ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 4ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ – ΛΥΣΕΙΣ

4.8

$$S=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$\bar{S}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \bar{S}^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}$$

Θα δείξουμε ότι: $S\bar{S}^T=I$

$$S\bar{S}^T=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & -i\\ -i & 1\end{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{bmatrix}1 & i\\ i & 1\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}1-i^2 & i-i\\ i-i & 1-i^2\end{bmatrix}=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{bmatrix}=I$$

Άρα ο S είναι ορθομοναδιαίος.

4.28 Ο A είναι συμμετρικός: $A^T=A$ (1)

Ο B είναι αντισυμμετρικός: $B^T=-B$ (2)

Ο $(A+B)$ είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists$ ο $(A+B)^{-1}$

$$C=(A+B)^{-1}(A-B)$$

(α) $$C^T(A+B)C=\left[(A+B)^{-1}(A-B)\right]^T\underbrace{(A+B)(A+B)^{-1}}_{I}(A-B)$$

$$=(A-B)^T\left[(A+B)^{-1}\right]^T(A-B)$$

$$=(A^T-B^T)\left[(A+B)^T\right]^{-1}(A-B)$$

$$=(A+B)(A^T+B^T)^{-1}(A-B)$$

$$=(A+B)(A-B)^{-1}(A-B)=(A+B)I=A+B$$

(β) $$C^T(A-B)C=\left[(A+B)^{-1}(A-B)\right]^T(A-B)(A+B)^{-1}(A-B)$$

$$=(A-B)^T\left[(A+B)^{-1}\right]^T(A-B)(A+B)^{-1}(A-B)$$

$$=(A^T-B^T)(A^T+B^T)^{-1}(A-B)(A+B)^{-1}(A-B)$$

$$=(A+B)\underbrace{(A-B)^{-1}(A-B)}_{I}(A+B)^{-1}(A-B)$$

$$=(A+B)(A+B)^{-1}(A-B)=I(A-B)=A-B.$$

<u>Σημείωση</u>: Ο $(A+B)^T$ είναι αντιστρέψιμος αφού ο $(A+B)$ είναι αντιστρέψιμος. Επειδή $(A+B)^T=A^T+B^T=A-B$, συμπεραίνουμε ότι ο $A-B$ είναι επίσης αντιστρέψιμος.

(4.31) Ο A είναι συμμετρικός : $A^T = A$ (1)

Ο B είναι αντισυμμετρικός : $B^T = -B$ (2)

Οι A και B είναι αντιμεταθέσιμοι $\Rightarrow$

$$AB = BA \qquad (3)$$

Για να δείξουμε ότι ο $(A+B)^{-1}(A-B)$ είναι ορθογώνιος, αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\left[(A+B)^{-1}(A-B)\right]^T (A+B)^{-1}(A-B) = I \qquad (4)$$

$$\left[(A+B)^{-1}(A-B)\right]^T (A+B)^{-1}(A-B) = (A-B)^T (A+B)^{-T} (A+B)^{-1}(A-B)$$

$$= (A^T - B^T)(A^T + B^T)^{-1}(A+B)^{-1}(A-B)$$

$$= (A+B)(A-B)^{-1}(A+B)^{-1}(A-B)$$

$$= (A+B)\left[(A+B)(A-B)\right]^{-1}(A-B)$$

$$= (A+B)\left[A^2 + BA - AB + B^2\right]^{-1}(A-B)$$

$$= (A+B)\left[A^2 + B^2\right]^{-1}(A-B)$$

$$= (A+B)\left[A^2 + AB - BA + B^2\right]^{-1}(A-B)$$

$$= (A+B)\left[(A-B)(A+B)\right]^{-1}(A-B)$$

$$= (A+B)(A+B)^{-1}(A-B)^{-1}(A-B) = I \cdot I = I$$

4.32 (α) Ο $(I+SA)$ είναι αντιστρέψιμος $\Rightarrow \exists$ ο $(I+SA)^{-1}$

Ο A είναι συμμετρικός $\Rightarrow A^T = A$ (1)

Ο S είναι αντισυμμετρικός $\Rightarrow S^T = -S$ (2)

Δίνεται ότι

$$L = (I-SA)(I+SA)^{-1} \quad (3)$$

και πρέπει να δείξουμε ότι:

$$L^T A L = A \quad (4).$$

$$L^T A L = \left[(I-SA)(I+SA)^{-1}\right]^T A (I-SA)(I+SA)^{-1}$$
$$= (I+SA)^{-T}(I-SA)^T A (I-SA)(I+SA)^{-1}$$
$$= \left[I^T + (SA)^T\right]^{-1}\left[I^T - (SA)^T\right] A (I-SA)(I+SA)^{-1}$$
$$= (I + A^T S^T)^{-1}(I - A^T S^T) A (I-SA)(I+SA)^{-1} \Rightarrow$$
$$L^T A L = (I-AS)^{-1}(I+AS) A (I-SA)(I+SA)^{-1} \quad (5)$$

Θα δείξουμε ότι:

$$(I+AS) A (I-SA) = (I-AS) A (I+SA) \quad (6)$$

Πράγματι,

$$(I+AS) A (I-SA) = (A+ASA)(I-SA)$$
$$= A + ASA - ASA - ASASA$$
$$= A - ASA + ASA - ASASA$$
$$= (I-AS)A + (I-AS)ASA \Rightarrow$$
$$(I+AS) A (I-SA) = (I-AS) A (I+SA) \quad (6)$$

Από τις (5) και (6) $\Rightarrow$

$$L^T A L = (I-AS)^{-1}(I-AS) A (I+SA)(I+SA)^{-1} = IAI = A$$

(β) Τώρα δίνεται ότι

$$L^T A L = A \quad (1)$$

Ο A είναι συμμετρικός $\Rightarrow A^T = A$. (2)

$\exists$ οι $(I+L)^{-1}$ και A^{-1}.

και πρέπει να δείξουμε ότι ο

$$S = (I+L)^{-1}(I-L)A^{-1} \quad (3)$$

είναι αντισυμμετρικός.

Βρίσκουμε πρώτα κάποιες χρήσιμες σχέσεις, από την (1).

$$L^T A L = A \Rightarrow L^T A L + A L = A + A L \Rightarrow$$

$$(L^T + I)\, A L = A (I+L) \Rightarrow (I + L^T)\, A L = A(I+L) \Rightarrow$$

$$(I+L)^T A L = A (I+L) \Rightarrow$$

$$(I+L)^T = A(I+L)(AL)^{-1} = A(I+L)L^{-1}A^{-1} \quad (4)$$

και

$$(I+L)^{-T} = \left[A(I+L)(AL)^{-1}\right]^{-1} \Rightarrow$$

$$(I+L)^{-T} = AL(I+L)^{-1}A^{-1} \quad (5)$$

Με παρόμοιο τρόπο βρίσκουμε ότι:

$$(I-L)^T = -A(I-L)(AL)^{-1} \quad (6)$$

και

$$(I-L)^{-T} = -AL(I-L)^{-1}A^{-1} \quad (7)$$

Τώρα για τον ανάστροφο του S έχουμε:

$$S^T = \left[(I+L)^{-1}(I-L)A^{-1}\right]^T = A^{-T}(I-L)^T(I+L)^{-T}$$

$$= A^{-1}(I-L)^T(I+L)^{-T} \quad \text{(γιατί;)}.$$

$$= -A^{-1}A(I-L)L^{-1}A^{-1}AL(I+L)^{-1}A^{-1} \Rightarrow$$

$$S^T = -(I-L)(I+L)^{-1}A^{-1} \quad (8)$$

Για να είναι ο S αντισυμμετρικός πρέπει να είναι

$$S^T = -S \Leftrightarrow -(I-L)(I+L)^{-1}A^{-1} = -(I+L)^{-1}(I-L)A^{-1}$$

$$\Leftrightarrow (I-L)(I+L)^{-1} = (I+L)^{-1}(I-L). \quad (9)$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ισχύει η (9).

$$(9) \Leftrightarrow (I-L) = (I+L)^{-1}(I-L)(I+L) = (I+L)^{-1}(I-L+L-L^2)$$

$$\Leftrightarrow (I-L) = (I+L)^{-1}\left[I+L-L-L^2\right] = (I+L)^{-1}\left[(I+L)-(I+L)L\right]$$

$$\Leftrightarrow (I-L) = (I+L)^{-1}(I+L)(I-L) = I-L \quad \text{ισχύει.}$$

Πράγματι, ο S είναι αντισυμμετρικός.

(4.34) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$ και $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Εστω ότι $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$$X^T A X = B \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha & -\gamma \\ \beta & -\delta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha^2-\gamma^2 & \alpha\beta-\gamma\delta \\ \alpha\beta-\gamma\delta & \beta^2-\delta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$\alpha^2-\gamma^2 = 0 \quad (1)$

$\alpha\beta-\gamma\delta = 1 \quad (2)$

$\beta^2-\delta^2 = 0 \quad (3)$

Από την (1) $\Rightarrow \gamma = \pm\alpha$. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά.

I $\gamma = \alpha$.

$$\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow \alpha(\beta-\delta) = 1 \quad (\text{Άρα } \alpha \neq 0 \text{ και } \beta-\delta \neq 0). \\ (3) \Rightarrow (\beta-\delta)(\beta+\delta) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta-\delta = 1/\alpha \\ \beta+\delta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = -\delta = \frac{1}{2\alpha}.$$

Ο X έχει τη μορφή $X = \begin{bmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ \alpha & -1/2\alpha \end{bmatrix}$

II $\gamma = -\alpha$

$$\left.\begin{array}{l} (2) \Rightarrow \alpha(\beta+\delta) = 1. \quad (\alpha \neq 0 \text{ και } \beta+\delta \neq 0) \\ (3) \Rightarrow (\beta-\delta)(\beta+\delta) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \beta+\delta = 1/\alpha \\ \beta-\delta = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \beta = \delta = \frac{1}{2\alpha}$$

Ο X έχει τη μορφή $X = \begin{bmatrix} \alpha & 1/2\alpha \\ -\alpha & 1/2\alpha \end{bmatrix}$

4.34β Εστω $X = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$

$$X^T X = 2I \Rightarrow \begin{bmatrix} \alpha & \gamma \\ \beta & \delta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \alpha^2+\gamma^2 & \alpha\beta+\gamma\delta \\ \alpha\beta+\gamma\delta & \beta^2+\delta^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} \alpha^2+\gamma^2 &= 2 \quad (1) \\ \alpha\beta+\gamma\delta &= 0 \quad (2) \\ \beta^2+\delta^2 &= 2 \quad (3) \end{aligned}$$

$(2) \Rightarrow \alpha\beta = -\gamma\delta \Rightarrow \alpha^2\beta^2 = \gamma^2\delta^2 \Rightarrow$

$\alpha^2\beta^2 = (2-\alpha^2)(2-\beta^2) = 4 - 2\alpha^2 - 2\beta^2 + \alpha^2\beta^2 \Rightarrow$

$\alpha^2 + \beta^2 = 2 \qquad (4)$

$(1),(4) \Rightarrow \beta^2 = \gamma^2 \Rightarrow \beta = \pm\gamma \qquad (5)$

Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις ξεχωριστά.

I $\beta = \gamma$

$(2) \Rightarrow \alpha + \delta = 0 \Rightarrow \alpha = -\delta. \Rightarrow \alpha = \pm\sqrt{2-\gamma^2}$ και

$\delta = \mp\sqrt{2-\gamma^2}.$

Η γενική μορφή του X είναι

$$X = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{2-\gamma^2} & \gamma \\ \gamma & \mp\sqrt{2-\gamma^2} \end{bmatrix}$$

II $\beta = -\gamma$

$(2) \Rightarrow \alpha - \delta = 0 \Rightarrow \alpha = \delta \Rightarrow \alpha = \delta = \pm\sqrt{2-\gamma^2}.$

Η γενική μορφή του X είναι

$$X = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{2-\gamma^2} & -\gamma \\ \gamma & \pm\sqrt{2-\gamma^2} \end{bmatrix}$$