνουμε την συνθήκη (i):

$$T(1x\;+\;1y)\;=\;1T(x)\;+\;1T(y)\quad\Longrightarrow\quad T(x+y)\;=\;T(x)\;+\;T(y)\quad\forall x,y\in V_1\,.$$

Θέτοντας $\mu=0$ στην (7.8), παίρνουμε την (ii):

$$T(\lambda x\;+\;0y)\;=\;\lambda\,T(x)\;+\;0\,T(y)\quad\Longrightarrow\quad T(\lambda x+\mathbf{0})\;=\;\lambda\,T(x)\;+\;\mathbf{0}\quad\Longrightarrow$$

$$T(\lambda x)\;=\;\lambda\,T(x)\quad\forall x,y\in V_1,\;\;\lambda\in K\,.$$

Άρα η T είναι γραμμική. □

Αν η απεικόνιση $T:V_1\to V_2$ είναι γραμμική, αποδεικνύεται εύκολα ότι για $x_1,x_2,\cdots,x_n\in V_1$ και $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_n\in K$ ισχύει

$$T\left(\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,x_i\right)\;=\;\sum_{i=1}^{n}\lambda_i\,T(x_i)\,. \tag{7.9}$$

Η (7.9) είναι γενίκευση της ιδιότητας (7.8).

Παραδείγματα

1. Ο ταυτοτικός τελεστής $I : V \to V$ με τύπο

$$I(x) = x \quad x \in V$$

είναι γραμμικός, αφού για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in K$ ισχύει

$$I(\lambda x + \mu y) = \lambda\, x + \mu\, y = \lambda\, I(x) + \mu\, I(y)\,.$$

2. Έστω $0 : V_1 \to V_2$ η **μηδενική απεικόνιση** (zero mapping ή zero transformation) που απεικονίζει κάθε $x \in V_1$ στο μηδενικό στοιχείο του V_2,

$$0(x) = \mathbf{0} \quad \forall x \in V_1\,.$$

Για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$ ισχύει

$$0(\lambda x + \mu y) = \mathbf{0} = \lambda\, \mathbf{0} + \mu\, \mathbf{0} = \lambda\, 0(x) + \mu\, 0(y)\,.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.2, η 0 είναι γραμμική απεικόνιση.

3. Η παραγώγιση πολυωνύμων $D : P_n \to P_{n-1}$,

$$D(p) = p'\,, \quad p \in P_n\,,$$

είναι γραμμική απεικόνιση, αφού για κάθε $p, q \in P_n$ και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$D(\lambda p + \mu q) = (\lambda p + \mu q)' = \lambda\, p' + \mu\, q' = \lambda\, D(p) + \mu\, D(q)\,.$$

4. Έστω η απεικόνιση $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^3$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2,\ x_3 - x_4)\,.$$

Για κάθε $x, y \in \mathbf{R}^4$ και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= T[\,\lambda\,(x_1, x_2, x_3, x_4) + \mu\,(y_1, y_2, y_3, y_4)] \\ &= T(\lambda x_1 + \mu y_1,\ \lambda x_2 + \mu y_2,\ \lambda x_3 + \mu y_3,\ \lambda x_4 + \mu y_4) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2,\ \lambda x_3 + \mu y_3 - \lambda x_4 - \mu y_4) \\ &= \lambda\,(x_1 + x_2,\ x_3 - x_4) + \mu\,(y_1 + y_2,\ y_3 - y_4) = \lambda\, T(x) + \mu\, T(y)\,. \end{aligned}$$

Άρα η T είναι γραμμική.

5. Ο τελεστής $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \to \mathcal{M}_{2\times 2}$ με τύπο

$$T\left(\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{21} \\ a_{12} + a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

είναι γραμμικός. Πραγματικά, για κάθε $A, B \in \mathcal{M}_{2\times 2}$ και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned} T(\lambda A + \mu B) &= T\left(\begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} \\ \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{bmatrix}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \lambda a_{11} + \mu b_{11} & \lambda a_{12} + \mu b_{12} + \lambda a_{21} + \mu b_{21} \\ \lambda a_{12} + \mu b_{12} + \lambda a_{21} + \mu b_{21} & \lambda a_{22} + \mu b_{22} \end{bmatrix} \\ &= \lambda \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} + a_{21} \\ a_{12} + a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} + b_{21} \\ b_{12} + b_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \implies \end{aligned}$$

$$T(\lambda A + \mu B) = \lambda\, T(A) + \mu\, T(B)\,.$$

6. Η απεικόνιση $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$ με τύπο

$$T(x_1, x_2) \;=\; (x_1,\; x_1 + x_2,\; x_1 + x_2 + 1)$$

δεν είναι γραμμική, αφού δεν ικανοποιεί καμιά από τις ιδιότητες του Ορισμού 7.2.1. Για $x{=}(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ και $\lambda \in \mathbf{R}$ έχουμε

$$T(\lambda x) \;=\; T(\lambda x_1, \lambda x_2) \;=\; (\lambda x_1,\; \lambda x_1 + \lambda x_2,\; \lambda x_1 + \lambda x_2 + 1) \neq \lambda\, T(x)\,,$$

οπότε η συνθήκη (ii) δεν ικανοποιείται. Ομοίως, βρίσκουμε ότι ούτε η (i) ισχύει. Θα μπορούσαμε πάντως να δούμε αμέσως ότι η T δεν είναι γραμμική αφού

$$T(\mathbf{0}) \;=\; T(0,0) \;=\; (0,\; 0,\; 1) \neq \mathbf{0}\,.$$

Θεώρημα 7.2.3
Έστω V και W γραμμικοί χώροι. Αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης n, το $A{=}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ είναι μια βάση του V και τα $w_1, w_2, \cdots, w_n$ είναι τυχόντα διανύσματα του W, τότε υπάρχει *μοναδική γραμμική απεικόνιση* $T : V \to W$ τέτοια ώστε

$$T(u_i) \;=\; w_i\,, \quad i = 1, 2, \cdots, n\,. \tag{7.10}$$

Απόδειξη
Κάθε στοιχείο $u \in V$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης A:

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i\,,$$

όπου τα a_i είναι μονοσήμαντα ορισμένα. Η απεικόνιση $T : V \to W$ που ορίζεται από την

$$T(u) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i \tag{7.11}$$

ικανοποιεί την (7.10), αφού

$$T(u_i) \;=\; T(1\, u_i) \;=\; w_i\,, \quad i = 1, 2, \cdots, n\,.$$

Θα δείξουμε ότι η T είναι γραμμική και μοναδική.
Έστω $\lambda, \mu \in K$ και $u, v \in V$ με

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i \quad \text{και} \quad v \;=\; \sum_{i=1}^{n} b_i\, u_i\,,$$

όπου οι σταθερές a_i και b_i είναι μονοσήμαντα ορισμένες. Έχουμε τότε

$$T(\lambda u{+}\mu v) = T\left(\lambda \sum_{i=1}^{n} a_i u_i + \mu \sum_{i=1}^{n} b_i u_i\right) = T\left(\sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i + \mu b_i)\, u_i\right) = \sum_{i=1}^{n} (\lambda a_i{+}\mu b_i) w_i \;\Longrightarrow$$

$$T(\lambda u + \mu v) \;=\; \lambda \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i \;+\; \mu \sum_{i=1}^{n} b_i\, w_i \;=\; \lambda\, T(u) \;+\; \mu\, T(v)\,.$$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.2, η T είναι γραμμική. Μένει να δείξουμε ότι είναι μοναδική. Έστω $S : V \to W$ μια άλλη γραμμική απεικόνιση που ικανοποιεί την

$$S(u_i) \;=\; w_i\,, \quad i = 1, 2, \cdots, n\,.$$

Λόγω της γραμμικότητας της S, για τυχόν $u \in V$ έχουμε

$$S(u) \;=\; S\left(\sum_{i=1}^{n} a_i\, u_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i\, S(u_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_i\, w_i \;=\; T(u)\,.$$

Άρα $S{=}T$, οπότε η T είναι μοναδική. □

Παραδείγματα

1. Έστω η βάση
$$\{u_1 = (1,2)\;,\; u_2 = (3,4)\}$$
του $\mathbf{R}^2$ και τα διανύσματα
$$w_1 \;=\; (3,2,1)\;,\;\; w_2 \;=\; (6,5,4)$$
του $\mathbf{R}^3$. Θα βρούμε τη μοναδική γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ για την οποία, σύμφωνα με το Θεώρημα 7.2.3, ισχύει:
$$\begin{aligned} T(u_1) &\;=\; w_1 \;=\; (3,2,1) \\ T(u_2) &\;=\; w_2 \;=\; (6,5,4) \end{aligned}$$
Έστω $x{=}(x_1, x_2)$ τυχόν στοιχείο του $\mathbf{R}^2$. Αυτό γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2 (αφού αυτά αποτελούν μια βάση του $\mathbf{R}^2$):
$$(x_1, x_2) \;=\; \lambda_1\, u_1 \;+\; \lambda_2\, u_2\,, \quad \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{R}\,.$$
Αντικαθιστώντας τα u_1 και u_2 και επιλύοντας το σύστημα που προκύπτει, βρίσκουμε ότι
$$\lambda_1 \;=\; -2x_1 \;+\; \frac{3}{2}x_2 \quad \text{και} \quad \lambda_2 \;=\; x_1 \;-\; \frac{1}{2}x_2\,,$$
οπότε
$$(x_1, x_2) \;=\; \left(-2x_1 \;+\; \frac{3}{2}x_2\right)\, u_1 \;+\; \left(x_1 \;-\; \frac{1}{2}x_2\right)\, u_2\,.$$
Έχουμε τώρα
$$\begin{aligned} T(x_1, x_2) &\;=\; T\left[\left(-2x_1 \;+\; \frac{3}{2}x_2\right)\, u_1 \;+\; \left(x_1 \;-\; \frac{1}{2}x_2\right)\, u_2\right] \\ &\;=\; \left(-2x_1 \;+\; \frac{3}{2}x_2\right)\, T(u_1) \;+\; \left(x_1 \;-\; \frac{1}{2}x_2\right)\, T(u_2) \\ &\;=\; \left(-2x_1 \;+\; \frac{3}{2}x_2\right)\, w_1 \;+\; \left(x_1 \;-\; \frac{1}{2}x_2\right)\, w_2 \\ &\;=\; \left(-2x_1 \;+\; \frac{3}{2}x_2\right)\, (3,2,1) \;+\; \left(x_1 \;-\; \frac{1}{2}x_2\right)\, (6,5,4) \quad \Longrightarrow \end{aligned}$$
$$T(x_1, x_2) \;=\; \left(\frac{3}{2}x_2,\; x_1 \;+\; \frac{1}{2}x_2,\; 2x_1 \;-\; \frac{1}{2}x_2\right)\,.$$

2. Έστω $T : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ μια γραμμική απεικόνιση και

$$w_i \;=\; T(\mathbf{e}_i)$$

οι εικόνες των στοιχείων της συνήθους βάσης $\{\mathbf{e}_1, \cdots, \mathbf{e}_n\}$ του $\mathbf{R}^n$. Σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.3, η T προσδιορίζεται μονοσήμαντα από τα διανύσματα $w_1, \cdots, w_n$ του $\mathbf{R}^m$. Αν $x{=}(x_1, \cdots, x_n)$ τυχόν στοιχείο του $\mathbf{R}^n$, έχουμε

$$T(x) \;=\; T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\,\mathbf{e}_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\,T(\mathbf{e}_i) \quad\Longrightarrow$$

$$T(x) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\,w_i$$

ή

$$T(x_1, x_2, \cdots, x_n) \;=\; x_1\,w_1 \;+\; x_2\,w_2 \;+\; \cdots \;+\; x_n\,w_n\,. \tag{7.12}$$

Αν συμβολίσουμε τις συντεταγμένες του w_i ως εξής

$$w_i \;=\; (a_{i1}, a_{i2}, \cdots, a_{in})\,,$$

και θεωρήσουμε τον $n \times m$ πίνακα A με γραμμές τα $w_1, \cdots, w_n$, μπορούμε να γράψουμε την (7.12) ως εξής:

$$T(x) \;=\; x^T\,A\,,$$

ή

$$T(x_1, \cdots, x_n) \;=\; [x_1\;\cdots\;x_n]\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1m}\\ \vdots & & \vdots\\ a_{n1} & \cdots & a_{nm}\end{bmatrix}.$$

Αυτή είναι μια πολύ άμεση περιγραφή μιας γραμμικής απεικόνισης. Στο Εδάφιο 7.6, θα μελετήσουμε λεπτομερώς τη σχέση μεταξύ γραμμικών απεικονίσεων και πινάκων.

Το σύνολο των γραμμικών απεικονίσεων της μορφής $T : V_1 \to V_2$ συμβολίζεται με

$$\mathcal{L}(V_1, V_2) \qquad \text{ή} \qquad \mathrm{Hom}(V_1, V_2).$$

Έχουμε ήδη ορίσει την ισότητα (όχι απαραίτητα γραμμικών) απεικονίσεων. Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι ο χώρος $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι κλειστός ως προς τις συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

Πρόσθεση στο $\mathcal{L}(V_1, V_2)$

Το άθροισμα των $T_1, T_2 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ ορίζεται κατά τα γνωστά ως εξής:

$$(T_1 + T_2)(x) \;=\; T_1(x) \;+\; T_2(x)\,, \quad x \in V_1\,. \tag{7.13}$$

Θα δείξουμε ότι η απεικόνιση $(T_1 + T_2) : V_1 \to V_2$ είναι επίσης γραμμική. Για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$, έχουμε:

$$\begin{aligned}(T_1 + T_2)(\lambda x + \mu y) \;&=\; T_1(\lambda x + \mu y) \;+\; T_2(\lambda x + \mu y)\\ &=\; \lambda\,T_1(x) \;+\; \mu\,T_1(y) \;+\; \lambda\,T_2(x) \;+\; \mu\,T_2(y)\\ &=\; \lambda\,[T_1(x) \;+\; T_2(x)] \;+\; \mu\,[T_1(y) \;+\; T_2(y)] \quad\Longrightarrow\end{aligned}$$

$$(T_1+T_2)(\lambda x+\mu y) \;=\; \lambda\,(T_1+T_2)(x) \;+\; \mu\,(T_1+T_2)(y)\,.$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.2.2, η T_1+T_2 είναι γραμμική:

$$T_1+T_2 \in \mathcal{L}(V_1,V_2)\,.$$

Άρα το σύνολο $\mathcal{L}(V_1,V_2)$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση.

Βαθμωτός πολλαπλασιασμός
Ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός στο $\mathcal{L}(V_1,V_2)$ ορίζεται ως εξής:

$$(\kappa T)(x) \;=\; \kappa\,T(x)\,, \quad x\in V_1\,, \tag{7.14}$$

όπου $\kappa\in K$. Για κάθε $x,y\in V_1$ και $\lambda,\mu\in K$, έχουμε (λόγω της γραμμικότητας του T):

$$(\kappa T)(\lambda x+\mu y) \;=\; \kappa\,T(\lambda x+\mu y) \;=\; \kappa\,[\lambda\,T(x)+\mu\,T(y)] \;=\; \lambda\,[\kappa\,T(x)]+\mu\,[\kappa\,T(y)] \quad\Longrightarrow$$

$$(\kappa T)(\lambda x+\mu y) \;=\; \lambda\,(\kappa T)(x) \;+\; \mu\,(\kappa T)(y)\,.$$

Άρα λοιπόν η απεικόνιση κT είναι γραμμική. Το σύνολο $\mathcal{L}(V_1,V_2)$ είναι κλειστό ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό:

$$\kappa T \in \mathcal{L}(V_1,V_2)\,.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το σύνολο $\mathcal{L}(V_1,V_2)$ εφοδιασμένο με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι γραμμικός χώρος. Έχουμε έτσι το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 7.2.4
Το σύνολο $\mathcal{L}(V_1,V_2)$ με τις πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού που ορίζονται από τις (7.13) και (7.14), αντίστοιχα, είναι γραμμικός χώρος.

Απόδειξη
Αυτή είναι απλή και αφήνεται σαν άσκηση. Αναφέρουμε μόνο ότι το μηδενικό στοιχείο του $\mathcal{L}(V_1,V_2)$ είναι η μηδενική απεικόνιση: $0(x)=\mathbf{0}$, $x\in V_1$. □

Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(V,V)$ των γραμμικών τελεστών πάνω στον γραμμικό χώρο V συμβολίζεται πιο απλά με $\mathcal{L}(V)$. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, ο $\mathcal{L}(V)$, εκτός από τη *γραμμική του δομή* (Θ. 7.2.4), χαρακτηρίζεται και από *αλγεβρική δομή*, αφού η σύνθεση $T_1\circ T_2$ των T_1 και $T_2\in\mathcal{L}(V)$ αποτελεί μια πράξη πολλαπλασιασμού στον $\mathcal{L}(V)$.

Παράδειγμα
Οι γραμμικές απεικονίσεις $T:\mathbf{R}^3\to\mathbf{R}^2$ είναι της μορφής

$$T(x_1,x_2,x_3) \;=\; (\;a_{11}x_1+a_{21}x_2+a_{31}x_3,\; a_{12}x_1+a_{22}x_2+a_{32}x_3\;)\,. \tag{i}$$

Παρατηρούμε ότι

$$T(x_1,x_2,x_3) = a_{11}(x_1,0)+a_{21}(x_2,0)+a_{31}(x_3,0)+a_{12}(0,x_1)+a_{22}(0,x_2)+a_{32}(0,x_3). \quad \text{(ii)}$$

Ορίζουμε τώρα τις ακόλουθες γραμμικές απεικονίσεις

$$\begin{aligned} T_{11}(x_1,x_2,x_3) &= (x_1,\ 0) \\ T_{21}(x_1,x_2,x_3) &= (x_2,\ 0) \\ T_{31}(x_1,x_2,x_3) &= (x_3,\ 0) \\ T_{12}(x_1,x_2,x_3) &= (0,\ x_1) \\ T_{22}(x_1,x_2,x_3) &= (0,\ x_2) \\ T_{32}(x_1,x_2,x_3) &= (0,\ x_3) \end{aligned}$$

Λόγω της (ii), οι T_{ij} με $i = 1,2,3$ και $j = 1,2$ παράγουν τον $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$. Η γραμμική ανεξαρτησία των T_{ij} είναι προφανής αφού αν

$$a_{11}T_{11} + a_{21}T_{21} + a_{31}T_{31} + a_{12}T_{12} + a_{22}T_{22} + a_{32}T_{32} = (0,\ 0) \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \implies$$

$$(\ a_{11}x_1 + a_{21}x_2 + a_{31}x_3,\ a_{12}x_1 + a_{22}x_2 + a_{32}x_3\ ) = (0,\ 0) \quad \forall (x_1,x_2,x_3) \in \mathbf{R}^3 \implies$$

$$a_{11} = a_{21} = a_{31} = a_{12} = a_{22} = a_{32} = 0\ .$$

Άρα οι T_{ij} αποτελούν μια βάση του $\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ και

$$dim\mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2) = dim\mathbf{R}^3\, dim\mathbf{R}^2\ .$$

Στο επόμενο θεώρημα θα γενικεύσουμε το πιο πάνω αποτέλεσμα. Για την κατανόηση της απόδειξής του, είναι χρήσιμες οι ακόλουθες παρατηρήσεις.

Έστω

$$A = \{u_1 = (1,0,0),\ u_2 = (0,1,0),\ u_3 = (0,0,1)\}$$

και

$$B = \{w_1 = (1,0),\ w_2 = (0,1)\}$$

οι συνήθεις βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$ αντίστοιχα. Για την T_{11} παρατηρούμε ότι

$$\left.\begin{aligned} T_{11}(u_1) &= w_1 \\ T_{11}(u_2) &= 0 \\ T_{11}(u_3) &= 0 \end{aligned}\right\} \implies T_{11}(u_k) = \delta_{k1}\, w_1\ , \quad k = 1,2,3\ .$$

Ο αναγνώστης μπορεί εύκολα να διαπιστώσει ότι για i=1,2,3 και j=1,2

$$T_{ij}(u_k) = \delta_{ki}\, w_j\ , \quad k = 1,2,3\ . \quad \text{(iii)}$$

Βάσει του Θ. 7.2.3, οι απεικονίσεις T_{ij} που ορίζονται από την (iii) είναι γραμμικές και ορίζονται μονοσήμαντα.

Θεώρημα 7.2.5

Αν V_1 και V_2 είναι πεπερασμενοδιάστατοι γραμμικοί χώροι, τότε

$$dim\mathcal{L}(V_1, V_2) = dimV_1\, dimV_2\ . \quad (7.15)$$

Απόδειξη

Έστω ότι $dim V_1 = n \in \mathbf{N}$ και $dim V_2 = m \in \mathbf{N}$ και ότι τα σύνολα

$$A = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \quad \text{και} \quad B = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\}$$

είναι βάσεις των V_1 και V_2, αντίστοιχα. Σύμφωνα με το Θ. 7.2.3, οι απεικονίσεις T_{ij} με $i = 1, \cdots, n$ και $j = 1, \cdots, m$ που ορίζονται από τις

$$T_{ij}(u_k) \;=\; \delta_{ki}\, w_j \;, \quad k = 1, 2, \cdots, n \tag{i}$$

είναι γραμμικές και ορίζονται μονοσήμαντα. Για την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί να δείξουμε ότι οι απεικονίσεις αυτές αποτελούν μια βάση του $\mathcal{L}(V_1, V_2)$. Θα δείξουμε πρώτα ότι αυτές παράγουν τον $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Έστω η απεικόνιση $S \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Επειδή το A είναι βάση του V_1, για κάθε $u \in V_1$ έχουμε

$$u \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k \;,$$

όπου τα $\lambda_k \in K$ είναι μονοσήμαντα ορισμένα, και έτσι

$$S(u) \;=\; S\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, u_k\right) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k\, S(u_k)\,, \quad \lambda_i \in K\,, \quad k = 1, \cdots, n\,. \tag{ii}$$

Επειδή $S(u_k) \in V_2$, το $S(u_k)$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης B του V_2:

$$S(u_k) \;=\; \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, w_j \;=\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \delta_{ki} w_j \;=\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_{ij}(u_k)\,, \tag{iii}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την (i). Από τις (ii) και (iii) έχουμε

$$S(u) \;=\; \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_{ij}(u_k) \;=\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_{ij}\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k u_k\right) \quad \Longrightarrow$$

$$S(u) \;=\; \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_{ij}(u) \quad \forall u \in V\,.$$

Άρα οι T_{ij} παράγουν τον $\mathcal{L}(V_1, V_2)$.

Αν τώρα

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_{ij} \;=\; 0\,,$$

τότε για $k=1, \cdots, n$ έχουμε

$$\left(\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_{ij}\right)(u_k) \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, T_{ij}(u_k) \;=\; 0\,. \tag{iv}$$

Από τις (i) και (iv) έχουμε

$$\sum_{j=1}^{m}\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\, \delta_{ki} w_j \;=\; 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{j=1}^{m} a_{kj}\, w_j \;=\; 0\,, \quad k = 1, 2, \cdots, n\,.$$

Επειδή τα w_j με j=1,2,$\cdots$,m είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (αφού αποτελούν μια βάση του V_2), παίρνουμε:

$$a_{kj} \;=\; 0\,, \quad k=1,2,\cdots,n\,, \quad j=1,2,\cdots,m\,.$$

Άρα οι γραμμικές απεικονίσεις T_{ij} είναι γραμμικώς ανεξάρτητες και το θεώρημα έχει αποδειχθεί. $\square$

Πόρισμα

Αν ο γραμμικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης n, τότε $dim\mathcal{L}(V)$=n^2.

Τα στοιχεία του χώρου $\mathcal{L}(V,K)$ καλούνται **γραμμικά συναρτησιακά** ή **γραμμικά συναρτησοειδή** (linear functionals) **πάνω στο** V. Η έννοια του γραμμικού συναρτησιακού είναι ιδιαίτερα σημαντική στη μελέτη χώρων πεπερασμένης διάστασης γιατί διευκολύνει τη συζήτηση θεμάτων όπως οι υπόχωροι, οι γραμμικές εξισώσεις και οι συντεταγμένες. Ο χώρος $\mathcal{L}(V,K)$ χαλείται **αλγεβρικός δυϊκός χώρος** (dual space) του V και συμβολίζεται με V^* ή V':

$$V^* \;=\; \mathcal{L}(V,K)\,.$$

Παραδείγματα

1. Η απεικόνιση $F\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ με τύπο

$$F(x_1,x_2,\cdots,x_n) \;=\; a_1x_1 \;+\; a_2x_2 \;+\;\cdots\;+\; a_nx_n\,,$$

όπου $a_i\in\mathbf{R}$, i=1,2,$\cdots$,n γνωστές σταθερές, είναι γραμμικό συναρτησιακό. Κάθε στοιχείο του $\mathcal{L}(\mathbf{R}^n,\mathbf{R})$ είναι της πιο πάνω μορφής. Αν $\mathbf{e}_i$, $i=1,2,\cdots,n$ είναι τα στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbf{R}^n$, ισχύει

$$F(\mathbf{e}_i) \;=\; a_i\,, \quad i=1,2,\cdots,n\,.$$

2. Το ίχνος τετραγωνικού πίνακα, $tr\in\mathcal{L}(\mathcal{M}_{n\times n},\mathbf{R})$, είναι ένα σημαντικό παράδειγμα γραμμικού συναρτησιακού:

$$trA \;=\; \sum_{i=1}^{n} a_{ii}\,, \quad A=(a_{ij})\in\mathcal{M}_{n\times n}\,.$$

Η γραμμικότητα του ίχνους tr αποδεικνύεται εύκολα χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης πινάκων και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού.

3. Ένα σημαντικό γραμμικό συναρτησιακό είναι το $G\in\mathcal{L}(C([a,b]),\mathbf{R})$ με τύπο

$$G(f) \;=\; \int_a^b f(t)\,dt\,.$$

Η γραμμικότητα του G αποδεικνύεται εύκολα με τη χρήση των ιδιοτήτων του ορισμένου ολοκληρώματος.

7.2.1 Σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων

Η πρόταση που ακολουθεί μας λέει ότι η σύνθεση γραμμικών απεικονίσεων είναι επίσης γραμμική απεικόνιση.

Πρόταση 7.2.6
Αν $T_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και $T_2 \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$, τότε $T_2 \circ T_1 \in \mathcal{L}(V_1, V_3)$.

Απόδειξη
Θα δείξουμε τη γραμμικότητα της $T_2 \circ T_1$ χρησιμοποιώντας την Πρ. 7.2.2. Αξιοποιώντας τη γραμμικότητα των T_1 και T_2, για κάθε $x, y \in V_1$ και $\lambda, \mu \in K$ έχουμε

$$(T_2 \circ T_1)(\lambda x + \mu y) = T_2[T_1(\lambda x + \mu y)] = T_2[\lambda T_1(x) + \mu T_1(y)] = \lambda T_2(T_1(x)) + \mu T_2(T_1(y)).$$

Επειδή

$$(T_2 \circ T_1)(\lambda x + \mu y) = \lambda\,(T_2 \circ T_1)(x) + \mu\,(T_2 \circ T_1)(y)$$

η $T_2 \circ T_1$ είναι γραμμική. □

Πρόταση 7.2.7
Αν $T_1, T_2, T_3 \in \mathcal{L}(V)$ και $\lambda \in K$, ισχύουν τα εξής:
(i) $(T_1 \circ T_2) \circ T_3 = T_1 \circ (T_2 \circ T_3)$ (προσεταιριστική ιδιότητα)
(ii) $T_1 \circ (T_2 + T_3) = T_1 \circ T_2 + T_1 \circ T_3$ (επιμεριστική ιδιότητα)
(iii) $\lambda\,(T_1 \circ T_2) = (\lambda T_1) \circ T_2 = T_1 \circ (\lambda T_2)$

Απόδειξη
Η προσεταιριστική ιδιότητα (i) αποδείχθηκε σε προηγούμενη παράγραφο και ισχύει γενικά (δηλ. και για μη γραμμικές απεικονίσεις). Η γραμμικότητα των T_1, T_2, T_3 είναι όμως απαραίτητη για την απόδειξη των (ii) και (iii) που αφήνεται σαν άσκηση. □

Ας θυμηθούμε τώρα τον Ορισμό 4.3.7 της **άλγεβρας** πάνω σε κάποιο σώμα K και ως προς μια πράξη πολλαπλασιασμού $\cdot$. Βάσει της Πρότασης 7.2.7, ο $\mathcal{L}(V)$ με την πράξη $\circ$ της σύνθεσης ικανοποιεί τις τρεις συνθήκες του ορισμού, οπότε ισχύει το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.2.8
Ο γραμμικός χώρος $\mathcal{L}(V)$ εφοδιασμένος με την πράξη $\circ$ της σύνθεσης είναι μια άλγεβρα πάνω στο K.

Έτσι ο $\mathcal{L}(V)$ αναφέρεται συχνά ως η **άλγεβρα των γραμμικών τελεστών πάνω στο** V (algebra of linear operators on V). Το μοναδιαίο στοιχείο της άλγεβρας $\mathcal{L}(V)$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(V)$:

$$T \circ I = I \circ T = T\,.$$

Εφόσον η σύνθεση δεν είναι αντιμεταθετική, η άλγεβρα $\mathcal{L}(V)$ δεν είναι αντιμεταθετική.

7.3 Εικόνα και πυρήνας γραμμικής απεικόνισης

Για χάρη της αυτονομίας της παραγράφου, επαναλαμβάνουμε τον ορισμό της εικόνας γραμμικής απεικόνισης.

Ορισμός 7.3.1
Καλούμε **εικόνα ή χώρο εικόνων** (image space) της $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ το σύνολο των εικόνων των $x \in V_1$:

$$ImT \;=\; \{y \in V_2 \;:\; y = T(x)\,, \quad x \in V_1\}\,. \tag{7.16}$$

Είναι φανερό ότι η εικόνα ImT είναι υποσύνολο του V_2. Ως γνωστό, αν $ImT{=}V_2$, η T είναι επί.

Πρόταση 7.3.2
Η εικόνα ImT της $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι υπόχωρος του V_2.

Απόδειξη
Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2.
(i) $\mathbf{0}{=}T(\mathbf{0}) \in ImT$.
(ii) Για $T(x), T(y) \in ImT$ (με $x, y \in V_1$), έχουμε $T(x){+}T(y){=}T(x+y)$. Λόγω της γραμμικότητας του V_1, $x+y \in V_1$. Άρα $T(x){+}T(y) \in ImT$.
(iii) Για $\lambda \in K$ και $T(x) \in ImT$, έχουμε $\lambda T(x){=}T(\lambda x)$. Λόγω της γραμμικότητας του V_1, $\lambda x \in V_1$. Άρα $\lambda T(x) \in ImT$.
Άρα η ImT είναι υπόχωρος του V_2. $\square$

Πρόταση 7.3.2
Έστω η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Αν ο V_1 είναι πεπερασμένης διάστασης n και

$$A \;=\; \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \tag{7.17}$$

μια βάση του, τότε το σύνολο

$$B \;=\; \{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\} \tag{7.18}$$

παράγει την ImT.

Απόδειξη
Εφόσον τα στοιχεία του B ανήκουν στην ImT, κάθε γραμμικός τους συνδυασμός ανήκει επίσης στην ImT αφού η ImT είναι γραμμικός χώρος (ως υπόχωρος του V_2). Είναι λοιπόν φανερό ότι η γραμμική θήκη $L[B]$ του B είναι υποσύνολο της ImT. Αρκεί τότε να δείξουμε ότι και η ImT είναι υποσύνολο της $L[B]$, ότι δηλαδή κάθε στοιχείο της ImT είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων του B.
Αν $v \in ImT$, τότε υπάρχει $u \in V_1$ τέτοιο ώστε $T(u){=}v$. Το u γράφεται σαν γραμμικός

συνδυασμός των στοιχείων της βάσης A του V_1,

$$u \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, u_i \,, \quad \lambda_i \in K \,. \tag{7.19}$$

Έχουμε έτσι:

$$v \;=\; T(u) \;=\; T\left(\sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, u_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, T(u_i) \in L[B] \tag{7.20}$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

Παρατηρούμε ότι μια γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, όπου ο V_1 είναι πεπερασμένης διάστασης n, καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες των στοιχείων μιας βάσης του V_1.

Παράδειγμα
Η $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ καθορίζεται πλήρως από τις εικόνες των στοιχείων της συνήθους βάσης $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ του $\mathbf{R}^2$. Αν για παράδειγμα,

$$T(\mathbf{e}_1) \;=\; (0,1,2) \quad \text{και} \quad T(\mathbf{e}_2) \;=\; (1,0,1) \,,$$

τότε, επειδή κάθε διάνυσμα $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$ γράφεται (x_1, x_2)=$x_1 \, \mathbf{e}_1 + x_2 \, \mathbf{e}_2$, παίρνουμε:

$$T(x_1, x_2) \;=\; T(x_1 \, \mathbf{e}_1 + x_2 \, \mathbf{e}_2) \;=\; x_1 \, T(\mathbf{e}_1) + x_2 \, T(\mathbf{e}_2) \;=\; x_1 \, (0,1,2) + x_2 \, (1,0,1) \quad \Longrightarrow$$

$$T(x_1, x_2) \;=\; (x_2, \; x_1 \,, 2x_1 + x_2) \,.$$

Ορισμός 7.3.4
Έστω η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Το σύνολο των $x \in V_1$ που απεικονίζονται μέσω της T στο $\mathbf{0} \in V_2$ ονομάζεται **πυρήνας** (kernel) ή **μηδενικός χώρος** (null space) της T και συμβολίζεται με $KerT$:

$$KerT \;=\; \{x \in V_1 \;:\; T(x) \;=\; \mathbf{0}\} \,. \tag{7.21}$$

Δεδομένου ότι $T(\mathbf{0})$=$\mathbf{0}$, ο πυρήνας μιας γραμμικής απεικόνισης T περιέχει τουλάχιστον το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0} \in V_1$. Συνεπώς ο $KerT$ δεν μπορεί να είναι το κενό σύνολο.

Παραδείγματα

1. Για τη μηδενική απεικόνιση $0 \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$,

   $$0(x) \;=\; \mathbf{0} \,, \quad x \in V_1 \,,$$

   έχουμε $Im0$=$\{\mathbf{0}\}$ και $Ker0$=V_1.

2. Για τον ταυτοτικό τελεστή $I \in \mathcal{L}(V)$,

$$I(x) = x\,, \quad x \in V_1\,,$$

έχουμε $ImI{=}V_1$ και $KerI{=}\{\mathbf{0}\}$.

3. Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ με τύπο

$$T(x_1, x_2) = (x_1 - x_2,\, x_1)\,.$$

Τα στοιχεία (x_1, x_2) του $KerT$ ικανοποιούν την

$$T(x_1, x_2) = \mathbf{0} = (0,0) \implies (x_1 - x_2,\, x_1) = (0,0) \implies x_1 = x_2 = 0\,.$$

Άρα $KerT{=}\{\mathbf{0}\}$.

Πρόταση 7.3.5
Ο πυρήνας $KerT$ της $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι υπόχωρος του V_1.

Απόδειξη
Ελέγχουμε κατά τα γνωστά αν ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2.
(i) Επειδή $T(\mathbf{0}){=}\mathbf{0}$, $\mathbf{0} \in KerT$.
(ii) Αν $x, y \in KerT$, τότε $T(x){=}T(y){=}\mathbf{0}$ και έτσι

$$T(x) + T(y) = \mathbf{0} + \mathbf{0} = \mathbf{0} \implies T(x+y) = \mathbf{0} \implies x + y \in KerT\,.$$

(iii) Έστω $x \in KerT$ οπότε $T(x){=}\mathbf{0}$. Για $\lambda \in K$, έχουμε

$$\lambda\, T(x) = \lambda\, \mathbf{0} = \mathbf{0} \implies T(\lambda x) = \mathbf{0} \implies \lambda x \in KerT\,.$$

Οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα ο $KerT$ είναι υπόχωρος του V_1.
□

Θεώρημα 7.3.6
Η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν $KerT{=}\{\mathbf{0}\}$.

Απόδειξη
Αν η T είναι αμφιμονοσήμαντη και $x \in KerT$, τότε

$$T(x) = \mathbf{0} = T(\mathbf{0}) \implies x = \mathbf{0}\,.$$

Άρα $KerT{=}\{\mathbf{0}\}$.
Αντίστροφα, αν είναι $KerT{=}\{\mathbf{0}\}$ και για $x_1, x_2 \in V_1$ ισχύει

$$T(x_1) = T(x_2) \implies T(x_1{-}x_2) = \mathbf{0} \implies x_1{-}x_2 \in KerT \implies x_1{-}x_2 = \mathbf{0} \implies x_1 = x_2.$$

Άρα η T είναι αμφιμονοσήμαντη. □

Με τις προϋποθέσεις της πρότασης που ακολουθεί, μπορούμε να βρίσκουμε αμέσως μια βάση της εικόνας ImT μιας γραμμικής απεικόνισης.

Πρόταση 7.3.7
Αν η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι αμφιμονοσήμαντη, ο V_1 είναι πεπερασμένης διάστασης n και το $A=\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ είναι μια βάση του, τότε το σύνολο $B=\{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_n)\}$ είναι βάση της ImT.

Απόδειξη
Επειδή το B παράγει την ImT (Πρ. 7.3.3), αρκεί να δείξουμε ότι το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αν ισχύει

$$\lambda_1\, T(u_1) \;+\; \lambda_2\, T(u_2) \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n\, T(u_n) \;=\; \mathbf{0}\,,$$

λόγω της γραμμικότητας της T παίρνουμε

$$T(\lambda_1\, u_1 \;+\; \lambda_2\, u_2 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n\, u_n) \;=\; T(\mathbf{0}) \;=\; \mathbf{0} \;\Longrightarrow$$

$$\lambda_1\, u_1 \;+\; \lambda_2\, u_2 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n\, u_n \in KerT\,.$$

Επειδή η T είναι αμφιμονοσήμαντη, $KerT=\{\mathbf{0}\}$, και έτσι

$$\lambda_1\, u_1 \;+\; \lambda_2\, u_2 \;+\; \cdots \;+\; \lambda_n\, u_n \;=\; \mathbf{0} \;\Longrightarrow$$

$$\lambda_1 \;=\; \cdots \;=\; \lambda_n \;=\; 0\,,$$

αφού τα $u_1, \cdots, u_n$ είναι γραμμικώς ανεξαρτητα (είναι τα στοιχεία της βάσης A). Έτσι και το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. □

Πόρισμα 7.3.8
Αν η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι αμφιμονοσήμαντη και ο V_1 είναι πεπερασμένης διάστασης,

$$dimV_1 \;=\; dim\, ImT\,. \tag{7.22}$$

Απόδειξη
Άμεση απόρροια της Πρ. 7.3.7. □

Παρατήρηση: Με τις προϋποθέσεις της Πρ. 7.3.7, αν $dimV_2 = dimV_1 = n$, τότε $ImT = V_2$, δηλαδή η T είναι επί. Το σύνολο B είναι τότε βάση του V_2.

Ορισμός 7.3.9
Έστω η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ όπου ο V_1 είναι πεπερασμένης διάστασης.
(α) Η διάσταση της εικόνας ImT καλείται **βαθμός ή βαθμίδα ή τάξη** (rank) της T και συμβολίζεται με $rankT$:

$$rank(T) \;=\; dimImT\,. \tag{7.23}$$

(β) Η διάσταση του πυρήνα $KerT$ καλείται **μηδενικότητα** (nullity) της T και συμβολίζεται με $nullity(T)$:

$$nullity(T) \;=\; dimKerT\,. \tag{7.24}$$

Σημείωση: Σε παλιά βιβλία η μηδενικότητα $nullity(T)$ της T αναφέρεται ως **έλλειμμα** (deficit) και συμβολίζεται με $def(T)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί κατέχει σπουδαία θέση στη θεωρία της Γραμμικής Άλγεβρας.

Θεώρημα 7.3.10 (Θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας)
Αν ο V_1 είναι πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος και $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$,

$$dimV_1 \;=\; dim\,KerT \;+\; dim\,ImT\,. \tag{7.25}$$

Απόδειξη
Αν

$$dimV_1 \;=\; n \quad \text{και} \quad dim\,KerT \;=\; m\,,$$

έχουμε $0 \le m \le n$, αφού ο $KerT$ είναι υπόχωρος του V_1. Για να ισχύει το θεώρημα αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$dim\,ImT \;=\; n \;-\; m$$

ή, ισοδύναμα, ότι μια βάση της ImT περιέχει $n - m$ στοιχεία.
Το θεώρημα αποδεικνύεται εύκολα στις τετριμμένες περιπτώσεις m=0 και m=n. Στην πρώτη περίπτωση, $KerT$=$\{\mathbf{0}\}$, οπότε η T είναι αμφιμονοσήμαντη (Θ. 7.3.6). Σύμφωνα με το Πορ. 7.3.8, $dimV_1$=$dim\,ImT$ και το θεώρημα ισχύει. Αν m=n, τότε $KerT$=V_1. Η T είναι, σ' αυτή την περίπτωση, η μηδενική απεικόνιση και έτσι ImT=$\{\mathbf{0}\}$, οπότε το θεώρημα ισχύει.
Θεωρούμε τώρα τη γενικότερη περίπτωση όπου $0 < m < n$. Μια βάση

$$A \;=\; \{u_1, u_2, \cdots, u_m\}$$

του $KerT$ μπορεί να επεκταθεί σε μια βάση του V_1 (Θ. 3.3.6). Θεωρούμε λοιπόν ότι το σύνολο

$$B \;=\; \{u_1, u_2, \cdots, u_m, u_{m+1}, \cdots, u_n\}$$

είναι μια βάση του V_1. Για να αποδείξουμε το θεώρημα, αρκεί να δείξουμε ότι το υποσύνολο

$$C \;=\; \{T(u_{m+1}), \cdots, T(u_n)\}$$

του V_2 είναι μια βάση της ImT (αφού περιέχει $n - m$ στοιχεία). Θα δείξουμε πρώτα ότι το C είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Επειδή η T είναι γραμμική, από την

$$\lambda_1\, T(u_{m+1}) \;+\; \lambda_2\, T(u_{m+2}) \;+\; \cdots \;+\; \lambda_{m-n}\, T(u_n) \;=\; \mathbf{0}$$

παίρνουμε

$$T(\lambda_1\, u_{m+1} \;+\; \lambda_2\, u_{m+2} \;+\; \cdots \;+\; \lambda_{m-n}\, u_n) \;=\; \mathbf{0}$$

οπότε

$$\lambda_1\, u_{m+1} \;+\; \lambda_2\, u_{m+2} \;+\; \cdots \;+\; \lambda_{m-n}\, u_n \in KerT\,.$$

Το πιο πάνω διάνυσμα, ως στοιχείο του $KerT$ είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης A:

$$\lambda_1\, u_{m+1} \;+\; \lambda_2\, u_{m+2} \;+\; \cdots \;+\; \lambda_{m-n}\, u_n \;=\; \mu_1\, u_1 \;+\; \mu_2\, u_2 \;+\; \cdots \;+\; \mu_m\, u_m \quad \Longrightarrow$$

$$-\mu_1\, u_1 \,-\, \mu_2\, u_2 \,-\, \cdots \,-\, \mu_m\, u_m \,+\, \lambda_1\, u_{m+1} \,+\, \lambda_2\, u_{m+2} \,+\, \cdots \,+\, \lambda_{m-n}\, u_n \,=\, \mathbf{0}\,.$$

Επειδή το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο,

$$\mu_1 \,=\, \mu_2 \,=\, \cdots \,=\, \mu_m \,=\, \lambda_1 \,=\, \lambda_2 \,=\, \cdots \,=\, \lambda_{m-n} \,=\, 0\,.$$

Άρα το C είναι γραμμικώς ανεξάρτητο.
Σύμφωνα με την Πρ. 7.3.3, επειδή το B είναι βάση του V_1, το σύνολο

$$D \,=\, \{T(u_1), T(u_2), \cdots, T(u_m), T(u_{m+1}), \cdots, T(u_n)\}$$

παράγει την ImT. Επειδή $u_1, u_2, \cdots, u_m \in KerT$,

$$T(u_1) \,=\, T(u_2) \,=\, \cdots \,=\, T(u_m) \,=\, \mathbf{0}\,.$$

Συνεπώς οι γραμμικές θήκες των D και C ταυτίζονται, οπότε το C παράγει την ImT όπως απαιτείται. □

Παρατήρηση: Χρησιμοποιώντας τον Ορισμό 7.3.9, το θεώρημα βαθμού και μοναδικότητας παίρνει τη μορφή:

$$dimV_1 \,=\, nullity(T) \,+\, rank(T)\,. \tag{7.26}$$

Παράδειγμα
Έστω η απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \rightarrow \mathbf{R}^2$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) \,=\, (x_1 - x_3,\; x_2 + x_3)\,.$$

(α) Να δειχθεί ότι η T είναι γραμμική.
(β) Να βρεθεί ο $KerT$ και η $dimKerT$.
(γ) Να βρεθεί η $dimImT$.
(δ) Να βρεθεί η ImT.

Λύση
(α) Για $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ και $x{=}(x_1, x_2, x_3)$, $y{=}(y_1, y_2, y_3) \in \mathbf{R}^3$ έχουμε

$$\begin{aligned} T(\lambda x + \mu y) &= T[\lambda\,(x_1, x_2, x_3) \,+\, \mu\,(y_1, y_2, y_3)] \\ &= T(\lambda x_1 + \mu y_1,\; \lambda x_2 + \mu y_2,\; \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= (\lambda x_1 + \mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3,\; \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3) \\ &= \lambda\,(x_1 - x_3,\; x_2 + x_3) \,+\, \mu\,(y_1 - y_3,\; y_2 + y_3) \,=\, \lambda\, T(x) \,+\, \mu\, T(y)\,. \end{aligned}$$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.2.2, η T είναι γραμμική.
(β) Αν $x{=}(x_1, x_2, x_3) \in KerT$, τότε $T(x){=}\mathbf{0}$ ή

$$(x_1 - x_3,\; x_2 + x_3) \,=\, \mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 &=& 0 \\ x_2 + x_3 &=& 0 \end{array}\right\}\,.$$

Επιλύοντας το σύστημα, βρίσκουμε τη γενική λύση $(x_1, x_2, x_3) = a(1, -2, 1)$ όπου $a \in \mathbf{R}$. Άρα

$$KerT = \{x \in \mathbf{R}^3 : x = a(1, -2, 1), \ a \in \mathbf{R}\} .$$

Το σύνολο $\{(1, -2, 1)\}$ είναι βάση του $KerT$ αφού τον παράγει και είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Άρα $dimKerT = 1$.

(γ) Από το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας έχουμε

$$dim\mathbf{R}^3 = dimKerT + dimImT \quad \Longrightarrow \quad dimImT = 3 - 1 = 2 .$$

(δ) Επειδή η ImT είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^2$ και $dimImT = dim\mathbf{R}^2 = 2$, $ImT = \mathbf{R}^2$ (η T είναι επί). □

7.4 Η απεικόνιση $f(x) = Ax$

Έστω η απεικόνιση $f : \mathcal{M}_{n\times 1} \to \mathcal{M}_{m\times 1}$ με τύπο

$$f(X) = AX , \quad X \in \mathcal{M}_{n\times 1} , \tag{7.27}$$

όπου A σταθερός $m \times n$ πίνακας. Χρησιμοποιώντας τις γνωστές ιδιότητες της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού πινάκων, έχουμε για κάθε $X, Y \in \mathcal{M}_{n\times 1}$ και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$:

$$f(\lambda X + \mu Y) = A(\lambda X + \mu Y) = \lambda (AX) + \mu (AY) = \lambda f(X) + \mu f(Y) .$$

Άρα, σύμφωνα με τη Πρ. 7.2.2, η f είναι γραμμική.

Στη συνέχεια, θα θεωρούμε ότι έχουμε διανύσματα και όχι πίνακες στήλης. Έτσι αντί των $\mathcal{M}_{n\times 1}$ και $\mathcal{M}_{m\times 1}$, θα χρησιμοποιούμε τους $\mathbf{R}^n$ και $\mathbf{R}^m$, αντίστοιχα. Ο πυρήνας της $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$ είναι το σύνολο

$$Kerf = \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, Ax = 0\} . \tag{7.28}$$

Είναι φανερό ότι ο $Kerf$ είναι ο χώρος των λύσεων του ομογενούς συστήματος Ax=0. Έχουμε επίσης

$$Imf = \{y \in \mathbf{R}^m \,:\, y = Ax ,\ x \in \mathbf{R}^n\} . \tag{7.29}$$

Ορισμός 7.4.1

(α) Καλούμε **μηδενικό χώρο** (null space) ή **πυρήνα** (kernel) του $m \times n$ πίνακα A και τον συμβολίζουμε με $N(A)$ το σύνολο

$$N(A) = Kerf = \{x \in \mathbf{R}^n \,:\, Ax = 0\} . \tag{7.30}$$

(β) Καλούμε **εικόνα** (image) του $m \times n$ πίνακα A και τον συμβολίζουμε με $R(A)$ το σύνολο

$$R(A) = Imf = \{y \in \mathbf{R}^m \,:\, y = Ax ,\ x \in \mathbf{R}^n\} . \tag{7.31}$$

Από τη θεωρία των προηγούμενων παραγράφων, γνωρίζουμε ότι ο πυρήνας $N(A)$ και η εικόνα $R(A)$ του $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ είναι υπόχωροι των $\mathbf{R}^n$ και $\mathbf{R}^m$, αντίστοιχα (Πρ. 7.3.5 και 7.3.2, αντίστοιχα). Αν

$$S = \{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \cdots, \mathbf{e}_n\}$$

είναι η συνήθης βάση του $\mathbf{R}^n$, τότε σύμφωνα με την Πρ. 7.3.3, το σύνολο

$$B = \{f(\mathbf{e}_1), f(\mathbf{e}_2), \cdots, f(\mathbf{e}_n)\}$$

παράγει την εικόνα $R(A)$ του A. Επειδή τώρα

$$f(\mathbf{e}_i) = A\mathbf{e}_i = c_i(A) , \quad i = 1, 2, \cdots, n ,$$

όπου $c_i(A)$ η i-οστή στήλη του A, τα στοιχεία του B είναι οι στήλες του A. Έτσι η εικόνα $R(A)$ ταυτίζεται με το **γραμμικό χώρο στηλών** του A που ορίσαμε στο Εδάφιο 5.5:

$$R(A) = V_c(A) . \tag{7.32}$$

Στο ίδιο εδάφιο, ορίσαμε επίσης το *βαθμό* πίνακα ως τη κοινή διάσταση των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών. Μπορούμε τώρα να δώσουμε ένα εναλλακτικό ορισμό.

Ορισμός 7.4.2
(α) Καλούμε **βαθμό ή βαθμίδα** (rank) ή **τάξη** ενός πίνακα A και τον συμβολίζουμε με $rank(A)$ τη διάσταση της εικόνας $R(A)$ του A:

$$rank(A) \;=\; dim R(A)\,. \tag{7.33}$$

(β) Καλούμε **μηδενικότητα** (nullity) ενός πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $nullity(A)$ τη διάσταση του πυρήνα $N(A)$ του A:

$$nullity(A) \;=\; dim N(A)\,. \tag{7.34}$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας (Θ. 7.3.10), έχουμε για την απεικόνιση $f \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m)$:

$$dim\mathbf{R}^n \;=\; dimKer(f) \;+\; dimIm(f)$$

ή

$$n \;=\; dimN(A) \;+\; dimR(A)$$

ή ακόμα

$$n \;=\; nullity(A) \;+\; rank(A)\,. \tag{7.35}$$

Εφόσον η μηδενικότητα του A είναι η διάσταση του χώρου λύσεων, $N(A)$, του ομογενούς γραμμικού συστήματος Ax=0, έχουμε το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 7.4.3
Οι λύσεις του $m \times n$ ομογενούς γραμμικού συστήματος

$$Ax \;=\; 0 \tag{7.36}$$

αποτελούν γραμμικό χώρο με διάσταση

$$nullity(A) \;=\; n \;-\; rank(A)\,. \tag{7.37}$$

Παρατήρηση: Αν $rank(A)$=n, τότε $nullity(A)$=0, οπότε $N(A)$=$\{\mathbf{0}\}$. Η μηδενική λύση είναι η μοναδική λύση του Ax=0. Το σύστημα έχει μη μηδενική λύση αν και μόνο αν

$$n > rank(A)\,.$$

Το πλήθος των ελεύθερων μεταβλητών στη γενική λύση του ομογενούς συστήματος είναι ίσο με τη $nullity(A)$.

Παράδειγμα
Έστω ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -2 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 2 & 2 & 6 \\ 3 & 2 & -4 & -3 & -9 \end{bmatrix}.$$

(α) Να βρεθεί ο $rank(A)$.
(β) Να βρεθεί η $nullity(A)$.
(γ) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα $N(A)$.

Λύση
(α) Ο ανηγμένος κλιμακωτός του A είναι ο

$$R = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

Είναι φανερό ότι $rank(A)$=3.
(β) $nullity(A)$=$n - rank(A)$=$5 - 3$=2.
(γ) Το σύστημα Ax=0 είναι ισοδύναμο με το Rx=0. Έχουμε άπειρο πλήθος λύσεων με δύο ελεύθερες μεταβλητές. Θέτοντας x_3=λ και x_5=μ έχουμε τη γενική λύση:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2\lambda \\ \lambda \\ -3\mu \\ \mu \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mu \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ο πυρήνας $N(A)$ είναι ο χώρος λύσεων του συστήματος:

$$N(A) = \{x \in \mathbf{R}^5 : x = \lambda\,(0,2,1,0,0)^T + \mu\,(0,0,0,-3,1)^T ,\ \lambda, \mu \in \mathbf{R}\}.$$

Μια βάση του $N(A)$ είναι το σύνολο

$$\{(0,2,1,0,0)^T,\ (0,0,0,-3,1)^T\}.$$

$\square$

7.5 Γραμμικοί ισομορφισμοί

Σύμφωνα με το Θ. 7.1.3, μια απεικόνιση $T : V_1 \to V_2$ έχει αντίστροφη αν και μόνο αν είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Η αντίστροφη απεικόνιση $T^{-1} : V_2 \to V_1$ είναι επίσης αμφιμονοσήμαντη και επί (Θ. 7.1.4) και ισχύει:

$$y \;=\; T(x) \quad \Longleftrightarrow \quad x \;=\; T^{-1}(y)\,. \tag{7.38}$$

Ισχύουν επίσης οι

$$(T^{-1} \circ T)(x) \;=\; x \;\; \in V_1 \quad \text{και} \quad (T \circ T^{-1})(y) \;=\; y \;\; \in V_2\,. \tag{7.39}$$

Η πρόταση που ακολουθεί μας λέει ότι η αντίστροφη αντιστρέψιμης γραμμικής απεικόνισης είναι και αυτή γραμμική.

Πρόταση 7.5.1
Αν η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι αντιστρέψιμη, τότε $T^{-1} \in \mathcal{L}(V_2, V_1)$.

Απόδειξη
Χρησιμοποιούμε κατά τα γνωστά την Πρ. 7.2.2. Για τυχόντα $y_1, y_2 \in V_2$ με αντίστοιχες προ-εικόνες στον V_1 τα x_1 και x_2, έχουμε:

$$y_1 \;=\; T(x_1) \quad \Longleftrightarrow \quad x_1 \;=\; T^{-1}(y_1)\,,$$

$$y_2 \;=\; T(x_2) \quad \Longleftrightarrow \quad x_2 \;=\; T^{-1}(y_2)\,.$$

Επειδή η T είναι γραμμική, για $\lambda, \mu \in K$ ισχύει

$$T(\lambda x_1 \,+\, \mu x_2) \;=\; \lambda\, T(x_1) \,+\, \mu\, T(x_2) \;=\; \lambda y_1 \,+\, \mu y_2$$

και έτσι

$$T^{-1}(\lambda y_1 \,+\, \mu y_2) \;=\; T^{-1}(T(\lambda x_1 \,+\, \mu x_2)) \;=\; \lambda x_1 \,+\, \mu x_2 \;=\; \lambda\, T^{-1}(y_1) \,+\, \mu\, T^{-1}(y_2)\,.$$

Κατά συνέπεια, η T^{-1} είναι γραμμική. □

Ορισμός 7.5.2
Η απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι **μη ιδιάζουσα ή ομαλή** (nonsingular) αν

$$KerT \;=\; \{\mathbf{0}\}\,. \tag{7.40}$$

Διαφορετικά, θα λέμε ότι η T είναι **ιδιάζουσα ή μη ομαλή** (singular).

Έστω V γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n και έστω

$$B \;=\; \{u_1, u_2, \cdots, u_n\}\,,$$

μια βάση του. Αν $u, v \in V$, τότε αυτά γράφονται μονοσήμαντα σαν γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της βάσης B:

$$\begin{aligned} u &= a_1 u_1 + a_2 u_2 + \cdots + a_n u_n , \quad a_i \in K , \\ v &= b_1 u_1 + b_2 u_2 + \cdots + b_n u_n , \quad b_i \in K \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τα u και v στα διανύσματα

$$u_B = (a_1, a_2, \cdots, a_n) \quad \text{και} \quad v_B = (b_1, b_2, \cdots, b_n) .$$

Τα $u_B, v_B \in K^n$ είναι, ως γνωστό, τα διανύσματα των συντεταγμένων των u και v ως προς τη βάση B. Είναι φανερό ότι στο άθροισμα των u και v στον V,

$$u + v = (a_1 + b_1)\, u_1 + (a_2 + b_2)\, u_2 + \cdots + (a_n + b_n)\, u_n ,$$

μπορούμε να αντιστοιχίσουμε το άθροισμα των u_B και v_B στον K^n:

$$(u + v)_B = (a_1 + b_1,\ a_2 + b_2,\ \cdots, a_n + b_n) = u_B + v_B .$$

Κατά συνέπεια, όταν προσθέτουμε τα u και v στον V, μπορούμε να βρούμε το διάνυσμα $(u+v)_B$ που αντιστοιχεί στο άθροισμα $u+v$ στον V εκτελώντας την πρόσθεση των u_B και v_B στον K^n. Σε ανάλογο συμπέρασμα καταλήγουμε και με το βαθμωτό πολλαπλασιασμό. Αν $\lambda \in K$, τότε

$$\lambda u = (\lambda a_1) u_1 + (\lambda a_2) u_2 + \cdots + (\lambda a_n) u_n .$$

Στο βαθμωτό πολλαπλάσιο $\lambda u \in V$ αντιστοιχεί το διάνυσμα

$$(\lambda u)_B = (\lambda a_1,\ \lambda a_2,\ \cdots,\ \lambda a_n) = \lambda\, u_B .$$

Βλέπουμε ότι όταν το u πολλαπλασιάζεται με $\lambda \in K$, το αντίστοιχο διάνυσμα u_B στον K^n επίσης πολλαπλασιάζεται με $\lambda \in K$.

Οι πιο πάνω παρατηρήσεις εισηγούνται ότι οι ίσης διάστασης γραμμικοί χώροι V και K^n έχουν *ταυτόσημες γραμμικές δομές*. Η ταύτιση αυτή μας οδηγεί στην έννοια της *ισομορφίας* δύο γραμμικών χώρων.

Ορισμός 7.5.3

(α) Δυο γραμμικοί χώροι, V_1 και V_2, πάνω στο ίδιο σώμα K θα λέμε ότι είναι **γραμμικά ισόμορφοι** (isomorphic), συμβολικά

$$V_1 \simeq V_2 ,$$

αν υπάρχει αμφιμονοσήμαντη και επί γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$.
Η απεικόνιση T ονομάζεται τότε **γραμμικός ισομορφισμός** (isomorphism) **μεταξύ των V_1 και V_2**.
(β) Κάθε γραμμικός ισομορφισμός $S \in \mathcal{L}(V)$ θα λέμε ότι είναι ένας **γραμμικός αυτομορφισμός** (automorphism) **στο** V.
Κάθε αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $S \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ καλείται **γραμμικός μονομορφισμός** (monomorphism).
Κάθε επί απεικόνιση $S \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ καλείται **γραμμικός επιμορφισμός** (epimorphism).

Παρατηρήσεις

1. Είναι φανερό ότι ένας ισομορφισμός μεταξύ των V_1 και V_2 είναι ταυτόχρονα μονομορφισμός και επιμορφισμός.
2. Αν η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι ισομορφισμός, τότε είναι αντιστρέψιμη. Η αντίστροφή της $T^{-1} \in \mathcal{L}(V_2, V_1)$ είναι επίσης ισομορφισμός μεταξύ των V_1 και V_2.
3. Ο ταυτοτικός τελεστής $I \in \mathcal{L}(V)$ είναι ένας γραμμικός αυτομορφισμός στο V, αφού ο I είναι αμφιμονοσήμαντος και επί. Άρα ο V είναι ισόμορφος με τον εαυτό του (τετριμμένη περίπτωση).

Η θεωρία των προηγούμενων παραγράφων συνοψίζεται στο ακόλουθο σημαντικό θεώρημα που μας λέει ότι οι έννοιες του γραμμικού ισομορφισμού, της αντιστρέψιμης απεικόνισης και της ομαλής και επί απεικόνισης είναι ισοδύναμες με αυτή της αμφιμονοσήμαντης και επί απεικόνισης.

Θεώρημα 7.5.4

Έστω η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ όπου ο V_1 είναι πεπερασμένης διάστασης n. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i). Η T είναι αντιστρέψιμη.

(ii). Η T είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

(iii). Η T είναι επί και το σύνολο $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$, όπου $\{u_1, \cdots, u_n\}$ βάση του V_1, είναι βάση του V_2.

(iv). Η T είναι ομαλή και επί.

(v). Η T είναι γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των V_1 και V_2.

Απόδειξη

(i) $\rightarrow$ (ii): Ισχύει σύμφωνα με το Θ. 7.1.3.
(ii) $\rightarrow$ (iii): Ισχύει σύμφωνα με την Πρ. 7.3.7.
(iii) $\rightarrow$ (iv): Είναι φανερό ότι $dimV_1 = dimImT = n$. Από το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας έχουμε

$$dimKerT \;=\; dimV_1 \;-\; dimImT \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad KerT \;=\; \{\mathbf{0}\}\,.$$

Σύμφωνα με τον Ορισμό 7.5.2, η T είναι ομαλή.
(iv) $\rightarrow$ (v): Εφόσον η T είναι ομαλή, $KerT = \{\mathbf{0}\}$. Σύμφωνα με την Πρ. 7.3.7, η T είναι αμφιμονοσήμαντη. Αφού επιπλέον η T είναι επί, η T είναι γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των V_1 και V_2.
(v) $\rightarrow$ (i): Η T είναι αμφιμονοσήμαντη και επί εξ ορισμού. Σύμφωνα με το Θ. 7.1.3, η T είναι αντιστρέψιμη. □

Θεώρημα 7.5.5

Αν αμφότεροι οι V_1 και V_2 είναι πεπερασμένης διάστασης n, η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι αμφιμονοσήμαντη αν και μόνο αν είναι επί.

Απόδειξη
Αν η T είναι αμφιμονοσήμαντη, σύμφωνα με την Πρ. 7.3.7, $KerT=\{\mathbf{0}\}$. Από το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας παίρνουμε

$$dimImT = dimV_1 - dimKerT = n - 0 = dimV_2 .$$

Εφόσον η ImT είναι υπόχωρος του V_2 (Πρ. 7.3.2) και $dimImT=dimV_2$, $ImT=V_2$. Άρα η T είναι επί. Το αντίστροφο αποδεικνύεται ακολουθώντας την αντίστροφη πορεία. □

Πόρισμα
Αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης, ο $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι αμφιμονοσήμαντος αν και μόνο αν είναι επί.

Με βάση το Θεώρημα 7.5.5, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το Θ. 7.5.4 ως εξής:

Θεώρημα 7.5.6
Έστω η $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ όπου οι V_1 και V_2 είναι πεπερασμένης διάστασης n. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i). Η T είναι αντιστρέψιμη.

(ii). Η T είναι αμφιμονοσήμαντη.

(iii). Αν το σύνολο $\{u_1, \cdots, u_n\}$ είναι βάση του V_1, το σύνολο $\{T(u_1), \cdots, T(u_n)\}$ είναι βάση του V_2.

(iv). Η T είναι ομαλή.

(v). Η T είναι επί.

(vi). Η T είναι γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των V_1 και V_2.

Παρατήρηση: Είναι φανερό ότι το Θ. 7.5.6 ισχύει για κάθε γραμμικό τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$ εφόσον ο V είναι πεπερασμένης διάστασης.

Παράδειγμα
Για να δείξουμε ότι ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) = (2x_1,\ 4x_1 - x_2,\ 2x_1 + 3x_2 - x_3)$$

είναι αντιστρέψιμος, βρίσκουμε τον $KerT$. Για τα στοιχεία του τελευταίου ισχύει

$$(2x_1,\ 4x_1 - x_2,\ 2x_1 + 3x_2 - x_3) = (0,\ 0,\ 0) \quad \Longrightarrow \quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 .$$

Άρα $KerT=\{\mathbf{0}\}$. Ο T είναι ομαλός και άρα αντιστρέψιμος.

Πρόταση 7.5.7
Αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος και $T, S \in \mathcal{L}(V)$, τότε ο $S \circ T$ είναι ομαλός αν και μόνο αν οι T και S είναι ομαλοί.

Απόδειξη

Προκύπτει άμεσα από προηγούμενα θεωρήματα. Αφήνεται σαν άσκηση. □

Πρόταση 7.5.8

Αν ο V είναι πεπερασμένης διάστασης γραμμικός χώρος, $T, S \in \mathcal{L}(V)$ και ο T είναι ομαλός, τότε ισχύουν τα εξής:

(i). $Im(S \circ T)=ImS$.

(ii). $Ker(T \circ S)=KerS$.

(iii). $dimIm(T \circ S)=dimImS$.

Απόδειξη

(i). Αν $y \in Im(S \circ T)$, υπάρχει $x \in V$ τέτοιο ώστε

$$y = (S \circ T)(x) = S(T(x)) \implies y \in ImS \implies Im(S \circ T) \subseteq ImS\,.$$

Αν τώρα $y \in ImS$, τότε υπάρχει $x \in V$ τέτοιο ώστε $y=S(x)$. Ο T είναι επί αφού είναι ομαλός, οπότε υπάρχει $z \in V$ τέτοιο ώστε $x=T(x)$. Έχουμε έτσι

$$y = S(T(z)) = (S \circ T)(z) \implies y \in Im(S \circ T) \implies ImS \subseteq Im(S \circ T)\,.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $Im(S \circ T)=ImS$.

(ii). Αν $x \in KerS$, τότε $S(x)=\mathbf{0}$ και $T(S(x))=T(\mathbf{0})=\mathbf{0}$ ή $(T \circ S)(x)=\mathbf{0}$, οπότε $x \in Ker(T \circ S)$. Συνεπώς, $KerS \subseteq Ker(T \circ S)$.
Αν τώρα $x \in Ker(T \circ S)$, ισχύει $(T \circ S)(x)=\mathbf{0}$ ή $T(S(x))=\mathbf{0}$. Επειδή ο T είναι ομαλός, $S(x)=\mathbf{0}$, οπότε $x \in KerS$. Συνεπώς $Ker(T \circ S) \subseteq KerS$.
Συμπεραίνουμε ότι $Ker(T \circ S)=KerS$.

(iii). Αν n η διάσταση του V, από το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} n = dimKerS + dimImS \\ n = dimKer(T \circ S) + dimIm(T \circ S) \end{array}\right\} \implies$$

$$dimKerS + dimImS = dimKer(T \circ S) + dimIm(T \circ S)\,,$$

και λόγω του (ii)

$$dimImS = dimIm(T \circ S)\,.$$

□

Η έννοια του ισομορφισμού είναι πολύ σημαντική και θα τη μελετήσουμε περισσότερο. Παρά το ότι δύο ισόμορφοι χώροι περιέχουν γενικά διαφορετικά στοιχεία και οι αντίστοιχες πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού είναι διαφορετικές, θεωρούνται ότι είναι *ίσης μορφής* ή *ίδιοι*. Δύο ισόμορφοι χώροι, V_1 και V_2, διαφέρουν μόνο ως προς της φύση τω στοιχείων τους και **ταυτίζονται ως προς**

τη γραμμική δομή τους. Κάθε μαθηματική διαδικασία που περιέχει μόνο την πρόσθεση και το βαθμωτό πολλαπλασιασμό του V_1 μπορεί, με τη βοήθεια του γραμμικού ισομορφισμού $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, να μεταφερθεί αυτούσια στον V_2.

Ο αναγνώστης θα έχει ίσως ήδη προσέξει την *ισομορφία* που παρουσιάζουν κάποιοι γραμικοί χώροι ίσης διάστασης. Ας πάρουμε για παράδειγμα τους γραμμικούς χώρους $\mathbf{R}^4$, $\mathcal{M}_{2\times 2}$ και P_3. Οι τρεις χώροι έχουν διάσταση ίση με 4 και γενικά στοιχεία τα

$$(a_1, a_2, a_3, a_4) \in \mathbf{R}^4\ , \quad \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} \quad \text{και} \quad a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \in P_3\ .$$

Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι οι απεικονίσεις

$$\begin{aligned} T : \mathbf{R}^4 \to \mathcal{M}_{2\times 2}\ , &\quad T(a_1, a_2, a_3, a_4) = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \\ S : \mathcal{M}_{2\times 2} \to P_3\ , &\quad S\left(\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}\right) = a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3 \\ F : P_3 \to \mathbf{R}^4\ , &\quad F(a_1 + a_2 x + a_3 x^2 + a_4 x^3) = (a_1, a_2, a_3, a_4) \end{aligned}$$

καθώς και οι αντίστροφές τους είναι γραμμικοί ισομορφισμοί μεταξύ των αντίστοιχων χώρων.

Όπως φαίνεται στο θεώρημα που ακολουθεί αναγκαία και ικανή συνθήκη για να είναι δύο πεπερασμενοδιάστατοι γραμμικοί χώροι ισόμορφοι είναι αυτοί να έχουν ίσες διαστάσεις.

Πρόταση 7.5.9

Δύο πεπερασμενοδιάστατοι γραμμικοί χώροι είναι ισόμορφοι όταν και μόνο όταν έχουν ίσες διαστάσεις.

Απόδειξη

Έστω οι πεπερασμενοδιάστατοι γραμμικοί χώροι V_1 και V_2. Αν αυτοί είναι ισόμορφοι, τότε εξ ορισμού υπάρχει μια αμφιμονοσήμαντη και επί απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$. Επειδή η T είναι αμφιμονοσήμαντη, $KerT = \{\mathbf{0}\}$ (Θ. 7.3.6), και επειδή η T είναι επί, $ImT = V_2$. Από το θεώρημα βαθμού και μηδενικότητας έχουμε,

$$dimV_1 = dimKerT + dimImT = 0 + dimV_2 = dimV_2\ .$$

Για το αντίστροφο, έστω ότι οι V_1 και V_2 έχουν διάσταση n, και βάσεις τα σύνολα

$$A = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\} \quad \text{και} \quad B = \{y_1, y_2, \cdots, y_n\}\ ,$$

αντίστοιχα. Για να δείξουμε ότι οι V_1 και V_2 είναι ισόμορφοι, αρκεί να βρούμε μια γραμμική απεικόνιση $T : V_1 \to V_2$ που να είναι επί (επειδή $dimV_1 = dimV_2$, βλ. Θ. 7.5.6.). Κάθε στοιχείο $x \in V_1$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n\ , \quad a_i \in K\ .$$

Ορίζουμε την απεικόνιση $T : V_1 \to V_2$ με τύπο

$$T(x) = a_1 y_1 + a_2 y_2 + \cdots + a_n y_n .$$

Είναι φανερό ότι για i=1,2,$\cdots$,n, ισχύει

$$T(x_i) = T(1\, x_i) = y_i .$$

Η T είναι η γραμμική απεικόνιση που συναντήσαμε στο Θ. 7.2.3. Μένει να δείξουμε ότι η T είναι επί. Κάθε $y \in V_2$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή

$$y = b_1 y_1 + b_2 y_2 + \cdots + b_n y_n , \quad b_i \in K ,$$

αφού το B είναι βάση του V_2. Σύμφωνα με τον ορισμό της T, για

$$x = b_1 x_1 + b_2 x_2 + \cdots + b_n x_n ,$$

ισχύει y=$T(x)$. Συνεπώς T είναι επί και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Παρατήρηση: Στην τετριμμένη περίπτωση που είναι $dimV_2$=0 ή/και $dimV_1$=0, η ζητούμενη γραμμική απεικόνιση είναι η μηδενική. □

Πόρισμα 1
Κάθε γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n είναι γραμμικά ισόμορφος με τον K^n.

Το Πόρισμα 1 είναι ιδιαίτερα χρήσιμο. Μας δίνει τη δυνατότητα να εξαγάγουμε συμπεράσματα για τις γραμμικές ιδιότητες τυχόντος γραμμικού χώρου V με διάσταση n, μελετώντας τις αντίστοιχες ιδιότητες του K^n που είναι πιο οικείος και προσιτός. Θα πρέπει πάντως να αναφέρουμε ότι η μελέτη του λιγότερο αφηρημένου K^n, παρόλο που είναι χρήσιμη και διαφωτιστική, δεν είναι πάντα η καλύτερη λύση. Η μελέτη του V παρουσιάζει μερικές φορές πλεονεκτήματα και μπορεί να οδηγήσει σε κομψότερες και συντομότερες αποδείξεις.

Πόρισμα 2
Έστω V, W και U γραμμικοί χώροι πεπερασμένης διάστασης. Αν $V \simeq W$ και $W \simeq U$, τότε $V \simeq U$.

Πόρισμα 3
Η σχέση ισομορφίας $\simeq$ είναι σχέση ισοδυναμίας.

Παραδείγματα

1. Έστω V πραγματικός γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n. Σύμφωνα με το Πόρισμα 1, αυτός είναι ισόμορφος με τον $\mathbf{R}^n$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό ισομορφισμό μεταξύ των V και $\mathbf{R}^n$, δηλαδή μια γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V, \mathbf{R}^n)$ που είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.

   Αν το σύνολο
   $$B = \{x_1, x_2, \cdots, x_n\}$$
   είναι βάση του V, τότε κάθε $x \in V$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή
   $$x = a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n , \quad a_i \in K .$$
   Η απεικόνιση $T_B : V \to \mathbf{R}^n$ με τύπο
   $$T_B(x) = (a_1, a_2, \cdots, a_n)$$
   αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι γραμμική, αμφιμονοσήμαντη και επί.

2. Είναι φανερό από το προηγούμενο παράδειγμα ότι η απεικόνιση $X_B : V \to \mathcal{M}_{n\times1}$ με τύπο
   $$X_B(x) = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$
   είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των V και $\mathcal{M}_{n\times1}$. Ο πίνακας $X_B(x)$ καλείται **πίνακας στήλης του διανύσματος** x **ως προς τη βάση** B **του** V.

3. Ο γραμμικός χώρος των συμμετρικών 2×2 πινάκων
   $$S_{2\times2} = \left\{ A \in M_{2\times2} \ : \ A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix} , \quad a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$
   έχει διάσταση ίση με 3, και συνεπώς είναι ισόμορφος με τον $\mathbf{R}^3$. Μια βάση του $S_{2\times2}$ είναι η
   $$E = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\} .$$
   Ο πίνακας στήλης του
   $$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \in S_{2\times2}$$
   ως προς τη βάση E είναι ο
   $$X_E(A) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix} .$$

7.6 Πίνακας γραμμικής απεικόνισης

Σύμφωνα με το Θ. 7.2.5, αν οι V_1 και V_2 είναι πεπερασμένων διαστάσεων γραμμικοί χώροι με

$$dimV_1 = n \quad \text{και} \quad dimV_2 = m$$

τότε

$$dim\mathcal{L}(V_1, V_2) = mn\,. \tag{7.43}$$

Επειδή

$$dim\mathcal{M}_{m\times n} = mn\,, \tag{7.44}$$

ο $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ είναι γραμμικά ισόμορφος με τον $\mathcal{M}_{m\times n}$ (Θ. 7.5.9). Αυτό σημαίνει ότι σε κάθε απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα πίνακα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, μέσω μιας γραμμικής, αμφιμονοσήμαντης και επί απεικόνισης $f \in \mathcal{L}[\mathcal{L}(V_1, V_2), \mathcal{M}_{m\times n}]$:

$$f(T) = A_T \in \mathcal{M}_{m\times n}\,, \quad T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)\,. \tag{7.45}$$

Στη συνέχεια θα βρούμε την f και έτσι θα δείξουμε εκ νέου ότι οι $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ και $\mathcal{M}_{m\times n}$ είναι γραμμικά ισόμορφοι. Θα έχουμε έτσι δώσει μια εναλλακτική απόδειξη του Θ. 7.2.5. Στόχος μας δεν είναι βέβαια να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος αλλά να δούμε πώς κατασκευάζουμε τον πίνακα A_T και πώς αυτός εξαρτάται από τις χρησιμοποιούμενες βάσεις των V_1 και V_2. Επιπλέον θα δούμε πώς μπορούμε να βρούμε τη γραμμική απεικόνιση που αντιστοιχεί σε δοσμένο πίνακα.

Έστω οι διατεταγμένες βάσεις

$$U = \{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n\} \quad \text{και} \quad W = \{w_1,\, w_2,\, \cdots,\, w_m\} \tag{7.46}$$

των V_1 και V_2, αντίστοιχα. Εκφράζουμε τις εικόνες των στοιχείων της βάσης U σαν γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της βάσης W του V_2:

$$\begin{array}{rcl} T(u_1) & = & a_{11}\,w_1 + a_{21}\,w_2 + \cdots + a_{m1}\,w_m \\ T(u_2) & = & a_{12}\,w_1 + a_{22}\,w_2 + \cdots + a_{m2}\,w_m \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\ T(u_n) & = & a_{1n}\,w_1 + a_{2n}\,w_2 + \cdots + a_{mn}\,w_m \end{array} \tag{7.47}$$

ή

$$T(u_i) = \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\,w_j\,, \quad i = 1, 2, \cdots, n\,. \tag{7.48}$$

Ορίζουμε τώρα τον A_T, ως τον $m \times n$ πίνακα που έχει σαν στήλες τις συντεταγμένες των $T(u_1), \cdots, T(u_n)$ ως προς τη βάση W. Έτσι οι στήλες του A_T είναι οι πίνακες στήλης των $T(u_1), \cdots, T(u_n)$ ως προς τη βάση W:

$$A_T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = (a_{ij})_{m\times n}\,. \tag{7.49}$$

Έχουμε έτσι ορίσει μια απεικόνιση $f : \mathcal{L}(V_1, V_2) \to \mathcal{M}_{m\times n}$. Η f είναι γραμμική αφού ικανοποιεί τις δύο συνθήκες του Ορ. 7.2.1:

(i). Αν $S \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και

$$S(u_i) \;=\; \sum_{j=1}^{m} b_{ji}\, w_j\;, \quad i = 1, 2, \cdots, n\;,$$

τότε

$$A_S \;=\; (b_{ij})_{m\times n}\;.$$

Παρατηρούμε ότι

$$(T+S)(u_i) \;=\; \sum_{j=1}^{m} (a_{ji} + b_{ji})\, w_j\;, \quad i = 1, 2, \cdots, n\;,$$

και έτσι ο πίνακας A_{T+S} του αθροίσματος $(T+S)$ είναι ο

$$A_{T+S} \;=\; (a_{ij} + b_{ij})_{m\times n} \;=\; (a_{ij})_{m\times n} \;+\; (b_{ij})_{m\times n} \;=\; A_T \;+\; A_S\;.$$

(ii). Για $\lambda \in K$, έχουμε

$$(\lambda T)(u_i) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \lambda\, a_{ji}\, w_j\;, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

και

$$A_{\lambda T} \;=\; (\lambda\, a_{ij})_{m\times n} \;=\; \lambda\, (a_{ij})_{m\times n} \;=\; \lambda\, A_T\;.$$

Στη συνέχεια θα δείξουμε η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί. Είναι αρκετά βοηθητικό να δούμε πρώτα πώς συνδέεται η εικόνα

$$y \;=\; T(x) \tag{7.50}$$

τυχόντος $x \in V_1$ με τον πίνακα A_T. Τά x και y είναι γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων των βάσεων U και W, αντίστοιχα:

$$x \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i \tag{7.51}$$

και

$$y \;=\; \sum_{i=1}^{m} y_i\, w_i\;. \tag{7.52}$$

Έστω ακόμα

$$X_U \;=\; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \tag{7.53}$$

και

$$Y_W \;=\; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix} \tag{7.54}$$

οι πίνακες στήλης των x και y ως προς τις βάσεις U και W, αντίστοιχα. Έχουμε τώρα:

$$y \;=\; T(x) \;=\; T\left(\sum_{i=1}^{n} x_i\, u_i\right) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i\, T(u_i) \;=\; \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{m} a_{ji}\, w_j \quad\Longrightarrow$$

$$y \;=\; \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i\right) w_j\,. \tag{7.55}$$

Παρατηρούμε ότι

$$Y_W \;=\; \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i\right)_{m\times 1} \tag{7.56}$$

ή ακόμα

$$Y_W \;=\; A_T\, X_U\,. \tag{7.57}$$

Η f είναι αμφιμονοσήμαντη αφού αν είναι $A_T{=}A_S$ τότε από την (7.55) έχουμε για κάθε $x \in V_1$

$$T(x) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i\right) w_j \;=\; S(x)\,.$$

Επιπλέον, η f είναι επί αφού σε κάθε $m\times n$ πίνακα $A{=}(a_{ij})$ μπορούμε να ορίσουμε την απεικόνιση

$$T(x) \;=\; \sum_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ji}\, x_i\right) w_j\,.$$

Η απόδειξη του ότι η T είναι γραμμική είναι απλή.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι η f είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των $\mathcal{L}(V_1, V_2)$ και $\mathcal{M}_{m\times n}$ (βλ. Ορ. 7.5.3) και συνεπώς οι δύο αυτοί χώροι είναι ισόμορφοι. Σύμφωνα με την Πρ. 7.5.9,

$$dim\mathcal{L}(V_1, V_2) \;=\; dim\mathcal{M}_{m\times n} \;=\; mn\,.$$

Έχουμε έτσι μια εναλλακτική απόδειξη του Θ. 7.2.5.

Παρατηρήσεις

1. Ο πίνακας A_T συμβολίζεται πιο αυστηρά με $(A_T)_U^W$ και καλείται **πίνακας της γραμμικής απεικόνισης** T **ως προς τις βάσεις** U **και** W. Στην βιβλιογραφία συναντούμε άλλους ισοδύναμους συμβολισμούς όπως οι

   $${}_U A_W \quad \text{και} \quad {}_U(T)_W\,.$$

   Χάριν απλότητας, στη συνέχεια θα παραλείπουμε συχνά τους δείκτες U και W.

2. Στην περίπτωση του χώρου $\mathcal{L}(V)$ όπου ο V είναι πεπερασμένης διάστασης n, μπορούμε να επιλέξουμε δύο διαφορετικές βάσεις U και W του V για να βρούμε τον $n\times n$ πίνακα $(A_T)_U^W$ ενός τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$. Αν $W{=}U$, ο πίνακας $(A_T)_U^U$ καλείται **πίνακας του γραμμικού τελεστή** T **ως προς τη βάση** U.

3. Οι χώροι $\mathcal{L}(V)$, όπου $dimV{=}n \in \mathbf{N}$, και $\mathcal{M}_{n\times n}$ είναι γραμμικά ισόμορφοι. Οι χώροι αυτοί είναι επίσης *γραμμικές άλγεβρες*, ο $\mathcal{L}(V)$ ως προς τη σύνθεση απεικονίσεων και ο $\mathcal{M}_{n\times n}$ ως προς τον πολλαπλασιασμό πινάκων. Στα επόμενα θα δούμε ότι οι δύο αυτοί είναι και **αλγεβρικά ισόμορφοι** (οι αλγεβρικές τους δομές ταυτίζονται).

Πριν δώσουμε παραδείγματα, συνοψίζουμε τα βήματα που ακολουθούμε προκειμένου να βρούμε τον πίνακα $(A_T)_U^W$ μιας γραμμικής απεικόνισης $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, όπου V_1 και V_2 πεπερασμενοδιάστατοι γραμμικοί χώροι, ως προς τις διατεταγμένες βάσεις

$$U = \{u_1, u_2, \cdots, u_n\} \quad \text{και} \quad W = \{w_1, w_2, \cdots, w_m\} \tag{7.58}$$

των V_1 και V_2, αντίστοιχα:

1. Βρίσκουμε τις εικόνες $T(u_i)$, i=1,2,$\cdots,n$ των στοιχείων της βάσης U του V_1.
2. Εκφράζουμε τις $T(u_i)$, i=1,2,$\cdots,n$ σαν γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της βάσης W του V_2 [Εξ. (7.47)].
3. Κατασκευάζουμε τον $(A_T)_U^W$. Αυτός έχει ως στήλες τα διανύσματα των συντεταγμένων των $T(u_i)$ ως προς τη βάση W.

Παράδειγμα 1
Έστω η απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) = (3x_1 + 2x_2 - 4x_3,\ x_1 - 5x_2 + 3x_3)\,,$$

η συνήθης βάση

$$E = \{e_1 = (1,0,0),\ e_2 = (0,1,0),\ e_3 = (0,0,1)\}$$

και η βάση

$$U = \{u_1 = (1,1,1),\ u_2 = (1,1,0),\ u_3 = (1,0,0)\}$$

του $\mathbf{R}^3$, και η συνήθης βάση

$$F = \{e'_1 = (1,0),\ e'_2 = (0,1)\}$$

και η βάση

$$W = \{w_1 = (1,3),\ w_2 = (2,5)\}$$

του $\mathbf{R}^2$.
(α) Να βρεθεί ο πίνακας $(A_T)_E^F$ της T ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$.
(β) Να βρεθεί ο πίνακας $(A_T)_U^W$ της T ως προς τις βάσεις U και W.
(γ) Να βρεθεί ο πίνακας $(A_T)_E^W$ της T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$ και τη βάση W του $\mathbf{R}^2$.
(δ) Να βρεθεί ο πίνακας $(A_T)_U^F$ της T ως προς τη βάση U του $\mathbf{R}^3$ και τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$.

Λύση
(α) Βρίσκουμε τις εικόνες των στοιχείων της βάσης E:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (3,\ 1) = 3e'_1 + e'_2 \\ T(e_2) &= (2,\ -5) = 2e'_1 - 5e'_2 \\ T(e_3) &= (-4,\ 3) = -4e'_1 + 3e'_2 \end{aligned}$$

Συνεπώς

$$(A_T)_E^F = \begin{bmatrix} 3 & 2 & -4 \\ 1 & -5 & 3 \end{bmatrix}.$$

(β) Βρίσκουμε τις εικόνες των στοιχείων της βάσης U:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= (1,\ -1) \\ T(u_2) &= (5,\ -4) \\ T(u_3) &= (3,\ 1) \end{aligned}$$

Θα γράψουμε το γενικό στοιχείο $(y_1, y_2) \in \mathbf{R}^2$ σαν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης W. Αν

$$(y_1, y_2) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = (\lambda_1 + 2\lambda_2,\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2) \implies$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= y_1 \\ 3\lambda_1 + 5\lambda_2 &= y_2 \end{aligned}\right\} \implies \left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -5y_1 + 2y_2 \\ \lambda_2 &= 3y_1 - y_2 \end{aligned}\right\}$$

Έτσι για τις $T(u_i)$, i=1,2,3, παίρνουμε:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= -7\, w_1 + 4\, w_2 \\ T(u_2) &= -33\, w_1 + 19\, w_2 \\ T(u_3) &= -13\, w_1 + 8\, w_2 \end{aligned}$$

Άρα

$$(A_T)_U^W = \begin{bmatrix} -7 & -33 & -13 \\ 4 & 19 & 8 \end{bmatrix}.$$

(γ) Εκφράζουμε τις εικόνες $T(e_i)$, i=1,2,3, σαν γραμμικούς συνδυασμούς των στοιχείων της βάσης W:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (3,\ 1) = 13\, w_1 + 8\, w_2 \\ T(e_2) &= (2,\ -5) = -20\, w_1 + 11\, w_2 \\ T(e_3) &= (-4,\ 3) = 26\, w_1 - 15\, w_2 \end{aligned}$$

Άρα

$$(A_T)_E^W = \begin{bmatrix} 13 & -20 & 26 \\ 8 & 11 & -15 \end{bmatrix}.$$

(δ) Οι εικόνες των στοιχείων της βάσης U γράφονται εύκολα σαν γραμμικοί συνδυασμοί των στοιχείων της συνήθους βάσης του $\mathbf{R}^2$:

$$\begin{aligned} T(u_1) &= (1,\ -1) = e_1' - e_2' \\ T(u_2) &= (5,\ -4) = 5\, e_1' - 4\, e_2' \\ T(u_3) &= (3,\ 1) = 3\, e_1' + e_2' \end{aligned}$$

Άρα

$$(A_T)_U^F = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 3 \\ -1 & -4 & 1 \end{bmatrix}.$$

Παράδειγμα 2

Έστω η απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, όπου $dim V_1$=3 και $dim V_2$=2. Αν οι U=$\{u_1, u_2, u_3\}$ και W=$\{w_1, w_2\}$ είναι διατεταγμένες βάσεις των V_1 και V_2, αντίστοιχα, και

$$\begin{aligned} T(u_1) &= 3\, w_1 + w_2 \\ T(u_2) &= -2\, w_1 + 3\, w_2 \\ T(u_3) &= w_1 - 2\, w_2 \end{aligned}$$

τότε

$$(A_T)_U^W \;=\; \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}.$$

Έστω τώρα το στοιχείο $x{=}2u_1+u_2-u_3 \in V_1$. Μπορούμε να βρούμε την εικόνα του $T(x)$ με δύο τρόπους.

<u>*1ος τρόπος*</u>
Χρησιμοποιούμε τη σχέση (7.57):

$$Y_W \;=\; \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \;=\; A_T\,X_U \;=\; \begin{bmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 3 \\ 7 \end{bmatrix}$$

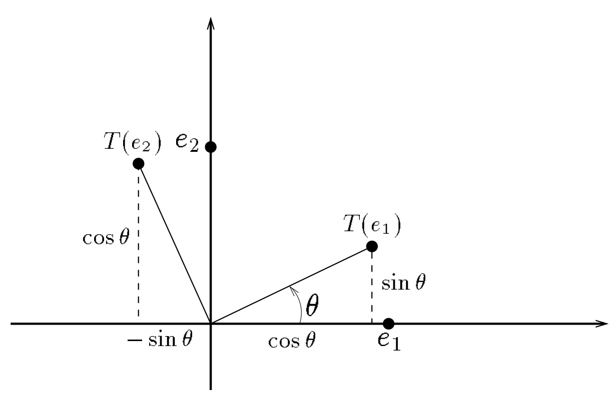
Άρα

$$y \;=\; T(x) \;=\; 3\,w_1 \;+\; 7\,w_2\,.$$

<u>*2ος τρόπος*</u>

$$\begin{aligned} y \;=\; T(x) \;=\; T(2\,u_1+u_2-u_3) \;=\; 2\,T(u_1) \;+\; T(u_2) \;-\; T(u_3) \quad &\Longrightarrow \\ y \;=\; 2\,(3\,w_1 \;+\; w_2) \;+\; (-2\,w_1 \;+\; 3\,w_2) \;-\; (w_1 \;-2\,w_2) \quad &\Longrightarrow \\ y \;=\; T(x) \;=\; 3\,w_1 \;+\; 7\,w_2\,. \end{aligned}$$

Παράδειγμα 3
Η με τη θετική φορά στροφή των σημείων του επιπέδου κατά γωνία θ γύρω από την αρχή αποδεικνύεται ότι είναι γραμμικός τελεστής, $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$. Θα βρούμε πρώτα τον πίνακα του T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$ και στη συνέχεια τον τύπο του.



Από το σχήμα, εύκολα βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} T(e_1) &\;=\; (\cos\theta,\,\sin\theta) \;=\; \cos\theta\,e_1 \;+\; \sin\theta\,e_2 \\ T(e_2) &\;=\; (-\sin\theta,\,\cos\theta) \;=\; -\sin\theta\,e_1 \;+\; \cos\theta\,e_2 \end{aligned}$$

Άρα ο πίνακας του T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$ είναι ο

$$A_T \;=\; \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τον τύπο του T. Για το $(x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2$, έχουμε

$$Y \;=\; A_T\, X \;=\; \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} \cos\theta\, x_1 \;-\; \sin\theta\, x_2 \\ \sin\theta\, x_1 \;+\; \cos\theta\, x_2 \end{bmatrix}$$

Συνεπώς

$$T(x_1, x_2) \;=\; (\cos\theta\, x_1 \;-\; \sin\theta\, x_2,\; \sin\theta\, x_1 \;+\; \cos\theta\, x_2)\,.$$

Παράδειγμα 4

Στο παράδειγμα αυτό προσδιορίζουμε μια γραμμική απεικόνιση από τον πίνακά της ως προς δοσμένες βάσεις. Αν ο πίνακας της $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ ως προς τη συνήθη βάση U του $\mathbf{R}^2$ και τη βάση

$$W \;=\; \{w_1 = (1,1,1),\; w_2 = (0,1,1),\; w_3 = (0,0,1)\}$$

του $\mathbf{R}^3$, είναι ο

$$(A_T)_U^W \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,,$$

τότε

$$Y_W \;=\; (A_T)_U^W\, X_U \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} x_1 \\ 2\,x_1 \;+\; x_2 \\ x_2 \end{bmatrix}\,.$$

Άρα

$$T(x_1, x_2) = x_1 w_1 + (2x_1 + x_2) w_2 + x_2 w_3 = x_1(1,1,1) + (2x_1 + x_2)(0,1,1) + x_2(0,0,1) \quad \Longrightarrow$$

$$T(x_1, x_2) \;=\; (x_1,\; 3x_1 + x_2,\; 3x_1 + 2x_2)\,.$$

Παράδειγμα 5

Έστω η $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ της οποίας ο πίνακας ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^4$ είναι ο

$$A_T \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix}\,.$$

Η τιμή της T στο $(1, 2, -4)$ μπορεί να βρεθεί από την

$$Y_W \;=\; A_T\, X \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \\ -1 & -5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ -7 \\ 6 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow$$

$$T(1, 2, -4) \;=\; (2, 7, -7, 6)\,.$$

Πρόταση 7.6.1
Έστω V_1, V_2 και V_3 γραμμικοί χώροι πεπερασμένων διαστάσεων n, m και l, αντίστοιχα, και αντίστοιχες διατεταγμένες βάσεις τις

$$U = \{u_1, \cdots, u_n\}, \quad W = \{w_1, \cdots, w_m\} \quad \text{και} \quad V = \{v_1, \cdots, w_l\}.$$

Αν $S \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και $T \in \mathcal{L}(V_2, V_3)$, τότε

$$(A_{T\circ S})_U^V = (A_T)_W^V (A_S)_U^W . \tag{7.59}$$

Απόδειξη
Αν είναι $A_T{=}(a_{ij})_{l\times m}$, $A_S{=}(b_{ij})_{m\times n}$ και $A_{T\circ S}{=}(c_{ij})_{l\times n}$, πρέπει να δείξουμε ότι

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj} . \tag{i}$$

Από την Εξ. (7.48), γνωρίζουμε ότι

$$S(u_j) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\, w_k , \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{ii}$$

και

$$T(w_k) = \sum_{i=1}^{l} a_{ik}\, v_i , \quad k = 1, 2, \cdots, m . \tag{iii}$$

Για $j = 1, 2, \cdots, n$ έχουμε

$$(T \circ S)(u_j) = T(S(u_j)) = T\left(\sum_{k=1}^{m} b_{kj}\, w_k\right) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj}\, T(w_k) = \sum_{k=1}^{m} b_{kj} \left(\sum_{i=1}^{l} a_{ik}\, v_i\right) \implies$$

$$(T \circ S)(u_j) = \sum_{i=1}^{l} \left(\sum_{k=1}^{m} a_{ik}\, b_{kj}\right) v_i , \quad j = 1, 2, \cdots, n . \tag{iv}$$

Από την Εξ. (7.48) έχουμε επίσης:

$$(T \circ S)(u_j) = \sum_{i=1}^{l} c_{ij}\, v_i , \quad j = 1, 2, \cdots, n . \tag{v}$$

Από τις (iv) και (v) προκύπτει αμέσως η (i). □

Παράδειγμα
Αν οι πίνακες των $S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^4)$ και $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^2)$ ως προς τις συνήθεις βάσεις των αντίστοιχων χώρων είναι οι

$$A_S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A_T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

τότε ο πίνακας της $(T \circ S) \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, \mathbf{R}^2)$ ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$ είναι ο

$$A_{T\circ S} \;=\; A_T\, A_S \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 4 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} -5 & 3 & 16 \\ 2 & 4 & -5 \end{bmatrix}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει το αποτέλεσμα βρίσκοντας πρώτα τους τύπους των απεικονίσεων T και S, και μετά τη σύνθεσή τους $T \circ S$ και τον πίνακά της ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση της σύνθεσης τελεστών, δηλαδή των στοιχείων μιας άλγεβρας, $\mathcal{L}(V)$. Γι'αυτό το λόγο επαναδιατυπώνουμε την Πρ. 7.6.1.

Πόρισμα 7.6.2
Αν $T, S \in \mathcal{L}(V)$, όπου V πεπερασμενοδιάστατος χώρος, τότε

$$A_{T\circ S} \;=\; A_T\, A_S\,, \tag{7.60}$$

όπου $A_{T\circ S}$, A_T και A_S οι πίνακες των αντίστοιχων τελεστών ως προς μια διατεταγμένη βάση του V.

Σύμφωνα με το Πόρισμα 7.6.2, ο γραμμικός ισομορφισμός $f \in \mathcal{L}[\mathcal{L}(V), \mathcal{M}_{n\times n}]$, όπου

$$f(T) \;=\; A_T\,, \quad T \in \mathcal{L}(V)\,, \tag{7.61}$$

έχει την ιδιότητα

$$f(T \circ S) \;=\; f(T)\, f(S)\,. \tag{7.62}$$

Ένας γραμμικός ισομορφισμός μεταξύ των δύο αλγεβρών (στην προκείμενη περίπτωση οι δύο άλγεβρες είναι οι $\mathcal{L}(V)$ και $\mathcal{M}_{n\times n}$) που έχει την ιδιότητα αυτή καλείται **αλγεβρικός ισομορφισμός**. Οι δύο άλγεβρες λέμε ότι είναι **αλγεβρικά ισόμορφες**. Έτσι ισχύει η πιο κάτω πρόταση.

Πρόταση 7.6.3
Αν ο V είναι γραμμικός χώρος πεπερασμένης διάστασης n, τότε η απεικόνιση

$$f \in \mathcal{L}[\mathcal{L}(V), \mathcal{M}_{n\times n}] \quad \text{με} \quad f(T) \;=\; A_T\,, \quad T \in \mathcal{L}(V)\,, \tag{7.63}$$

όπου A_T ο πίνακας του T ως προς μια διατεταγμένη βάση του V, είναι ένας αλγεβρικός ισομορφισμός μεταξύ των αλγεβρών $\mathcal{L}(V)$ και $\mathcal{M}_{n\times n}$.

Ο αλγεβρικός ισομορφισμός f μας επιτρέπει να **ταυτίσουμε τις αλγεβρικές δομές των $\mathcal{L}(V)$ και** $\mathcal{M}_{n\times n}$, αφού κάθε μαθηματική διαδικασία που περιέχει μόνο πολλαπλασιασμό, πρόσθεση και βαθμωτό πολλαπλασιασμό στην άλγεβρα $\mathcal{L}(V)$ μπορεί αυτούσια να μεταφερθεί στην άλγεβρα $\mathcal{M}_{n\times n}$. Έτσι στην άλγεβρα $\mathcal{L}(V)$ ισχύει $3(T\circ S)-4R{=}T$, αν και μόνο αν στην άλγεβρα $\mathcal{M}_{n\times n}$ ισχύει $3A_T A_S - 4A_R{=}A_T$.

Λόγω του ότι οι $\mathcal{L}(V)$ και $\mathcal{M}_{n\times n}$ είναι αλγεβρικά ισόμορφοι, στην άλγεβρα $\mathcal{L}(V)$ ισχύει

$$T \circ S \;=\; S \circ T \;=\; I\,, \quad T, S \in \mathcal{L}(V)$$

αν και μόνο αν στην άλγεβρα $\mathcal{M}_{n\times n}$ ισχύει

$$A_T\, A_S \;=\; A_S\, A_T \;=\; I\,, \quad A_T, A_S \in \mathcal{M}_{n\times n}\,.$$

Αυτό σημαίνει ότι ο $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι αντιστρέψιμος (ή, ισοδύναμα, ισομορφισμός) αν και μόνο αν ο πίνακάς του A_T ως προς οποιεσδήποτε βάσεις του V είναι αντιστρέψιμος. Έχουμε έτσι την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.6.4
Ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου V πεπερασμενοδιάστατος χώρος, είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν ο πίνακάς του A_T ως προς οποιεσδήποτε βάσεις του V είναι αντιστρέψιμος.

Πόρισμα 7.6.5
Αν $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$, τότε οι $AB{=}I$ και $BA{=}I$ είναι ισοδύναμες.

Παρατήρηση: Το Πόρισμα 7.6.5 μας λέει ότι για να δείξουμε ότι ο B είναι αντίστροφος του $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει μια από τις $AB{=}I$ και $BA{=}I$.

Παράδειγμα
Έστω ο τελεστής $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) \;=\; (x_1 - x_3,\; x_1 + x_3,\; x_2)\,.$$

(α) Να δειχθεί ότι ο T είναι αντιστρέψιμος.
(β) Να βρεθεί ο T^{-1}.
(γ) Να βρεθούν οι πίνακες A κια B των T και T^{-1}, αντίστοιχα, ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$.
(δ) Να δειχθεί ότι $B{=}A^{-1}$.

Λύση
(α) Αρκεί να δείξουμε ότι ο T είναι ομαλός, δηλ. $KerT{=}\{\mathbf{0}\}$ (Θ. 7.5.6). Αν $T(x_1, x_2, x_3){=}\mathbf{0}$, τότε

$$(x_1 - x_3,\; x_1 + x_3,\; x_2) \;=\; (0,\; 0,\; 0) \quad\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 &=& 0 \\ x_1 + x_3 &=& 0 \\ x_2 &=& 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad x_1 = x_2 = x_3 = 0 \quad\Longrightarrow\quad KerT \;=\; \{\mathbf{0}\}\,.$$

Άρα ο T είναι αντιστρέψιμος.
(β) Αν

$$T(x_1, x_2, x_3) \;=\; (y_1, y_2, y_3)$$

τότε

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3) \;=\; (x_1, x_2, x_3)\,. \tag{i}$$

Επειδή

$$(x_1 - x_3,\; x_1 + x_3,\; x_2) \;=\; (y_1,\; y_2,\; y_3) \quad\Longrightarrow$$

$$\left.\begin{array}{rcl} x_1 - x_3 & = & y_1 \\ x_1 + x_3 & = & y_2 \\ x_2 & = & y_3 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow$$

$$x_1 \;=\; \frac{y_1 + y_2}{2}\,, \quad x_2 \;=\; y_3 \quad \text{και} \quad x_3 \;=\; \frac{y_2 - y_1}{2}\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε τον αντίστροφο τελεστή:

$$T^{-1}(y_1, y_2, y_3) \;=\; \left(\frac{y_1 + y_2}{2},\; y_3,\; \frac{y_2 - y_1}{2}\right)\,.$$

(γ)

$$\left.\begin{array}{rcl} T(e_1) & = & (1,\,1,\,0) \\ T(e_2) & = & (0,\,0,\,1) \\ T(e_3) & = & (-1,\,1,\,0) \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

$$\left.\begin{array}{rcl} T^{-1}(e_1) & = & (1/2,\,0,\,-1/2) \\ T^{-1}(e_2) & = & (1/2,\,0,\,1/2) \\ T^{-1}(e_3) & = & (0,\,1,\,0) \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad B \;=\; \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1/2 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}.$$

(δ)

$$A\,B \;=\; \begin{bmatrix} 1/2 + 1/2 & 1/2 - 1/2 & 0 \\ 1/2 - 1/2 & 1/2 + 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; I_3\,.$$

Πραγματικά, $B{=}A^{-1}$. □

7.7 Πίνακας αλλαγής βάσης

Έστω V n-διάστατος γραμμικός χώρος και δύο διατεταγμένες βάσεις του

$$B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{και} \quad B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\} .$$

Θέλουμε να βρούμε τη σχέση που συνδέει τους πίνακες στήλης ενός στοιχείου x του V ως προς τις βάσεις B_1 και B_2:

$$X_{B_1} = \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X_{B_2} = \begin{bmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \\ \vdots \\ \mu_n \end{bmatrix} \tag{7.64}$$

με

$$x = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \, u_i \, , \quad \lambda_i \in K \tag{7.65}$$

και

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, v_i \, , \quad \mu_i \in K \, . \tag{7.66}$$

Με διαφορετικά λόγια, θέλουμε να βρίσκουμε τις συντεταγμένες ενός διανύσματος $x \in V$ ως προς μια βάση του V, όταν είναι γνωστές οι συντεταγμένες του ως προς μια άλλη βάση του V.

Για να προσδιορίσουμε τα $\lambda_1, \cdots, \lambda_n$ από τα $\mu_1, \cdots, \mu_n$, εκφράζουμε κάθε στοιχείο της βάσης B_2 σαν γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης B_1:

$$\begin{array}{lcl} v_1 & = & a_{11}\, u_1 + a_{12}\, u_2 + \cdots + a_{1n}\, u_n \\ v_2 & = & a_{21}\, u_1 + a_{22}\, u_2 + \cdots + a_{2n}\, u_n \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad\quad \vdots \\ v_n & = & a_{n1}\, u_1 + a_{n2}\, u_2 + \cdots + a_{nn}\, u_n \end{array} \tag{7.67}$$

ή συνοπτικά

$$v_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, u_j \, , \quad i = 1, 2, \cdots, n \, . \tag{7.68}$$

Έτσι για το $x \in V$ παίρνουμε:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \, v_i = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \, u_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, \mu_i \right) u_j \tag{7.69}$$

Από τις (7.65) και (7.69) συνάγεται ότι

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij} \, \mu_i = \lambda_j \, , \quad j = 1, 2, \cdots, n \tag{7.70}$$

ή

$$P \, X_{B_2} = X_{B_1} \, , \tag{7.71}$$

όπου

$$P = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}. \tag{7.72}$$

Ορισμός 7.7.1
Αν οι

$$B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{και} \quad B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}.$$

είναι διατεταγμένες βάσεις του n-διάστατου χώρου V, τότε ο πίνακας P που έχει ως στήλες τις συντεταγμένες των στοιχείων της βάσης B_2 ως προς τη βάση B_1 [Εξ. (7.72)] ονομάζεται **πίνακας αλλαγής βάσης** ή **μετάβασης** (change of basis matrix ή transition matrix) **από τη** B_1 **στη** B_2.

Ο πίνακας P είναι αντιστρέψιμος αφού ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ που ορίζεται από τη σχέση

$$T(a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n) = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_nv_n \tag{7.73}$$

είναι επί. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$T(u_i) = v_i, \quad i = 1, 2, \cdots, n$$

και έτσι από την (7.67) παίρνουμε

$$\begin{array}{rcl} T(u_1) & = & a_{11}\,u_1 + a_{12}\,u_2 + \cdots + a_{1n}\,u_n \\ T(u_2) & = & a_{21}\,u_1 + a_{22}\,u_2 + \cdots + a_{2n}\,u_n \\ \vdots & \vdots & \qquad\qquad \vdots \\ T(u_n) & = & a_{n1}\,u_1 + a_{n2}\,u_2 + \cdots + a_{nn}\,u_n \end{array} \tag{7.74}$$

Συνεπώς, ο P είναι ο πίνακας του αντιστρέψιμου τελεστή T ως προς τη βάση B_1 τουV:

$$P = (A_T)_{B_1}^{B_1}. \tag{7.75}$$

Σύμφωνα με την Πρ. 7.6.4, ο P είναι αντιστρέψιμος (αφού ο $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι αντιστρέψιμος). Από την (7.71) παίρνουμε

$$P^{-1}\,X_{B_1} = X_{B_2}. \tag{7.76}$$

Μ'αυτό τον τρόπο έχουμε αποδείξει το θεώρημα που ακολουθεί.

Θεώρημα 7.7.2
Αν οι

$$B_1 = \{u_1, \cdots, u_n\} \quad \text{και} \quad B_2 = \{v_1, \cdots, v_n\}.$$

είναι διατεταγμένες βάσεις του n-διάστατου χώρου V, και P είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη B_1 στη B_2, τότε για κάθε $x \in V$ ισχύει

$$P\,X_{B_2} = X_{B_1} \quad \text{και} \quad P^{-1}\,X_{B_1} = X_{B_2}. \tag{7.77}$$

Παρατηρήσεις

1. Είναι φανερό ότι ο P^{-1} είναι ο **πίνακας αλλαγής βάσης από τη** B_2 **στη** B_1.

2. Εφιστούμε την προσοχή του αναγνώστη στο ότι μολονότι ο P λέγεται πίνακας αλλαγής βάσης από τη B_1 στη B_2, στην ουσία όταν εφαρμόζεται μεταφέρει τις συνιστώσες ενός στοιχείου ανεπτυγμένου στη νέα βάση (δηλ. τη B_2) στις συνιστώσες που αυτό έχει στην παλιά βάση (δηλ. τη B_1).

3. Στην τετριμμένη περίπτωση $B_1{=}B_2$, είναι φανερό ότι $P{=}I$.

Παραδείγματα

1. Έστω οι βάσεις

$$B_1 \;=\; \{e_1, e_2\} \quad \text{και} \quad B_2 \;=\; \{v_1 = (1,1),\; v_2 = (2,-1)\}$$

του $\mathbf{R}^2$. Θα βρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης από τη B_1 στη B_2. Αναπτύσσουμε λοιπόν τα v_1 και v_2 ως προς τη βάση B_1:

$$\begin{aligned} v_1 &= (1,1) \;=\; e_1 \,+\, e_2 \\ v_2 &= (2,-1) \;=\; 2\,e_1 \,-\, e_2 \end{aligned}$$

Άρα ο ζητούμενος πίνακας είναι ο

$$P \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

Έστω Q ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη B_2 στη B_1. Μπορούμε να βρούμε τον Q αναπτύσσοντας τα e_1 και e_2 ως προς τη βάση B_2:

$$e_1 \;=\; (1,0) \;=\; \tfrac{1}{3}\,v_1 \,+\, \tfrac{1}{3}\,v_2$$

$$e_2 \;=\; (0,1) \;=\; \tfrac{2}{3}\,v_1 \,-\, \tfrac{1}{3}\,v_2$$

Άρα

$$Q \;=\; \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι $Q{=}P^{-1}$, αφού

$$P\,Q \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \;=\; I\,.$$

2. Θεωρούμε τις βάσεις

$$B_1 \;=\; \{u_1 = (2,0),\; u_2 = (1,1)\} \quad \text{και} \quad B_2 \;=\; \{v_1 = (3,1),\; v_2 = (2,2)\}$$

του $\mathbf{R}^2$. Θα βρούμε τις συντεταγμένες του

$$x \;=\; 2\,v_1 \,-\, 3\,v_2$$

ως προς τη βάση B_1.

Βρίσκουμε πρώτα τον πίνακα αλλαγής βάσης από τη B_1 στη B_2. Αναπτύσσουμε τα v_1 και v_2 ως προς τη βάση B_1:

$$\begin{aligned} v_1 &= (3,1) = u_1 + u_2 \\ v_2 &= (2,2) = 2\,u_2 \end{aligned}$$

Συνεπώς, ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη B_1 στη B_2 είναι ο

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}.$$

Έχουμε έτσι

$$X_{B_1} = P\,X_{B_2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -4 \end{bmatrix}.$$

Το διάνυσμα συντεταγμένων του x ως προς τη βάση B_1 είναι το $(2,-4)$.

Καταλήγουμε στο ίδιο αποτέλεσμα αν εκφράσουμε το x σαν γραμμικό συνδυασμό των u_1 και u_2:

$$x = 2\,v_1 - 3\,v_2 = 2\,(3,1) - 3\,(2,2) = (0,-4) = 2\,u_1 - 4\,u_2\,.$$

Θεώρημα 7.7.3
Έστω ο $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου V n-διάστατος γραμμικός χώρος. Αν οι B_1 και B_2 είναι διατεταγμένες βάσεις του V και P είναι ο πίνακας αλλαγής βάσης από τη B_1 στη B_2, τότε για τους πίνακες του T ως προς τις δύο βάσεις ισχύει

$$(A_T)_{B_2} = P^{-1}\,(A_T)_{B_1}\,P\,. \tag{7.78}$$

Απόδειξη
Από τη θεωρία του εδαφίου 7.6, γνωρίζουμε ότι για τυχόν $x \in V$ με

$$T(x) = y$$

ισχύει

$$(A_T)_{B_i}\,X_{B_i} = Y_{B_i}\,, \quad i = 1, 2\,, \tag{i}$$

όπου X_{B_i} και Y_{B_i} είναι τα διανύσματα των συντεταγμένων των x και y ως προς τη βάση B_i. Από το Θεώρημα 7.7.2, γνωρίζουμε επίσης ότι

$$P\,X_{B_2} = X_{B_1} \quad \Longleftrightarrow \quad P^{-1}X_{B_1} = X_{B_2}\,. \tag{ii}$$

Από τις (i) και (ii) έχουμε:

$$Y_{B_1} = (A_T)_{B_1}X_{B_1} \implies P\,Y_{B_2} = (A_T)_{B_1}P\,X_{B_2} \implies P\,(A_T)_{B_2}X_{B_2} = (A_T)_{B_1}P\,X_{B_2}$$

$$\implies (A_T)_{B_2}X_{B_2} = P^{-1}\,(A_T)_{B_1}P\,X_{B_2} \implies \Big[(A_T)_{B_2} - P^{-1}\,(A_T)_{B_1}P\Big]\,X_{B_2} = \mathbf{0}\,.$$

Επειδή το πιο πάνω σύστημα έχει λύση για κάθε διάνυσμα $X_{B_2} \in K^n$, παίρνουμε

$$(A_T)_{B_2} \; - \; P^{-1}\,(A_T)_{B_1}P \; = \; O \quad \Longrightarrow \quad (A_T)_{B_2} \; = \; P^{-1}\,(A_T)_{B_1}P \; .$$

□

Παράδειγμα
Έστω ο $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) \; = \; (\; 2x_1, \; 4x_1 - x_2, \; 2x_1 + 3x_2 - x_3 \;)$$

και οι πιο κάτω διατεταγμένες βάσεις του $\mathbf{R}^3$:

$$\begin{aligned} B_1 &= \{e_1, \; e_2, \; e_3\} \; , \\ B_2 &= \{v_1 = (1,1,1), \; v_2 = (1,1,0), \; v_3 = (1,0,0)\} \; . \end{aligned}$$

Θα υπολογίσουμε τον πίνακα $(A_T)_{B_2}$ χρησιμοποιώντας την (7.78). Πρέπει λοιπόν να βρούμε τον πίνακα αλλαγής βάσης από τη B_1 στη B_2, P, τον αντίστροφό του P^{-1} και τον πίνακα $(A_T)_{B_1}$.

Για τα στοιχεία της βάσης B_2 έχουμε:

$$\begin{aligned} v_1 &= e_1 \; + \; e_2 \; + \; e_3 \\ v_2 &= e_1 \; + \; e_2 \; + \; 0e_3 \\ v_3 &= e_1 \; + \; 0e_2 \; + \; 0e_3 \end{aligned}$$

και έτσι

$$P \; = \; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} .$$

Ας βρούμε τώρα τον P^{-1}:

$$\begin{aligned} [P|I] \; &= \; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \\ &\sim \; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] \\ &\sim \; \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right] = \; [I|P^{-1}] \, . \end{aligned}$$

Άρα

$$P^{-1} \; = \; \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} .$$

Τέλος, βρίσκουμε τον $(A_T)_{B_1}$. Για τις εικόνες των στοιχείων της βάσης B_1 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} T(e_1) &= (2,4,2) = 2e_1 + 4e_2 + 2e_3 \\ T(e_2) &= (0,-1,3) = 0e_1 - e_2 + 3e_3 \\ T(e_3) &= (0,0,-1) = 0e_1 + 0e_2 - e_3 \end{aligned}$$

οπότε

$$(A_T)_{B_1} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}.$$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον $(A_T)_{B_2}$ από την (7.78):

$$(A_T)_{B_2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 4 & -1 & 0 \\ 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 5 & 2 \\ -1 & -2 & 2 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}.$$

Ο αναγνώστης μπορεί να επαληθεύσει το αποτέλεσμα βρίσκοντας απευθείας τον πίνακα $(A_T)_{B_2}$.

Ορισμός 7.7.4
Οι $A, B \in \mathcal{M}_{n \times n}$ είναι **όμοιοι** (similar) αν υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathcal{M}_{n \times n}$ τέτοιος ώστε

$$B = P^{-1}\, A\, P \iff A = P\, B\, P^{-1} \tag{7.79}$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι η ομοιότητα στο $\mathcal{M}_{n \times n}$, για την οποία χρησιμοποιείται το σύμβολο $\sim$, είναι *σχέση ισοδυναμίας* (βλ. Παράρτημα Α).

Παράδειγμα

Ο αντίστροφος του $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ είναι ο $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. Έτσι οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix}$$

και

$$B = P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}.$$

είναι όμοιοι.

Είναι φανερό ότι οι πίνακες γραμμικού τελεστή $T \in (V)$ ως προς δύο βάσεις του V είναι όμοιοι:

$$(A_T)_{B_2} \sim (A_T)_{B_1}.$$

Το θεώρημα που ακολουθεί μας λέει ότι ισχύει και το αντίστροφο.

Θεώρημα 7.7.5
Οι $n \times n$ πίνακες A και B είναι όμοιοι αν και μόνο αν είναι πίνακες γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$ ως προς δύο διατεταγμένες βάσεις του n-διάστατου γραμμικού χώρου V.

Ορισμός 7.7.6
Ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου V n-διάστατος γραμμικός χώρος, είναι **διαγωνοποιήσιμος** (diagonalizable) αν υπάρχει βάση B του V τέτοια ώστε ο $(A_T)_B$ να είναι διαγώνιος.

Σύμφωνα με τον πιο πάνω ορισμό, ο $T \in \mathcal{L}(V)$ είναι διαγωνοποιήσιμος αν υπάρχει μια βάση B=$\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ του V τέτοια ώστε

$$T(u_i) \;=\; \lambda_i\, u_i\,, \quad \text{με} \quad \lambda_i \in K\,,\;\; i = 1, 2, \cdots, n\,.$$

Σ΄ αυτή την περίπτωση

$$(A_T)_B \;=\; \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \lambda_n \end{bmatrix}. \tag{7.80}$$

Πρόταση 7.7.7
Ο $T \in \mathcal{L}(V)$, όπου V n-διάστατος γραμμικός χώρος, είναι διαγωνοποιήσιμος όταν και μόνο όταν υπάρχουν μια βάση B του V και αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathcal{M}_{n\times n}$ έτσι ώστε ο πίνακας

$$P^{-1}\,(A_T)_B\,P \tag{7.81}$$

να είναι διαγώνιος.

Απόδειξη
Αφήνεται σαν άσκηση. □

Παράδειγμα
Ο πίνακας του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$, με τύπο

$$T(x_1, x_2) \;=\; (\;x_1 + 4x_2,\; 2x_1 + 3x_2\;)\,,$$

ως προς τη συνήθη βάση B του $\mathbf{R}^2$ είναι ο

$$(A_T)_B \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}.$$

Αν πάρουμε τον αντιστρέψιμο 2×2 πίνακα $P = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ με $P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix}$ έχουμε:

$$P^{-1}(A_T)_B P \;=\; \begin{bmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \;=\; \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \;=\; D\,.$$

Άρα ο T είναι διαγωνοποιήσιμος.

Ο αναγνώστης που είναι εξοικειωμένος με τις έννοιες των ιδιοτιμών και των αντίστοιχων ιδιοδιανυσμάτων τετραγωνικού πίνακα θα έχει ίσως προσέξει ότι αυτές μπορούν να οριστούν και για γραμμικούς τελεστές. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 9, ο αριθμός $\lambda \in K$ καλείται **ιδιοτιμή** (eigenvalue) του γραμμικού τελεστή $T \in \mathcal{L}(V)$ αν υπάρχει μη μηδενικό στοιχείο u του V τέτοιο ώστε

$$T(u) \;=\; \lambda\, u\,. \tag{7.82}$$

Κάθε μη μηδενικό στοιχείο του V που ικανοποιεί την (7.82) καλείται **ιδιοδιάνυσμα** (eigenvector) του T που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ. Το σύνολο E_λ αυτών των ιδιοδιανυσμάτων αποτελεί ένα υπόχωρο του V ο οποίος καλείται **ιδιόχωρος** (eigenspace) της ιδιοτιμής λ. Επειδή από την (7.82) παίρνουμε

$$(T \;-\; \lambda I)(u) \;=\; \mathbf{0}\,, \tag{7.83}$$

ο λ είναι ιδιοτιμή του T αν ο τελεστής $T - \lambda I$ είναι ιδιάζων και

$$E_\lambda \;=\; Ker(T \;-\; \lambda I)\,. \tag{7.84}$$

Η θεωρία ιδιοτιμών και ιδιοδιανυσμάτων καθώς και η διαγωνοποίηση πίνακων (άρα και τελεστών) εξετάζονται λεπτομερώς στο Κεφάλαιο 9.

7.8 Προβλήματα

1. Έστω $F:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση
$$F(x,y) \ = \ (2x, 2y)\,.$$
Περιγράψτε την εικόνα των σημείων που ανήκουν στον κύκλο $x^2+y^2=1$ μέσω της F.

2. Έστω $F:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ η απεικόνιση που ορίζεται από τη σχέση
$$F(x,y) \ = \ (\frac{x}{3}, \frac{y}{4})\,.$$
Ποια είναι η εικόνα της έλλειψης
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} \ = \ 1$$
μέσω της F;

3. Έστω η απεικόνιση $F:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ με τύπο
$$F(x,y,z) \ = \ (x+2y-4z,\ 2x+3y+z,\ x+z)\,.$$
(α) Να δειχθεί ότι η F είναι αμφιμονοσήμαντη.
(β) Να δειχθεί ότι η F είναι επί.
(γ) Να βρεθεί η $F^{-1}(3,4,5)$.

4. Έστω οι απεικονίσεις $F:\ A \longrightarrow B$ και $G:\ B \longrightarrow C$. Να δειχθούν οι προτάσεις:
(α) Αν η $G \circ F$ είναι αμφιμονοσήμαντη, τότε και η F είναι αμφιμονοσήμαντη.
(β) Αν η $G \circ F$ είναι επί, τότε και η G είναι επί.

5. Έστω η συνάρτηση $f:\ \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$ με τύπο $f(x) = 2x-3$.
(α) Να δειχθεί ότι η f είναι αμφιμονοσήμαντη και επί.
(β) Να βρεθεί η f^{-1}.

6. Δείξτε ότι οι παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:
(α) $T:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ με $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2,\ 2x_1)$.
(β) $T:\ \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ με $T(x_1,x_2) = (x_1+x_2,\ x_1-x_2,\ 3x_2)$.
(γ) $T:\ \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ με
$$T(x_1,x_2,x_3,x_4) = (x_1-x_2+x_3+x_4,\ x_1+2x_3-x_4,\ x_1+x_2+3x_3-2x_4)\,.$$
(δ) $T:\ \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ με $T(x_1,x_2,x_3) = (x_1+2x_2+x_3,\ x_1+x_2,\ x_2+x_3)$.

7. Δείξτε ότι οι παρακάτω απεικονίσεις είναι γραμμικές:
(α) $T:\ \mathcal{M}_{2\times2} \longrightarrow \mathbf{R}$ με $T(A) = trA$.
(β) $T:\ \mathcal{M}_{2\times2} \longrightarrow \mathcal{M}_{3\times3}$ με
$$T\left(\begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & 0 \\ 0 & \alpha_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{21} \end{bmatrix}$$

8. Δείξτε ότι η απεικόνιση $T : \mathcal{M}_{2\times 2} \longrightarrow \mathbf{R}$ με τύπο $T(A) = \det(A)$ <u>δεν είναι</u> γραμμική.

9. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Αν είναι $T(1,0) = (1,1,0)$ και $T(0,1) = (1,-1,3)$, να βρεθεί ο τύπος της T.

10. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$. Αν είναι $T(1,1,0) = (3,2,1)$, $T(1,0,1) = (2,1,1)$ και $T(0,1,1) = (3,1,2)$, να βρεθεί ο τύπος της T ως προς τη βάση
$$\{e_1 = (1,1,0),\ e_2 = (1,0,1),\ e_3 = (0,1,1)\}$$
του $\mathbf{R}^3$.

11. Έστω ο τελεστής $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ που ορίζεται από τη σχέση
$$T(x_1,x_2,x_3) \;=\; (x_1+2x_2+x_3,\ x_1+x_2,\ x_2+x_3)\,.$$
(α) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός.
(β) Να βρεθούν ο $Ker(T)$ και η $dim Ker(T)$.
(γ) Να βρεθεί μια βάση του $Ker(T)$.
(δ) Να βρεθεί η $dim Im(T)$.

12. Έστω ο τελεστής $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$ με
$$T(x_1,x_2,x_3) \;=\; (x_1+x_2-2x_3,\ x_1-2x_2+x_3,\ -2x_1+x_2+x_3)\,.$$
(α) Δείξτε ότι ο T είναι γραμμικός.
(β) Να βρεθεί μια βάση του $Ker(T)$.
(γ) Να βρεθεί μια βάση της $Im(T)$.

13. Έστω ο πίνακας
$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & -1 & -2 \\ 4 & 5 & 3 & 0 \end{bmatrix}$$
(α) Να βρεθεί ο $rank(A)$.
(β) Να βρεθεί η $nullity(A)$.
(γ) Να βρεθεί μια βάση του $N(A)$.

14. Να επαναληφθεί η άσκηση 13 όταν
(i)
$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}$$
(ii)
$$A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix}$$

(iii)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \\ 2 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & -3 \end{bmatrix}$$

15. Έστω ο $m \times n$ πίνακας A.
(α) Δείξτε ότι ο πυρήνας $N(A)$ του A είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^n$.
(α) Δείξτε ότι η εικόνα $R(A)$ του A είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^m$.
Σημείωση: Να **μην** χρησιμοποιηθούν οι Προτάσεις 7.3.5 και 7.3.2.

16. Έστω η γραμμική απεικόνιση $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$. Να βρεθεί η $T(1,0)$ αν
(α) $T(3,1) = (1,2)$ και $T(-1,0) = (1,1)$
(β) $T(4,1) = (1,1)$ και $T(1,1) = (3,-2)$
(γ) $T(1,1) = (2,1)$ και $T(-1,1) = (6,3)$

17. Έστω η $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, V_2)$ για την οποία ισχύει $T(u)=\mathbf{0}$, όπου $u \neq \mathbf{0}$. Να δειχθεί ότι η ImT είναι είτε μια ευθεία είτε το $\{\mathbf{0}\}$.

18. Αν $T \in \mathcal{L}(V,W)$, $w \in W$ και για το $v_0 \in V$ ισχύει $T(v_0)=w$, να δείξετε ότι κάθε λύση της εξίσωσης $T(x)=w$ είναι της μορφής v_0+u, όπου $u \in KerT$.

19. Έστω $T : \mathbf{R}^2 \longrightarrow \mathbf{R}^2$ γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T \neq O$ και $T^2=T\circ T=O$. Να δειχθεί ότι υπάρχει μια βάση $\{u,\, v\}$ του $\mathbf{R}^2$, τέτοια ώστε $T(u)=v$ και $T(v)=\mathbf{0}$.

20. Αν $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$, όπου οι V_1, V_2 είναι πεπερασμενοδιάστατοι με $dimV_1 > dimV_2$, δείξτε ότι $KerT \neq \{\mathbf{0}\}$.

21. Δείξτε ότι ο $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ με τύπο $T(x,y)=(x+y,\ x-y)$ είναι αντιστρέψιμος.

22. Δείξτε ότι ο $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ είναι αντιστρέψιμος:
(α) $T(x,y,z) = (x-y,\ x-z,\ x+y+2z)$
(β) $T(x,y,z) = (2x-y+z,\ x+y,\ 3x+y+z)$

23. Αν I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στο γραμμικό χώρο V και $T \in \mathcal{L}(V)$, να δειχθούν τα εξής:
(α) Αν $T^2=O$, ο $I-T$ είναι αντιστρέψιμος.
(β) Αν $T^2+2T+I=O$, ο T είναι αντιστρέψιμος.
(γ) Αν $T^3=O$, ο $I-T$ είναι αντιστρέψιμος.

24. Αν $I, T \in \mathcal{L}(V)$ και T^2-T+I=O, δείξτε ότι ο T είναι αντιστρέψιμος και $T^{-1}=I-T$.

25. Αν T, $S \in \mathcal{L}(V)$ και $T\circ S=S\circ T$, δείξτε ότι

$$(T+S)^2 \;=\; T^2 \;+\; 2\,T\circ S \;+\; S^2 \qquad \text{και} \qquad (T+S)\circ(T-S) \;=\; T^2 \;-\; S^2\,.$$

26. Αν T, $S \in \mathcal{L}(V)$ και $KerT=KerS=\{\mathbf{0}\}$, δείξτε ότι $Ker(T\circ S)=\{\mathbf{0}\}$.

27. Αν $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και ο V_1 είναι πεπερασμενοδιάστατος, δείξτε ότι οι V_1 και ImT έχουν την ίδια διάσταση αν και μόνο αν η T είναι *ομαλή*.

28. Δείξτε ότι κάθε γραμμική απεικόνιση $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ είναι *μη ομαλή*.

29. Δείξτε ότι ο $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ με τύπο $T(x,y){=}(x-y,\ x-2y)$ είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον T^{-1}.

30. Δείξτε ότι ο $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ με τύπο

$$T(x,y,z) \;=\; (x+y-2z,\ x+2y+z,\ 2x+2y-3z)$$

είναι αντιστρέψιμος και βρείτε τον T^{-1}.

31. Βρείτε τις διαστάσεις των κάτωθι γραμμικών χώρων:
(α) $\mathcal{L}(\mathbf{R}^5,\, \mathbf{R}^3)$ (β) $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{3\times 2},\, \mathbf{R}^2)$ (γ) $\mathcal{L}(\mathcal{M}_{3\times 2},\, \mathcal{M}_{3\times 1})$ (δ) $\mathcal{L}(\mathbf{R}^4,\, P_3)$

32. Αν $S,\ T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ με $S(x,y){=}(y,x)$ και $T(x,y){=}(0,x)$ βρείτε τους τύπους των $S \circ T$ και $T \circ S$, και δείξτε ότι $S^2{=}S \circ S{=}I$ και $T^2{=}O$.

33. Έστω ο γραμμικός τελεστής $T \in \mathcal{L}(V)$ για τον οποίο ισχύει

$$E^2 \;=\; E\,.$$

Τελεστές αυτής της μορφής καλούνται **προβολές** (projections).
(α) Να δειχθεί ότι αν $u \in ImE$, τότε $E(u){=}u$ (δηλ. ότι ο E είναι ο ταυτοτικός τελεστής στην ImE).
(β) Να δειχθεί ότι αν $E \neq I$, ο E είναι *μη ομαλός*.

34. (α) Αν ο γραμμικός χώρος V είναι πεπερασμένης διάστασης $n \in \mathbf{N}$, να βρεθεί ο πίνακας του ταυτοτικού τελεστή $I \in \mathcal{L}(V)$ ως προς τη συνήθη βάση του V.
Έστω τώρα ο $I \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$. Να βρεθεί ο πίνακας του I
(β) ως προς τη συνήθη βάση, $E{=}\{e_1,e_2,e_3\}$, του $\mathbf{R}^3$,
(γ) ως προς τη βάση

$$U \;=\; \{\, u_1=(1,1,1),\ u_2=(1,0,1),\ u_3=(0,1,1)\,\},$$

(δ) ως προς τις διατεταγμένες βάσεις E και U.

35. Αν οι γραμμικοί χώροι V_1 και V_2 είναι πεπερασμένων διαστάσεων n και m, αντίστοιχα, να βρεθεί ο πίνακας της μηδενικής απεικόνισης $O \in \mathcal{L}(V_1,V_2)$ ως προς τυχούσες βάσεις των V_1 και V_2.

36. Να βρεθεί ο πίνακας της $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$ με τύπο

$$T(x_1,x_2,x_3) \;=\; (\ x_1+x_2-x_3,\ 2x_1+x_3\ )$$

(α) ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$.
(β) ως προς τις βάσεις

$$U \;=\; \{\, u_1=(1,0,-1),\ u_2=(1,1,1),\ u_3=(1,0,0)\,\}$$

και

$$W \;=\; \{\, w_1=(0,1),\ w_2=(1,0)\,\}\,.$$

37. Έστω η βάση
$$U \;=\; \{\, u_1=(1,-2),\; u_2=(2,1)\,\}$$
του $\mathbf{R}^2$ και ο γραμμικός τελεστής $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ που ορίζεται από τις
$$T(u_1) \;=\; u_2 \quad \text{και} \quad T(u_2) \;=\; -u_1\,.$$
Να βρεθεί ο πίνακας του T ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$.

38. Βρείτε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$ με τύπο
$$T(x,y,z) \;=\; (2x+y-z,\; 3x-2y+4z)$$
ως προς τις βάσεις
$$U \;=\; \{\, u_1=(1,1,1),\; u_2=(1,1,0),\; u_3=(1,0,0)\,\}$$
και
$$W \;=\; \{\, w_1=(1,3),\; w_2=(1,4)\,\}$$
των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$, αντίστοιχα.

39. Βρείτε τον πίνακα της γραμμικής απεικόνισης $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^2,\mathbf{R}^3)$ με τύπο
$$T(x_1,x_2) \;=\; (3x_1-x_2,\; 2x_1+4x_2,\; 5x_1-6x_2)$$
ως προς τις βάσεις
$$U \;=\; \{\, u_1=(1,3),\; u_2=(2,5)\,\}$$
και
$$W \;=\; \{\, w_1=(1,0,0),\; w_2=(1,1,0),\; w_3=(1,1,1)\,\}$$
των $\mathbf{R}^2$ και $\mathbf{R}^3$, αντίστοιχα.

40. Να δειχθεί ότι ο γραμμικός τελεστής $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ με τύπο
$$T(x,y,z) \;=\; (3x,\; 2x-y,\; x-y+3z)$$
είναι **αμφιμονοσήμαντος και επί**, και να βρεθεί ο αντίστροφός του, T^{-1}. Στη συνέχεια βρείτε τους πίνακες των T και T^{-1} ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$ και επαληθεύστε ότι είναι αντίστροφοι πίνακες.

41. Να βρεθεί ο πίνακας του τελεστή παραγώγισης $D\in\mathcal{L}(P_n)$ ως προς τη βάση
$$B \;=\; \left\{\, 1,\; x-c,\; \frac{(x-c)^2}{2!},\; \ldots,\; \frac{(x-c)^n}{n!}\,\right\}.$$

42. Να βρεθεί η γραμμική απεικόνιση $T\in\mathcal{L}(\mathbf{R}^3,\mathbf{R}^2)$ αν
$$(A_T)_U^W \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1\\ 2 & 1 & 2\end{bmatrix}$$
είναι ο πίνακάς της ως προς τις βάσεις
$$U \;=\; \{\, u_1=(1,0,0),\; u_2=(1,1,0),\; u_3=(1,1,1)\,\}$$
$$W \;=\; \{\, w_1=(1,0),\; w_2=(1,1)\,\}$$
των $\mathbf{R}^3$ και $\mathbf{R}^2$, αντίστοιχα.

43. Να βρεθεί ο γραμμικός τελεστής $S \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ αν
$$(A_S)_{B_1}^{B_2} \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$
είναι ο πίνακάς του ως προς τη συνήθη βάση B_1 και τη βάση B_2=$\{(1,3),\ (2,5)\}$ του $\mathbf{R}^2$.

44. Να βρεθεί ο πίνακας της $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, P_1)$ με τύπο
$$T(a_1,a_2,a_3,a_4) \;=\; a_1 \;+\; a_3 \;+\; (a_2+a_4)\,x$$
ως προς τις διατεταγμένες βάσεις
$$B_1 \;=\; \{\, u_1=(1,1,1,1),\ u_2=(1,1,1,0),\ u_3=(1,1,0,0), u_4=(1,0,0,0)\,\}$$
του $\mathbf{R}^4$ και
$$B_2 \;=\; \{\, v_1 = 1+x,\ v_2 = 1-x\,\}$$
του P_1.

45. Έστω $T \in \mathcal{L}(P_3, P_5)$ η γραμμική απεικόνιση που ορίζεται από την
$$T(p(x)) \;=\; (1+x-x^2)\,p(x)\,.$$
Να βρεθεί ο πίνακας της T ως προς τις συνήθεις βάσεις των P_3 και P_5.

46. Να βρεθεί η τιμή της $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3, P_2)$ στο $(1,1,-1)$, αν ο πίνακάς της ως προς τις συνήθεις βάσεις των $\mathbf{R}^3$ και P_2 είναι ο
$$A_T \;=\; \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & -3 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

47. Βρείτε τον πίνακα αλλαγής βάσης, P, από τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^3$ στη βάση
$$\{\,(1,-1,1),\ (0,1,1),\ (0,0,2)\,\}\,.$$
Ποιος είναι ο αντίστροφος του P;

48. Αν ο πίνακας του $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2)$ ως προς τη συνήθη βάση του $\mathbf{R}^2$ είναι ο
$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix},$$
να βρεθεί ο πίνακάς του ως προς τη βάση $\{(2,1),\ (1,-1)\}$.

49. Αν ο πίνακας του $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^3)$ ως προς τη βάση
$$B_1 \;=\; \{\,(1,1,0),\ (0,1,1),\ (1,0,1)\,\}$$
είναι ο
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$
να βρεθεί ο πίνακάς του ως προς τη βάση
$$B_2 \;=\; \{\,(2,1,1),\ (3,0,1),\ (0,1,3)\,\}$$
του $\mathbf{R}^3$.