ΛΥΣΕΙΣ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ 3ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

1. $\vec{u} = (1,-1,0)$, $\vec{v} = (1,3,-1)$ και $\vec{w} = (5,3,-2)$

Για να είναι τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ γραμμικώς εξαρτημένα πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε:

$$\lambda_1 \vec{u} + \lambda_2 \vec{v} + \lambda_3 \vec{w} = 0$$

Από την πιο πάνω σχέση έχουμε

$$\lambda_1 (1,-1,0) + \lambda_2 (1,3,-1) + \lambda_3 (5,3,-2) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 \, , -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \, , -\lambda_2 - 2\lambda_3) = (0,0,0)$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ 4\lambda_2 + 8\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Το σύστημα έχει άπειρες λύσεις:

$\lambda_2 = -2\lambda_3$.

$\lambda_1 = 2\lambda_3 - 5\lambda_3 = -3\lambda_3$.

π.χ. για $\lambda_3 = 1$
$\lambda_2 = -2$.
$\lambda_1 = -3$.

Άρα τα $\vec{u}$, $\vec{v}$ και $\vec{w}$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

2 Θέλουμε να εκφράσουμε το $\vec{V} = (1,-2,5)$ ως γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{e_1} = (1,1,1)$, $\vec{e_2} = (1,2,3)$ και $\vec{e_3} = (2,-1,1)$.

Πρέπει δηλ. να βρούμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\vec{V} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3} \Longrightarrow$$

$$(1,-2,5) = \lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,2,3) + \lambda_3 (2,-1,1) \Longrightarrow$$

$$(1,-2,5) = (\lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 , \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 , \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3).$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα:

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 = -2. \\ \lambda_1+3\lambda_2+\lambda_3 = 5 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 = 1. \\ \lambda_2-3\lambda_3 = -3. \\ 2\lambda_2-\lambda_3 = 4 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} \lambda_1+\lambda_2+2\lambda_3 = 1 \\ \lambda_2-3\lambda_3 = -3. \\ 5\lambda_3 = 10 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 = 3 \\ \lambda_1 = -6 \end{array}$$

---

3 Θέλουμε να εκφράσουμε το $\vec{u} = (2,-5,3)$ ως γραμμικό συνδυασμό των

$\vec{e_1} = (1,-3,2)$, $\vec{e_2} = (2,-4,-1)$ και $\vec{e_3} = (1,-5,7)$.

Πρέπει δηλ. να βρούμε $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\vec{u} = \lambda_1 \vec{e_1} + \lambda_2 \vec{e_2} + \lambda_3 \vec{e_3} \Longrightarrow$$

$$(2,-5,3) = \lambda_1 (1,-3,2) + \lambda_2 (2,-4,-1) + \lambda_3 (1,-5,7) \Longrightarrow$$

$$(2,-5,3) = (\lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3, -3\lambda_1-4\lambda_2-5\lambda_3 , 2\lambda_1-\lambda_2+7\lambda_3)$$

που ισοδυναμεί με το σύστημα

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 = 2 \\ -3\lambda_1-4\lambda_2-5\lambda_3 = -5 \\ 2\lambda_1-\lambda_2+7\lambda_3 = 3 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{r} \lambda_1+2\lambda_2+\lambda_3 = 2. \\ 2\lambda_2-2\lambda_3 = 1 \\ -5\lambda_2+5\lambda_3 = -1 \end{array}$$

Από τις δυο τελευταίες εξισώσεις παίρνουμε:

$$\left.\begin{array}{l} 10\lambda_2-10\lambda_3 = 5. \\ -10\lambda_2+10\lambda_3 = -2 \end{array}\right\} \Rightarrow 0 = 3$$

Το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Άρα το $\vec{u}$ δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των $\vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$.

4 Πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$u = \lambda_1 v + \lambda_2 w \Rightarrow$$

$$(1,-2,k) = \lambda_1 (3,0,-2) + \lambda_2 (2,-1,-5) \Rightarrow$$

$$(1,-2,k) = (3\lambda_1 + 2\lambda_2, -\lambda_2, -2\lambda_1 - 5\lambda_2) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 3\lambda_1 + 2\lambda_2 &= 1 \\ -\lambda_2 &= -2 \\ -2\lambda_1 - 5\lambda_2 &= k \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} \lambda_2 &= 2 \\ \lambda_1 &= -1 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow k = -2\lambda_1 - 5\lambda_2 = 2 - 10 \Rightarrow k = -8.$$

---

5 $u_1 = x-1$, $u_2 = x^2+2x$, $u_3 = x^2+2$.

(α) $v = x^2 - 3x + 5$.

Πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$v = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$$

προκειμένου να μπορεί να εκφραστεί το v ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, u_3. $\Rightarrow$

$$x^2 - 3x + 5 = \lambda_1 (x-1) + \lambda_2 (x^2+2x) + \lambda_3 (x^2+2) \Rightarrow$$

$$x^2 - 3x + 5 = (\lambda_2 + \lambda_3) x^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2) x - \lambda_1 + 2\lambda_3 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 &= -3 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 &= 5 \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 &= -3 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 &= 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 &= 1 \end{aligned}\right\}.$$

Οι δυο τελευταίες εξισώσεις είναι οι ίδιες. Εχουμε δηλ. ένα αόριστο σύστημα (με άπειρες λύσεις).

Αν $\lambda_3 = a$, τότε

$\lambda_2 = 1 - a$.

$\lambda_1 = -5 + 2a$.

Συνεπώς, το διάνυσμα $v = x^2 - 3x + 5$ μπορεί να γραφεί με άπειρους τρόπους ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, u_3,

π.χ. για $a = 2$.

$$v = -(x-1) - (x^2+2x) + 2(x^2+2).$$

(β) $W = x^2 - 2x - 2$.
Πρέπει να είναι

$$W = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 \Rightarrow$$

$$x^2 - 2x - 2 = (\lambda_2 + \lambda_3)x^2 + (\lambda_1 + 2\lambda_2)x - \lambda_1 + 2\lambda_3 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = -2 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_3 = -2 \end{array}\right\} \quad \left.\begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = -4 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 1 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = -2. \end{array}$$

Το σύστημα δεν είναι συμβιβαστό. Επομένως το W δεν μπορεί να εκφραστεί ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2, u_3.

---

6 Για να είναι τα u_1, u_2, u_3 γραμμικώς εξαρτημένα πρέπει να υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ που δεν είναι όλοι μηδέν που ικανοποιούν την:

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 (x-1) + \lambda_2 (x^2+2) + \lambda_3 (x^2+2x) = 0 \Rightarrow$$

$$(\lambda_2 + \lambda_3)x^2 + (\lambda_1 - 2\lambda_3)x - \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \end{array}\right\}$$

Το σύστημα είναι αόριστο, έχει δηλ. και μη μηδενικές λύσεις. Τα διανύσματα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα, Άρα πράγμα που συνάγεται και από το γεγονός ότι, π.χ. το u_3 εκφράζεται ως γραμμικός συνδυασμός των u_1, u_2:

$$x^2 + 2x = 2(x-1) + (x^2+2), \text{ δηλ.}$$

$$u_3 = 2u_1 + u_2.$$

---

7 Εδώ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι δυο διανύσματα u, v είναι γραμμικώς εξαρτημένα αν το ένα είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου.

(α) $u = (3,4)$, $v = (1,-3)$ Είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

(β) $u = (4,3,-2)$, $v = (2,-6,7)$. Είναι γραμμικώς ανεξάρτητα

(γ) $u = (2,-3)$, $v = (6,-9)$. $v = 3u \Rightarrow$ Είναι γραμμικώς εξαρτημένα

(ε) $u = (-4,6,-2)$, $v = (2,-3,1)$. $u = -2v \Rightarrow$ είναι γραμμικώς εξαρτημένα

8 (α) Τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα αν υπάρχουν $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 (1,-2,1) + \lambda_2 (2,1,-1) + \lambda_3 (7,-4,1) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$(\lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3, -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3, \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 - 4\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 \\ 5\lambda_2 + 10\lambda_3 &= 0 \\ -3\lambda_2 - 6\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + 2\lambda_2 + 7\lambda_3 &= 0 \\ 5\lambda_2 + 10\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$ Το σύστημα είναι αόριστο. Εχει δηλ. άπειρες (μη μηδενικές) λύσεις.

Τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

(β) Τα u_1, u_2, u_3, u_4 είναι γραμμικώς εξαρτημένα, αφού στον $\mathbb{R}^3$ μπορούμε να έχουμε όχι περισσότερα από 3 ανεξάρτητα διανύσματα.

(γ) Επειδή $u_2 = 0 = (0,0,0)$, τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα.

---

9 $A = \{u_1, u_2, u_3\}$, $u_1 = (2,-1,2,1)$, $u_2 = (1,-2,0,3)$, $u_3 = (3,1,0,-2)$

Για να είναι το Α βάση του $\overline{W}$ πρέπει τα u_1, u_2, u_3

I) να είναι γραμμικά ανεξάρτητα

II) να παράγουν τον W. Αυτό δίνεται στην εκφώνηση.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$$\lambda_1 (2,-1,2,1) + \lambda_2 (1,-2,0,3) + \lambda_3 (3,1,0,-2) = (0,0,0,0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} 2\lambda_1 + \lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ -\lambda_1 - 2\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$ (μοναδική λύση)

Αρα το Α είναι βάση του $\overline{W}$ και περιέχει τρία στοιχεία

$\Rightarrow \dim \overline{W} = 3$

10 Μια βάση του $\mathbb{R}^3$ πρέπει να περιέχει ακριβώς τρία στοιχεία ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$). Άρα τα διανύσματα των (α) και (γ) δεν αποτελούν βάσεις του $\mathbb{R}^3$.

(β) Τα διανύσματα πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν

$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3 = 0$ συνεπάγεται ότι $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

$$\lambda_1 (1,1,1) + \lambda_2 (1,2,3) + \lambda_3 (2,-1,1) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 + \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 2\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 &= 0 \\ 5\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$$

Τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, άρα αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

(δ) Με παρόμοιο τρόπο έχουμε

$$\lambda_1 (1,1,2) + \lambda_2 (1,2,5) + \lambda_3 (5,3,4) = (0,0,0) \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 + 3\lambda_3 &= 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 + 4\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \\ 3\lambda_2 - 6\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 + \lambda_2 + 5\lambda_3 &= 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 &= 0 \end{aligned}\right\}$$

Το σύστημα είναι αόριστο (υπάρχουν άπειρες λύσεις). Τα u_1, u_2, u_3 είναι γραμμικώς εξαρτημένα και άρα δεν αποτελούν βάση του $\mathbb{R}^3$.

---

11 (α) Οποιαδήποτε δύο διανύσματα του $\mathbb{R}^2$ αποτελούν βάση αν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, δηλ. αν δεν είναι το ένα βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου. Θα πρέπει λοιπόν να είναι

$$(-1, k) \neq \lambda (1,1), \quad \lambda \in \mathbb{R}$$

Αν $(-1,k) = \lambda(1,1) \Rightarrow \left.\begin{aligned} -1 &= \lambda \\ k &= \lambda \end{aligned}\right\} \Rightarrow k = -1$.

Αυτή είναι η μόνη τιμή του k που καθιστά τα δύο διανύσματα γραμμικώς εξαρτημένα. Θα πρέπει λοιπόν να είναι

$$k \neq -1.$$

Λύση.

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι καθε στοιχείο του $M_{2\times 2}$, π.χ.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in M_{2\times 2}.$$

γράφεται μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδυασμός των A_1, A_2, A_3, A_4.

Εστω λοιπόν ότι

$$A = a_1 A_1 + a_2 A_2 + a_3 A_3 + a_4 A_4 \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_1 \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_2 \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + a_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + a_4 \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -a_1 + a_2 & a_1 + a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{matrix} -a_1 + a_2 = a_{11} \\ a_1 + a_2 = a_{12}. \end{matrix}\right\} \Rightarrow \quad a_2 = \frac{a_{11} + a_{12}}{2}. \quad a_1 = \frac{a_{12} - a_{11}}{2}.$$

$$a_3 = a_{21} \qquad a_3 = a_{21}$$

$$a_4 = a_{22}. \qquad a_4 = a_{22}.$$

Η λύση αυτή είναι μοναδική. Αρα η $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ είναι μια βάση του $M_{2\times 2}$.

(β) Η βάση S του $M_{2\times 2}$ αποτελειται απο 4 στοιχεία $\Rightarrow$

$$\dim M_{2\times 2} = 4.$$

(γ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$.

Από το (α) βρίσκουμε ότι:

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{a_{12} - a_{11}}{2} = \frac{0-2}{2} = -1 \\ a_2 &= \frac{a_{11} + a_{12}}{2} = \frac{2}{2} = 1. \\ a_3 &= a_{21} = -1 \\ a_4 &= a_{22} = 3 \end{aligned}\right\}$$

Οι συντεταγμένες του A είναι οι $(-1, 1, -1, 3)$.

Πρόβλημα

Εστω $M_{2\times2}$ ο χώρος των 2×2 πινάκων.

1α) Να δείξετε ότι το σύνολο $S = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$, με

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad A_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

αποτελεί μια βάση του $M_{2\times2}$.

1β) Ποια είναι η διάσταση του $M_{2\times2}$;

1γ) Να βρεθούν οι συντεταγμένες του

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

ως προς τη βάση S.

1δ) Να εξεταστεί κατά πόσο τα παρακάτω σύνολα είναι βάσεις του $M_{2\times2}$.

I $S_1 = \{B_1, B_2, B_3\}$.

$$B_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B_3 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

II $S_2 = \{\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4\}$

$$\Gamma_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Gamma_4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

III $S_3 = \{\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4\}$.

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \Delta_4 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

IV $S_4 = \{E_1, E_2, E_3, E_4\}$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

16) I) Γνωρίζουμε ότι $\dim M_{2\times 2} = 4$.
Η S_1 αποτελείται μόνο από 3 στοιχεία, άρα δεν αποτελεί βάση του $M_{2\times 2}$.

II) Η S_2 αποτελείται από 4 στοιχεία (όσα και η διάσταση του $M_{2\times 2}$) αλλά δεν αποτελεί βάση του $M_{2\times 2}$ γιατί ένα από τα στοιχεία της (το Γ_1) είναι το μηδενικό στοιχείο.

III) Η S_3 δεν αποτελεί βάση του $M_{2\times 2}$ γιατί τα $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ δεν είναι γραμμικώς ανεξάρτητα: το Δ_4 γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων στοιχείων.

$$\Delta_4 = \Delta_1 + \Delta_2 + \Delta_3 .$$

IV) Η S_4 αποτελεί βάση του $M_{2\times 2}$.
Κάθε στοιχείο του $M_{2\times 2}$ γράφεται μονοσήμαντα ως γραμμικός συνδυασμός των E_1, E_2, E_3 και E_4.

Η απόδειξη γίνεται όπως στο (α) και αφήνεται ως άσκηση.