ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5ου ΚΕΦΑΛΑΙΟΥ.

5.1α

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & 2 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \to r_2 - 3r_1 \\ r_3 \to r_3 + 2r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -\frac{1}{2} r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 7 & 2 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - 7r_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 11/2 & 41/2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to \frac{2}{11} r_4}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1/2 & -5/2 \\ 0 & 0 & 1 & 41/11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to r_2 + \frac{1}{2} r_3} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & -7/11 \\ 0 & 0 & 1 & 42/11 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - 2r_2.}$$

(κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 3/11 \\ 0 & 1 & 0 & -7/11 \\ 0 & 0 & 1 & 41/11 \end{bmatrix}$$

Ανηγμένος κλιμακωτός

5.1β

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - 2r_1 \\ r_4 \to r_4 - r_1}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \leftrightarrow r_2}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_2 \to \frac{1}{2} r_2 \\ r_3 \to -r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\substack{r_1 \to r_1 - r_3 \\ r_2 \to r_2 + r_3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2.}$$

(κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ανηγμένος κλιμακωτός

5.1γ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - r_1]{\substack{r_2 \to r_2 - 2r_1 \\ r_3 \to r_3 - r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & -1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to -r_2.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - r_2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 4 & 4 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{4} r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - 4r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -4 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - r_4]{\substack{r_1 \to r_1 + r_4 \\ r_2 \to r_2 + 3r_4}}$$

(κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + 4r_3]{r_1 \to r_1 + 3r_3} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + r_2.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ανηγμένος κλιμακωτός.

5.1δ

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 2r_1]{\substack{r_2 \to r_2 - r_1 \\ r_3 \to r_3 - 4r_1}} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{1}{2} r_2.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & -6 & 6 & 15 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 10 & -5 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_4 \to r_4 - 2r_2.]{r_3 \to r_3 + 6r_2.} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to \frac{1}{9} r_3}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 12 & -4 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_4 \to r_4 - 12 r_3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & -1/2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_2 \to r_2 + r_3]{r_1 \to r_1 + 3r_3}$$

(κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 - r_2.} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -7/6. \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ανηγμένος κλιμακωτός.

5.2 v)

$$\begin{bmatrix} i & 1-i & i & 0 \\ 1 & -2 & 0 & i \\ 1-i & -1+i & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to -i r_1} \begin{bmatrix} 1 & -1-i & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & i \\ 1-i & -1+i & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[r_3 \to r_3 - (1-i) r_1]{r_2 \to r_2 - r_1}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & -1+i & -1 & i \\ 0 & 1+i & i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_2 \to \frac{r_2}{-1+i} = -\frac{1}{2}(1+i) r_2.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ 0 & 1+i & i & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_3 \to r_3 - (1+i) r_2.}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1-i & 1 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{r_1 \to r_1 + (1+i) r_2.}$$

(κλιμακωτός)

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1+i & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}(1-i) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ανηγμένος κλιμακωτός

5.4α) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -3 & 3 \end{array}\right]$$

Από το πρόβλημα 5.1β, ο αντίστοιχος ανηγμένος κλιμακωτός είναι ο

$$[R|S] = \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Οι μη μηδενικές γραμμές είναι λιγότερες από τους αγνώστους. Άρα έχουμε άπειρες λύσεις με μια ελεύθερη μεταβλητή. Θέτουμε $x_4 = \lambda$ και έχουμε τη γενική λύση:

$$\begin{aligned} x_1 &= 2+\lambda \\ x_2 &= 1 \\ x_3 &= -2\lambda \\ x_4 &= \lambda. \end{aligned}$$

5.4β) Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -3 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

Ο αντίστοιχος κλιμακωτός είναι ο $[R|S] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

(βλ. πρόβλημα 5.1γ).

Ο $[R|S]$ έχει ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη. Άρα το σύστημα δεν έχει λύση.

<u>Σημείωση</u>: Ο ανηγμένος κλιμακωτός αντιστοιχεί στο σύστημα:

$$\begin{aligned} x_1 \qquad\qquad &= 0 \\ x_2 \qquad &= 0 \\ x_3 &= 0 \\ 0 &= 1 \end{aligned}$$

Η τελευταία εξίσωση είναι αδύνατη.

5.48

Ο επαυξημένος πίνακας του συστήματος είναι ο

$$[A|B] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 0 & -3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 3 & -4 & 0 \\ 2 & 4 & -2 & 4 & -7 & 0 \end{array}\right]$$

Εχουμε λιγότερες εξισώσεις απ' ότι αγνώστους, άρα το σύστημα αποκλείεται να έχει μοναδική λύση.
Στο πρόβλημα 5.18 βρήκαμε τον ανηγμένο κλιμακωτό πίνακα

$$[R|S] = \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -7/6 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & -5/6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Εχουμε 3 μη μηδενικές γραμμές και 5 αγνώστους. Αρα το σύστημα έχει άπειρες λύσεις με 2 ελεύθερες μεταβλητές.
Το αρχικό σύστημα είναι ισοδύναμο με το

$$\begin{aligned} x_1 \qquad + x_3 \qquad - \tfrac{7}{6} x_5 &= 0 \\ x_2 - x_3 \qquad - \tfrac{5}{6} x_5 &= 0 \\ x_4 - \tfrac{1}{3} x_5 &= 0 \end{aligned}$$

Θέτουμε $x_3 = \lambda$ και $x_5 = \mu$ και παίρνουμε τη γενική λύση:

$$\begin{aligned} x_1 &= -\lambda + \tfrac{7}{6}\mu \\ x_2 &= \lambda + \tfrac{5}{6}\mu \\ x_3 &= \lambda \\ x_4 &= \tfrac{1}{3}\mu \\ x_5 &= \mu . \end{aligned}$$