ΛΥΜΕΝΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

ΚΕΦ. 7 : ΓΡΑΜΜΙΚΕΣ ΑΠΕΙΚΟΝΙΣΕΙΣ

Πρόβλημα 1

(α) Δείξτε ότι η απεικόνιση $T: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ με τύπο

$$T(x_1, x_2) = (x_1, x_1 + x_2, 2x_1 - x_2)$$

είναι γραμμική. 40μ.

(β) Διατυπώστε τον ορισμό της εικόνας μιας απεικόνισης. 10μ

1α) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^2$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda T(x) + \mu T(y)$$

$$\begin{aligned}
T(\lambda x + \mu y) &= T(\lambda(x_1, x_2) + \mu(y_1, y_2)) = T(\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_2 + \mu y_2) \\
&= (\lambda x_1 + \mu y_1, \lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2, 2\lambda x_1 + 2\mu y_1 - \lambda x_2 - \mu y_2) \\
&= \lambda(x_1, x_1 + x_2, 2x_1 - x_2) + \mu(y_1, y_1 + y_2, 2y_1 - y_2) \\
&= \lambda T(x) + \mu T(y)
\end{aligned}$$

Άρα η T είναι γραμμική.

1β) Καλούμε εικόνα μιας απεικόνισης $T: V_1 \to V_2$ το πεδίο τιμών της:

$$\operatorname{Im} T = \{ T(x) \in V_2 : x \in V_1 \}.$$

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 29 Νοεμβρίου 2000

Όνομα: ΑΠΤ:

Πρόβλημα 1.

(α) Διατυπώστε τον ορισμό της **εικόνας** μιας απεικόνισης. 5μ.

(β) Διατυπώστε τον ορισμό του **πυρήνα** μιας γραμμικής απεικόνισης. 5μ.

(γ) Δείξτε ότι η απεικόνιση $T : \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}^3$, με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3,\ x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_3)$$

είναι **γραμμική**. 20μ.

(δ) Να βρεθεί ο τύπος της $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3)$ αν

$$T(1,1) = (3,2,4) \qquad \text{και} \qquad T(1,-1) = (1,0,2)$$

20μ.

(α) Καλούμε **εικόνα** της απεικόνισης $T : V_1 \longrightarrow V_2$ και τη συμβολίζουμε με ImT το σύνολο των εικόνων των $x \in V_1$:

$$ImT = \{y \in V_2 \mid y = T(x)\,,\quad x \in V_1\,\}$$

(β) Καλούμε **πυρήνα** της γραμμικής απεικόνισης $T \in \mathcal{L}(V_1, V_2)$ και τον συμβολίζουμε με $KerT$ το σύνολο των $x \in V_1$ που απεικονίζονται μέσω της T στο $\mathbf{0} \in V_2$:

$$KerT = \{x \in V_1 \mid T(x) = \mathbf{0}\,\}$$

(γ) Αρκεί να δείξουμε ότι $\forall x, y \in \mathbf{R}^3$ και $\lambda, \mu \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$T(\lambda x + \mu y) = \lambda\, T(x) + \mu\, T(y)\,.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
T(\lambda x + \mu y) &= T\left[\lambda\,(x_1, x_2, x_3) + \mu\,(y_1, y_2, y_3)\right] = T(\lambda x_1 + \mu y_1,\ \lambda x_2 + \mu y_2,\ \lambda x_3 + \mu y_3) \\
&= (\,\lambda x_1 + \mu y_1 + \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3,\ \lambda x_2 + \mu y_2 + \lambda x_3 + \mu y_3,\ 2\lambda x_1 + 2\mu y_1 - \lambda x_3 - \mu y_3\,) \\
&= \lambda\,(x_1 + x_2 + x_3,\ x_2 + x_3,\ 2x_1 - x_3) + \mu\,(y_1 + y_2 + y_3,\ y_2 + y_3,\ 2y_1 - y_3) \\
&= \lambda\, T(x) + \mu\, T(y)
\end{aligned}$$

Άρα η T είναι γραμμική.

(δ) Τα u_1=(1,1) και u_2=(1,-1) αποτελούν μια βάση του $\mathbf{R}^2$ αφού $dim\mathbf{R}^2$=2 και τα u_1, u_2 είναι γραμμικώς ανεξάρτητα (το ένα δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του άλλου). Άρα κάθε στοιχείο (x_1, x_2) του $\mathbf{R}^2$ γράφεται σαν γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2. Αν

$$(x_1,\ x_2) = \lambda_1\, u_1 + \lambda_2\, u_2 = (\lambda_1 + \lambda_2,\ \lambda_1 - \lambda_2) \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1 + \lambda_2 = x_1 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = x_2 \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow$$

$$\lambda_1 = \frac{x_1 + x_2}{2} \qquad \text{και} \qquad \lambda_2 = \frac{x_1 - x_2}{2}\,.$$

Άρα

$$(x_1,\ x_2) = \frac{x_1 + x_2}{2}\, u_1 + \lambda_2\, \frac{x_1 - x_2}{2}\,.$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε τον τύπο της T:

$$\begin{aligned}
T(x_1,\ x_2) &= T\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\, u_1 + \frac{x_1 - x_2}{2}\, u_2\right) = \frac{x_1 + x_2}{2}\, T(u_1) + \frac{x_1 - x_2}{2}\, T(u_2) \\
&= \frac{x_1 + x_2}{2}\,(3,2,4) + \frac{x_1 - x_2}{2}\,(1,0,2) \quad \Longrightarrow
\end{aligned}$$

$$T(x_1,\ x_2) = (2x_1 + x_2,\ x_1 + x_2,\ 3x_1 + x_2)\,.$$

Πρόβλημα 2.
Έστω η $T \in \mathcal{L}(\mathbf{R}^4, \mathbf{R}^3)$ με τύπο

$$T(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_3 + x_4)\,.$$

(α) Να βρεθούν ο $KerT$, μια βάση του $KerT$ και η $dimKerT$. 20μ.
(β) Να βρεθούν η ImT, μια βάση της ImT και η $dimImT$. 20μ.
(γ) Επαληθεύστε το **θεώρημα τάξης και μηδενικότητας**:

$$dimV_1 = dimKerT + dimImT\,.$$

5μ.
(δ) Είναι η T **επί**; Εξηγείστε την απάντησή σας. 5μ.

(α) Τα στοιχεία του πυρήνα ικανοποιούν την $T(x)$=0. Έτσι

$$(x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_3 + x_4) = (0,0,0) \quad \Longrightarrow \quad \left.\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ x_2 + x_3 &= 0 \\ x_3 + x_4 &= 0 \end{aligned}\right\}.$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με μια ελεύθερη μεταβλητή. Η γενική λύση είναι η

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = (\lambda,\ -\lambda,\ \lambda,\ -\lambda)\,.$$

Άρα

$$KerT = \left\{x \in \mathbf{R}^4 \,|\, x = \lambda\,(1,-1,1,-1),\ \ \lambda \in \mathbf{R}\right\}.$$

Μια βάση του $KerT$ είναι το

$$\{(1,-1,1,-1)\}$$

αφού τον παράγει και είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Έχουμε προφανώς

$$dimKerT = 1\,.$$

(β) Τα στοιχεία της εικόνας είναι της μορφής

$$(x_1 + x_2,\ x_2 + x_3,\ x_3 + x_4) = x_1\,(1,0,0) + x_2\,(1,1,0) + x_3\,(0,1,1) + x_4\,(0,0,1)\,.$$

Τα

$$u_1 = (1,0,0),\ \ u_2 = (1,1,0),\ \ u_3 = (0,1,1),\ \ u_4 = (0,0,1) \in \mathbf{R}^3$$

είναι γραμμικώς εξαρτημένα αφού $dim\mathbf{R}^3$=3. Είναι εύκολο να δούμε, για παράδειγμα, ότι u_3=u_2+u_4-u_1.
Το σύνολο

$$\{u_1, u_2, u_4\}$$

είναι βάση της εικόνας ImT αφού την παράγει και είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (το u_2 δεν είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_4). Άρα

$$dimImT = 3\,.$$

Επειδή η ImT είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$ και $dimImT$=$dim\mathbf{R}^3$=3,

$$ImT = \mathbf{R}^3\,.$$

Παρατηρήσεις
(i) Στο ίδιο συμπέρασμα καταλήγουμε πολύ πιο εύκολα αν εφαρμόσουμε το θεώρημα τάξης και μηδενικότητας.
(ii) Εννοείται ότι κάθε βάση του $\mathbf{R}^3$, π.χ. η συνήθης, είναι βάση της ImT.

(γ)

$$dimKerT + dimImT = 1 + 3 = 4 = dim\mathbf{R}^4\,.$$

(δ) Η T είναι επί αφού ImT=$\mathbf{R}^3$.

Πρόβλημα 14

(α) Πως ορίζουμε τον <u>πυρήνα $N(A)$</u> ενός $m\times n$ πίνακα A; 1μ
(β) Πως ορίζουμε την <u>εικόνα $R(A)$</u> ενός $m\times n$ πίνακα A; 1μ
(γ) Δείξτε ότι ο πυρήνας $N(A)$ του $m\times n$ πίνακα A είναι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. 4μ

(α) Καλούμε πυρήνα του $m\times n$ πίνακα A και τον συμβολίζουμε με $N(A)$ το σύνολο

$$N(A)=\{x\in\mathbb{R}^n : Ax=0\}$$

(β) Καλούμε εικόνα του $m\times n$ πίνακα A και τη συμβολίζουμε με $R(A)$ το σύνολο

$$R(A)=\{y=Ax\in\mathbb{R}^m : x\in\mathbb{R}^n\}$$

(γ) Για να είναι $N(A)\subseteq\mathbb{R}^n$ πρέπει ως γνωστό να ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες του σχετικού θεωρήματος:

(i) Επειδή $A0=0 \Rightarrow 0\in N(A)$

(ii) Εστω ότι $x,y\in N(A)$ οπότε $Ax=Ay=0$

Εχουμε:

$$Ax+Ay=0 \Rightarrow A(x+y)=0 \Rightarrow x+y\in N(A)$$

(κλειστότητα ως προς την πρόσθεση).

(iii) Εστω ότι $x\in N(A)$ οπότε $Ax=0$. Για $\lambda\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\lambda Ax=\lambda\cdot 0=0 \Rightarrow A(\lambda x)=0 \Rightarrow \lambda x\in N(A)$$

(κλειστότητα ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό).

Συμπεραίνουμε ότι ο $N(A)$ είναι πράγματι υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$.

Πρόβλημα 15

Αν
$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&1&1\\1&-1&2&3&1\\2&-2&1&0&2\\1&1&-1&-3&3\end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί ο rank(A) 2μ.

(β) Να βρεθεί η nullity(A) 1μ.

(γ) Να βρεθεί μια βάση του πυρήνα N(A) του A. 2μ.

(α) Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό του A.

$$A=\begin{bmatrix}1&-1&1&1&1\\1&-1&2&3&1\\2&-2&1&0&2\\1&1&-1&-3&3\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&1&1\\0&0&1&2&0\\0&0&-1&-2&0\\0&2&-2&-4&2\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&1&1&1\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\\0&1&-1&-2&1\end{bmatrix}\sim$$

$$\begin{bmatrix}1&-1&1&1&1\\0&1&-1&-2&1\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-1&0&-1&1\\0&1&0&0&1\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&0&-1&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&2&0\\0&0&0&0&0\end{bmatrix}=R$$

ανηγμένος κλιμακωτός

Ο ανηγμένος κλιμακωτός του A έχει 3 μη μηδενικές γραμμές $\Rightarrow$ rank(A) = 3.

(β) Από το θεώρημα τάξης και μηδενικότητας έχουμε:

$$\text{nullity}(A) = \underbrace{n}_{\text{αριθμός στηλών του } A} - \text{rank}(A) = 5-3=2.$$

(γ) $N(A)=\{X\in\mathbb{R}^5 : AX=0\}$. Το γραμμικό σύστημα $AX=0$ είναι ισοδύναμο με το $RX=0 \Rightarrow$

$$\left.\begin{aligned} x_1 \qquad - x_4 + 2x_5 &= 0\\ x_2 \qquad\qquad + x_5 &= 0\\ x_3 + 2x_4 \qquad &= 0\end{aligned}\right\}$$

Έχουμε άπειρες λύσεις με δύο ελεύθερες μεταβλητές. Θέτοντας $x_4=\lambda$ και $x_5=\mu$, έχουμε τη γενική λύση:

$$X=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\\x_5\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\lambda-2\mu\\-\mu\\-2\lambda\\\lambda\\\mu\end{bmatrix}=\lambda\begin{bmatrix}1\\0\\-2\\1\\0\end{bmatrix}+\mu\begin{bmatrix}-2\\-1\\0\\0\\1\end{bmatrix}$$

Το σύνολο $\{(1,0,-2,1,0)^T, (-2,-1,0,0,1)^T\}$ αποτελεί μια βάση του N(A).