ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1
ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ

---

1 (1α) $(1,-2,0)+(-2,3,4)=(1-2,-2+3,0+4)=(-1,1,4)$

(1β) $(1,-2,0,3)+(4,-3,-2,0)=(1+4,-2-3,0-2,3+0)=(5,-5,-2,3)$

(1γ) $(1,-1)+(-1,1)=(1-1,-1+1)=(0,0)$

(1δ) Το άθροισμα δεν ορίζεται γιατί τα διανύσματα έχουν διαφορετικό πλήθος συνιστωσών.

(1ε) $(1,-2,3)-2(1,-1,-2)=(1,-2,3)-(2,-2,-4)=(-1,0,7)$

(1στ) $-3(1,-2,1,0)=(-3,6,-3,0)$

(1ζ) $3(1,-1,2)-(1,-2,1)=(3-1,-3+2,6-1)=(2,-1,5)$

---

2 $(x,5)=(y-x,y)$

Επειδή τα δυο διανύσματα είναι ίσα και οι αντίστοιχες συνιστώσες θα είναι ίσες:

$$\left.\begin{matrix} x=y-x \\ 5=y \end{matrix}\right\} \Rightarrow \left.\begin{matrix} 2x=y \\ y=5 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} x=5/2 \\ y=5 \end{matrix}$$

---

3 $(2,-3,4)=x(1,1,1)+y(1,1,0)+z(1,0,0)$

Εκτελώντας τις πράξεις έχουμε

$(2,-3,4)=(x,x,x)+(y,y,0)+(z,0,0)=(x+y+z,x+y,x)\Rightarrow$

$$\left.\begin{matrix} x+y+z=2 \\ x+y=-3 \\ x=4 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \begin{matrix} z=5 \\ y=-7 \\ x=4 \end{matrix}$$

---

4 Εστω ότι $\vec{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ οπότε έχουμε

$0\vec{u}=0(u_1,u_2,\dots,u_n)=(0u_1,0u_2,\dots,0u_n)=(0,0,\dots,0)=\mathbb{0}$

---

5 Εχουμε για τα $\vec{u}$ και $\mathbb{0}$

$\vec{u}=(u_1,u_2,\dots,u_n)$ και $\mathbb{0}=(0,0,\dots,0)$

Για το εσωτερικό τους γινόμενο έχουμε

$\langle\vec{u},\mathbb{0}\rangle=u_1\cdot 0+u_2\cdot 0+\dots+u_n\cdot 0=0$

Αρα το μηδενικό διάνυσμα $\mathbb{0}$ είναι ορθογώνιο στο $\vec{u}$.

⑥ 1α) $\vec{u}=(2,-3,6)$, $\vec{v}=(8,2,-3)$

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 2\cdot 8-3\cdot 2+6(-3)=16-6-18=-8$

1β) $\vec{u}=(1,-8,0,5)$, $\vec{v}=(3,6,4)$

Το εσωτερικό γινόμενο δεν ορίζεται γιατί τα δυο διανύσματα έχουν διαφορετικό πλήθος συνιστωσών.

1γ) $\vec{u}=(3,-5,2,1)$, $\vec{v}=(4,1,-2,5)$

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 3\cdot 4-5\cdot 1+2(-2)+1\cdot 5=12-5-4+5=8$

---

⑦ 1α) $\vec{u}=(1,k,-3)$ και $\vec{v}=(2,-5,4)$

Για να είναι τα $\vec{u}$ και $\vec{v}$ ορθογώνια πρέπει $\langle \vec{u},\vec{v}\rangle=0$

$\Rightarrow \langle \vec{u},\vec{v}\rangle = 2-5k-12=-5k-10=0 \Longrightarrow k=-2$.

1β) $\vec{u}=(2,3k,-4,1,5)$ και $\vec{v}=(6,-1,3,7,2k)$

$\langle \vec{u},\vec{v}\rangle=0 \Longrightarrow$

$12-3k-12+7+10k=0 \Longrightarrow 7+7k=0 \Longrightarrow k=-1$

---

⑧ Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$d=\|\vec{u}-\vec{v}\|=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+\cdots+(u_n-v_n)^2}$

1α) $\vec{u}=(1,7)$, $\vec{v}=(6,-5)$

$d=\sqrt{(1-6)^2+(7+5)^2}=\sqrt{25+144}=\sqrt{169}=13$

1β) $\vec{u}=(3,-5,4)$, $\vec{v}=(6,2,-1)$

$d=\sqrt{(3-6)^2+(-5-2)^2+(4+1)^2}=\sqrt{9+49+25}=\sqrt{83}$

---

⑨ $\vec{u}=(2,k,1,-4)$, $\vec{v}=(3,-1,6,-3)$

Η απόσταση των δύο διανυσμάτων δίνεται από τον τύπο

$d=\sqrt{(u_1-v_1)^2+(u_2-v_2)^2+(u_3-v_3)^2+(u_4-v_4)^2} \Longrightarrow$

$d=\sqrt{(2-3)^2+(k+1)^2+(1-6)^2+(-4+3)^2}=\sqrt{1+(k+1)^2+25+1} \Longrightarrow$

$d=\sqrt{k^2+2k+28}$.

Πρέπει να είναι $d=6 \Longrightarrow 6=\sqrt{k^2+2k+28} \Longrightarrow 36=k^2+2k+28$

$\Longrightarrow k^2+2k-8=0 \Longrightarrow (k+4)(k-2)=0 \Longrightarrow$

$k=2$ ή -4.

(10) Χρησιμοποιούμε τον τύπο

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2+u_2^2+\cdots+u_n^2}$$

(α) $\vec{u}=(2,-7) \Longrightarrow \|\vec{u}\|=\sqrt{2^2+7^2}=\sqrt{4+49}=\sqrt{53}$

(β) $\vec{u}=(3,-12,-4) \Longrightarrow \|\vec{u}\|=\sqrt{3^2+(-12)^2+(-4)^2}=\sqrt{9+144+16}=\sqrt{169}=13$

---

(11) $\vec{u}=(1,k,-2,5)$

Έχουμε για τη νόρμα του $\vec{u}$:

$$\|\vec{u}\|=\sqrt{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}=\sqrt{1^2+k^2+(-2)^2+5^2}=\sqrt{k^2+30}$$

Πρέπει να είναι $\|\vec{u}\|=\sqrt{39} \Longrightarrow k^2+30=39 \Longrightarrow k^2=9 \Rightarrow k=\pm 3$

---

(12) Σε κάθε περίπτωση βρίσκουμε τη νόρμα $\|\vec{u}\|$. Το $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο αν $\|\vec{u}\|=1$

(α) $\vec{u}=(1,0,-\frac{1}{2})$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{1^2+0^2+(-\frac{1}{2})^2}=\sqrt{1+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{2}\neq 1$. Δεν είναι μοναδιαίο το $\vec{u}$.

(β) $\vec{u}=(0,-1,0)$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{0^2+(-1)^2+0^2}=1$. Το $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο.

(γ) $\vec{u}=(\frac{1}{3},-\frac{1}{3},\frac{1}{3})$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\frac{1}{3})^2+(-\frac{1}{3})^2+(\frac{1}{3})^2}=\sqrt{\frac{1}{9}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}}=\frac{\sqrt{3}}{3}\neq 1$. Το $\vec{u}$ δεν είναι μοναδιαίο

(δ) $\vec{u}=(\frac{1}{\sqrt{3}},-\frac{1}{\sqrt{3}},\frac{1}{\sqrt{3}})$

$\|\vec{u}\|=\sqrt{(\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(-\frac{1}{\sqrt{3}})^2+(\frac{1}{\sqrt{3}})^2}=\sqrt{\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}}=1$. Το $\vec{u}$ είναι μοναδιαίο.

---

(13) (α) $\vec{u}=(-3,4)$

Το κανονικοποιημένο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$\left.\begin{aligned} \vec{e}_u &= \frac{\vec{u}}{\|\vec{u}\|} \\ \|\vec{u}\| &= \sqrt{(-3)^2+4^2}=\sqrt{25}=5 \end{aligned}\right\} \Longrightarrow \vec{e}_u=\frac{1}{5}(-3,4)=(-\frac{3}{5},\frac{4}{5})$$

(β) $\vec{v}=(1,-2,0,2)$

Το κανονικοποιημένο διάνυσμα δίνεται από τη σχέση

$$\vec{e}_v=\frac{\vec{v}}{\|\vec{v}\|}$$

$\|\vec{v}\|=\sqrt{1^2+(-2)^2+0^2+2^2}=\sqrt{1+4+0+4}=\sqrt{9}=3 \Longrightarrow$

$\vec{e}_v=\frac{1}{3}(1,-2,0,2)$ ή $\vec{e}_v=(\frac{1}{3},-\frac{2}{3},0,\frac{2}{3})$

(14) Υπολογίζουμε τα

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \ , \ \|\vec{u}\| \ , \ \|\vec{v}\|$$

και ελέγχουμε αν ισχύει η ανισότητα Cauchy-Schwartz:

$$|\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| \leq \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|$$

(α) $\vec{u} = (1,-1)$, $\vec{v} = (0,1)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 1 = -1 \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = 1$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{0^2 + 1^2} = 1$

Πράγματι $1 \leq \sqrt{2} \cdot 1$

(β) $\vec{u} = (1,0,-1)$, $\vec{v} = (1,-1,0)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 1 + 0 \cdot (-1) + (-1) \cdot 0 = 1 + 0 + 0 = 1 \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = 1$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$.

Πράγματι $1 \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = 2$

(γ) $\vec{u} = (1,0,0,-1)$, $\vec{v} = (2,1,0,0)$

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 + (-1) \cdot 0 = 2 \Rightarrow |\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle| = 2$.

$\|\vec{u}\| = \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{2}$.

$\|\vec{v}\| = \sqrt{2^2 + 1^2 + 0^2 + 0^2} = \sqrt{5}$

Πράγματι ισχύει $2 \leq \sqrt{2} \cdot \sqrt{5} = \sqrt{10}$

---

(15) $\vec{u} = (-3, 0, 6, 2)$, $\vec{v} = (1, -2, 0, 2)$.

Για τη γωνία των δυο διανυσμάτων ισχύει

$$\cos\theta = \frac{\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle}{\|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\|}$$

Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο των $\vec{u}$ και $\vec{v}$ καθώς και τις νόρμες τους:

$\langle \vec{u}, \vec{v} \rangle = -3 \cdot 1 + 0(-2) + 6 \cdot 0 + 2 \cdot 2 = -3 + 0 + 0 + 4 = 1$

$\|\vec{u}\| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + 6^2 + 2^2} = \sqrt{9 + 0 + 36 + 4} = \sqrt{49} = 7$

$\|\vec{v}\| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{1 + 4 + 0 + 4} = \sqrt{9} = 3$

Αντικαθιστώντας έχουμε $\cos\theta = \frac{1}{7 \cdot 3} = \frac{1}{21} \Rightarrow$

$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{21}\right)$