ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Εαρινό εξάμηνο 2017-2018, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, Διάρκεια: 2 ώρες
18 Νοεμβρίου, 2017

Δίνονται 14 προβλήματα που αντιστοιχούν σε 130 μονάδες με άριστα το 100!

ΟΝΟΜΑ: Αρ. Πολ. Ταυτ.

Πρόβλημα 1. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Αλγεβρικό συμπλήρωμα**	**1μ.**
(β) **'Ιχνος** πίνακα	**1μ.**
(γ) **Ερμιτιανός πίνακας**	**1μ.**
(δ) **Υποομάδα**	**1μ.**
(ε) **Αβελιανή ομάδα**	**2μ.**

(α) Καλούμε **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου a_{ij} ενός πίνακα $A \in M_{m\times n}$ την προσημασμένη ελάσσονα ορίζουσα του στοιχείου αυτού:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

(η ελάσσονα ορίζουσα M_{ij} είναι η ορίζουσα του πίνακα που προκύπτει όταν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη).

(β) Καλούμε **ίχνος** (trace) ενός n×n πίνακα $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ και το συμβολίζουμε με trA το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του:

$$trA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

(γ) Ο $A \in M_{n\times n}$ καλείται ερμιτιανός αν $A^* = A$

(δ) Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Το υποσύνολο $H \subseteq G$ καλείται **υποομάδα** της *G* αν ισχύουν τα εξής:
(i) $e \in H$
(ii) Αν $x, y \in H$ τότε $x \cdot y \in H$ (το *H* είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$).
(iii) Αν $x \in H$ τότε $x^{-1} \in H$ (το *H* είναι κλειστό ως προς την αντιστροφή).

(ε) Το ζεύγος $(G,\cdot)$ όπου G ένα μη κενό σύνολο και $\cdot$ μια πράξη στο G καλείται **αβελιανή ομάδα** αν ισχύουν τα εξής:
(i) Η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική, δηλ. $a(bc) = (ab)c \quad \forall a,b,c \in G$
(ii) Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ ως προς την πράξη $\cdot$ τέτοιο ώστε $ae = ea = a \quad \forall a \in G$
(iii) Κάθε στοιχείο $a \in G$ έχει αντίστροφο $a^{-1} \in G$ τέτοιο ώστε $aa^{-1} = a^{-1}a = e$
(iv) Η πράξη $\cdot$ είναι αντιμεταθετική, δηλ. $ab = ba \quad \forall a,b \in G$

Πρόβλημα 2

(α) Έστω το $K' \subset \mathbf{R}$ και $+$ και $\cdot$ οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στον $\mathbf{R}$. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για αν είναι η τριάδα $(K', +, \cdot)$ σώμα; **2μ.**

(β) Εξηγήστε γιατί το σύνολο $\{0,1\}$ με τις συνήθεις πράξεις + και $\cdot$ <u>δεν είναι</u> σώμα. **1μ.**

(γ) Να οριστούν κατάλληλες πράξεις + και $\cdot$ για να είναι το σύνολο $\{0,1\}$ σώμα. **2μ.**

(α) Το $(K', +, \cdot)$ είναι σώμα αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

(i) $0 \in K'$ και $1 \in K'$

(ii) Το K' είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

(iii) Αν $x \in K'$ τότε $-x \in K'$ (κάθε στοιχείο του K' έχει αντίθετο στο K').

(iv) Αν $x \in K' - \{0\}$ τότε $x^{-1} \in K' - \{0\}$ (κάθε στοιχείο του $K' - \{0\}$ έχει αντίστροφο στο K').

(β) Το $\{0,1\}$ δεν είναι σώμα με τις συνήθεις πράξεις + και $\cdot$ γιατί δεν είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση:

$$1 + 1 = 2 \notin \{0,1\}$$

(γ) Ορίζουμε τις πράξεις + και $\cdot$ ως εξής:

$$0 + 0 = 1 + 1 = 0$$

$$1 + 0 = 0 + 1 = 1$$

$$0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 1 \cdot 0 = 0$$

$$1 \cdot 1 = 0$$

Παρατηρούμε ότι ο πολλαπλασιασμός $\cdot$ είναι ο συνήθης. Το {0,1} είναι τώρα κλειστό ως προς τις δύο πράξεις. Επίσης ικανοποιείται τώρα και η συνθήκη (iii) αφού το 1 έχει ως αντίθετο τον εαυτό του. Οι συνθήκες (i)-(iv) ικανοποιούνται. Άρα το ({0,1},+,$\cdot$) είναι σώμα.

Πρόβλημα 3

(α) Έστω *V* ένας διανυσματικός χώρος και $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολό του. Δείξτε ότι αν μερικά στοιχεία του S είναι γραμμικώς εξαρτημένα, τότε όλα τα στοιχεία του S είναι γραμμικά εξαρτημένα. **4μ.**

(β) Να βρεθούν οι **συντεταγμένες** του $u=(1,2,3)$ ως προς τη βάση $B=\{u_1=(1,1,1),u_2=(0,1,2),u_3=(0,1,-1)\}$ του $\mathbf{R}^3$. **3μ.**

(γ) Να **επεκταθεί** το σύνολο $B=\{u_1=(1,2,-3),u_2=(1,1,2)\}$ σε μια βάση του $\mathbf{R}^3$. **3μ.**

(α) Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι *k* από τα στοιχεία του *S* με k<*n* είναι γραμμικά εξαρτημένα. Άρα υπάρχουν $\lambda_1,\lambda_2,\cdots,\lambda_k\in\mathbf{R}$ που δεν είναι όλα μηδέν έτσι ώστε

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_ku_k=\mathbf{0}\quad\Rightarrow\quad \lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\cdots+\lambda_ku_k+0\cdot u_{k+1}+\cdots+0\cdot u_n=\mathbf{0}$$

Επειδή δεν είναι όλοι οι συντελεστές μηδέν, συμπεραίνουμε ότι όλα τα στοιχεία του S είναι γραμμικά εξαρτημένα.

(β) Έστω $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ οι συντεταγμένες του u ως προς τη βάση *B*. Ισχύει τότε

$$\lambda_1u_1+\lambda_2u_2+\lambda_3u_3=u\quad\Rightarrow\quad \lambda_1(1,1,1)+\lambda_2(0,1,2)+\lambda_3(0,1,-1)=(1,2,3)\quad\Rightarrow$$

$$(\lambda_1,\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3,\lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3)=(1,2,3)\quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned}\lambda_1 &=1\\ \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 &=2\\ \lambda_1+2\lambda_2-\lambda_3 &=3\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=1\quad\text{και}\quad \lambda_3=0$$

Πράγματι, $u=u_1+u_2$. Άρα οι συντεταγμένες του u ως προς τη βάση *B* είναι οι (1,1,0).

(γ) Παρατηρούμε ότι το *B* περιέχει 2 γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία του $\mathbf{R}^3$ (αφού το u_1 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του u_2). Επειδή $\dim\mathbf{R}^3=3$, αρκεί να βρούμε ένα τρίτο στοιχείο $u_3\in\mathbf{R}^3$ τέτοιο ώστε το σύνολο $\{u_1,u_2,u_3\}$ να είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αρκεί λοιπόν το u_3 να μην είναι γραμμικός συνδυασμός των u_1 και u_2. Επιλέγουμε λοιπόν το

$$u_3=(1,0,0)$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι το $\{u_1,u_2,u_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και άρα είναι βάση του $\mathbf{R}^3$.

Πρόβλημα 4. Έστω το διάνυσμα $u = (1, -2, 2) \in \mathbf{R}^3$

(α) Να βρεθεί η **νόρμα** του u **1μ.**

(β) Έστω W_1 η γραμμική θήκη του u. Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_1. **2μ.**

(γ) Έστω W_2 ο χώρος των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^3$ που είναι **ορθογώνια** με το u. Να βρεθεί η γενική μορφή των στοιχείων του W_2. **2μ.**

(δ) Δείξτε ότι ο W_2 είναι **υπόχωρος** του $\mathbf{R}^3$. **4μ**

(ε) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_2. **2μ**

(στ) Δείξτε ότι

$$\mathbf{R}^3 = W_1 \oplus W_2$$

4μ.

(α) $\|u\| = \sqrt{1+4+4} = 3$

(β) Είναι φανερό ότι

$$W_1 = \left\{ v \in \mathbf{R}^3 \mid v = \lambda u = \lambda(1, -2, 2),\ \lambda \in \mathbf{R} \right\}$$

Μια βάση του W_1 είναι το {*u*} και έτσι $\dim W_1 = 1$.

(γ) Έστω $u = (a, b, c)$ ένα στοιχείο του W_2. Ισχύει τότε

$$v \cdot u = 0 \quad \Rightarrow \quad (a, b, c) \cdot (1, -2, 2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a - 2b + 2c = 0 \quad \Rightarrow \quad a = 2b - 2c$$

Άρα η γενική μορφή των στοιχείων του W_2 είναι $v = (2b - 2c, b, c), \quad b, c \in \mathbf{R}$

(δ) Θα δείξουμε ότι επαληθεύονται οι 3 συνθήκες του Θ2.2.2.

(i) $\mathbf{0} = (2 \cdot 0 - 2 \cdot 0, 0, 0) \in W_2$

(ii) Για τα $u_1 = (2b_1 - 2c_1, b_1, c_1), \quad u_2 = (2b_2 - 2c_2, b_2, c_2) \in W_2$ έχουμε

$$u_1 + u_2 = \left(2(b_1 + b_2) - 2(c_1 + c_2), b_1 + b_2, c_1 + c_2 \right) \in W_2$$

(το W_2 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση).

(iii) Αν $\lambda \in \mathbf{R}$ και $u = (2b - 2c, b, c) \in W_2$ έχουμε

$$\lambda u = (2\lambda b - 2\lambda c,\ \lambda b,\ \lambda c) \in W_2$$

(το W_2 είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Άρα το W_2 είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^3$.

(ε) Επειδή κάθε στοιχείο $v = (2b - 2c, b, c) \in W_2$ γράφεται

$$v = (2b - 2c, b, c) = b(2, 1, 0) + c(-2, 0, 1)$$

το σύνολο $\{w_1 = (2, 1, 0),\ w_2 = (-2, 0, 1)\}$ παράγει τον W_2. Αποτελεί δε βάση του W_2 επειδή είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο αφού το w_1 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του w_2. Άρα λοιπόν $\dim W_2 = 2$.

(στ) Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε στοιχείο του $\mathbf{R}^3$ γράφεται μονοσήμαντα σαν άθροισμα ενός στοιχείου του W_1 και ενός στοιχείου του W_2. Αυτό ισχύει γιατί το σύνολο $\{u = (1, -2, 2),\ w_1 = (2, 1, 0),\ w_2 = (-2, 0, 1)\}$ αποτελεί βάση του $\mathbf{R}^3$. Επειδή κάθε στοιχείο του $\mathbf{R}^3$ γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων u, w_1, w_2 είναι φανερό ότι γράφεται μονοσήμαντα σαν άθροισμα ενός στοιχείου του W_1 και ενός στοιχείου του W_2.

Πρόβλημα 5

(α) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B \in M_{n\times m}$, δείξτε ότι $tr(AB) = tr(BA)$ **4μ.**

(β) Αν $A, P \in M_{n\times n}$ και ο P είναι αντιστρέψιμος δείξτε ότι $tr(A) = tr(P^{-1}AP)$ **2μ.**

(γ) Αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι συμμετρικός και ενελικτικός δείξτε ότι $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}^2 = n$ **3μ.**

(α) Για τα δύο γινόμενα έχουμε

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times m} \quad \Rightarrow \quad tr(AB) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{ki}$$

και

$$BA = \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{kj}\right)_{n\times n} \quad \Rightarrow \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik}a_{ki} = tr(AB)$$

(β) Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα που δείξαμε πιο πάνω.

$$tr(P^{-1}AP) = tr[P^{-1}(AP)] = tr[(AP)P^{-1}] = tr(AI) = trA$$

(γ) Εφόσον ο *A* είναι ενελικτικός ισχύει

$$A^2 = I \quad \Rightarrow \quad tr\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{kj}\right) = trI = n \quad \Rightarrow \quad \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}a_{ki} = n$$

Επειδή ο *A* είναι συμμετρικός ισχύει $a_{ki} = a_{ik}$ και έτσι

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}^2 = n$$

Πρόβλημα 6. Έστω ο σύνθετος πίνακας

$$P = \begin{bmatrix} I & A \\ A & O \end{bmatrix}$$

όπου ο A είναι αντιστρέψιμος πίνακας.

(α) Να βρεθεί ο P^{-1} (σε σύνθετη μορφή). **6μ.**

(β) Να βρεθεί ο αντίστροφος του

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

4μ.

(α) Έστω ότι $P^{-1} = \begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix}$ οπότε $PP^{-1} = \begin{bmatrix} I & A \\ A & O \end{bmatrix}\begin{bmatrix} B & C \\ D & E \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \Rightarrow$

$$\begin{bmatrix} IB+AD & IC+AE \\ AB+OD & AC+OE \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} B+AD & C+AE \\ AB & AC \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{r} B+AD = I \\ C+AE = O \\ AB = O \\ AC = I \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} C = A^{-1} \\ B = O \\ E = -A^{-2} \\ D = A^{-1} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad P^{-1} = \begin{bmatrix} O & A^{-1} \\ A^{-1} & -A^{-2} \end{bmatrix}$$

(β) Παρατηρούμε ότι ο *P* έχει τη μορφή του σύνθετου πίνακα στο (α) με

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{2-3}\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

και

$$A^{-2} = A^{-1}A^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & -9 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Με βάση το αποτέλεσμα στο (α),

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 3 & -7 & 9 \\ 1 & -1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 7. Αν

$$A=(a_{ij})_{n\times n}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(α) Βρείτε το γενικό στοιχείο του *A* (χρησιμοποιήστε το *δέλτα του Kronecker*). **1μ.**

(β) Δείξτε ότι ισχύει

$$A^k=\begin{cases} A, & k \text{ περιττός} \\ I, & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

9μ.

(α) Παρατηρούμε ότι

$$A=(\delta_{i,n+1-j})_{n\times n}$$

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι ο *A* είναι ενελικτικός, δηλ.

$$A^2=I$$

Σε αυτή την περίπτωση, αν *k*=2*m* άρτιος έχουμε

$$A^k=A^{2m}=(A^2)^m=I^m=I$$

Αν *k*=2*m*+1,

$$A^k=A^{2m+1}=A^{2m}A=IA=A$$

Για τον A^2 έχουμε

$$A^2=\left(\sum_{k=1}^{n}\delta_{i,n+1-k}\delta_{k,n+1-j}\right)_{n\times n}$$

Το $\delta_{i,n+1-k}$ δεν είναι μηδέν μόνο για $i=n+1-k \quad \Rightarrow \quad k=n+1-i$. Άρα επιβιώνει μόνο ο αντίστοιχος όρος του αθροίσματος και έχουμε:

$$A^2=\left(1\cdot\delta_{n+1-i,n+1-j}\right)_{n\times n}=\left(\delta_{i,j}\right)_{n\times n}=I_n$$

Άρα πράγματι

$$A^k=\begin{cases} A, & k \text{ περιττός} \\ I, & k \text{ άρτιος} \end{cases}$$

Πρόβλημα 8. Να επιλυθούν το πιο κάτω γραμμικά συστήματα:

(α) $\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + \quad x_3 &= \ \ 2 \\ -x_1 + 2x_2 \qquad\quad &= -1 \\ 5x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 20 \end{aligned}$ (β) $\begin{aligned} x + 2y + 3z + w &= -1 \\ -x + \ y + \ \ z - w &= \ \ 2 \\ x + 5y + 7z + w &= \ \ 1 \end{aligned}$ **6μ.**

(α) Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό $[R|S]$ του επαυξημένου πίνακα

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ -1 & 2 & 0 & | & -1 \\ 5 & -2 & 2 & | & 20 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 4 & 1 & | & 1 \\ 0 & -12 & -3 & | & 10 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & | & 2 \\ 0 & 4 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & | & 13 \end{bmatrix}$$

Επειδή έχουμε ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη, το σύστημα είναι αδύνατο.

(β) Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό $[R|S]$ του επαυξημένου πίνακα

$$[A|B] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & -1 \\ -1 & 1 & 1 & -1 & | & 2 \\ 1 & 5 & 7 & 1 & | & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & | & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & | & -1 \\ 0 & 3 & 4 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 1 \end{bmatrix}$$

Έχουμε ξανά ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη, άρα το σύστημα είναι αδύνατο.

Πρόβλημα 9. Έστω οι πίνακες:

$$A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-4&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&2&0\\0&0&0&-3\end{bmatrix},\quad D=\begin{bmatrix}1&2&2&0\\1&2&0&-1\\0&1&1&-1\\0&0&1&0\end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν οι αντίστροφοι των πιο πάνω πινάκων (αν υπάρχουν) **7μ.**

(β) Να υπολογιστούν τα γινόμενα ABD, CAB, AC^{2018} και $A^{2017}BAD$. **8μ.**

(α) Παρατηρούμε ότι ο *A* είναι στοιχειώδης, $A=E_{2,4}$, και έτσι

$$A^{-1}=\left(E_{2,4}\right)^{-1}=E_{2,4}=A=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

Ο *B* είναι επίσης στοιχειώδης, $B=E_{4,2}^{-4}$:

$$B^{-1}=\left(E_{4,2}^{-4}\right)^{-1}=E_{4,2}^{4}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&4&0&1\end{bmatrix}$$

Ο *C* είναι διαγώνιος και έτσι

$$C^{-1}=\begin{bmatrix}-1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1/2&0\\0&0&0&-1/3\end{bmatrix}$$

Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό του σύνθετου πίνακα [*D*|*I*]:

$$[D\,|\,I]=\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&2&0&1&0&0&0\\1&2&0&-1&0&1&0&0\\0&1&1&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&2&0&1&0&0&0\\0&0&-2&-1&-1&1&0&0\\0&1&1&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&2&2&0&1&0&0&0\\0&1&1&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&-2&-1&-1&1&0&0\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&2&1&0&-2&0\\0&1&1&-1&0&0&1&0\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&-2&-1&-1&1&0&0\end{array}\right]$$

$$\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&2&1&0&-2&0\\0&1&0&-1&0&0&1&-1\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&-1&-1&1&0&2\end{array}\right]\sim\left[\begin{array}{cccc|cccc}1&0&0&0&-1&2&-2&4\\0&1&0&0&1&-1&1&-3\\0&0&1&0&0&0&0&1\\0&0&0&1&-1&1&0&2\end{array}\right]$$

Άρα

$$D^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

(β) Επειδή $ABD = E_{2,4}E_{4,2}^{-4}D$ ο ABD προκύπτει από τον D εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $r_4 \to r_4 - 4r_2$ και $r_2 \leftrightarrow r_4$. Βρίσκουμε έτσι ότι

$$ABD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ -4 & -8 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Επειδή $CAB = C\hat{E}_{2,4}\hat{E}_{2,4}^{-4}$ ο CAB προκύπτει από τον C εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $c_2 \leftrightarrow c_4$ και $c_2 \to c_2 - 4c_4$. Βρίσκουμε έτσι ότι

$$CAB = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Έχουμε

$$AC^{2018} = E_{2,4}C^{2018} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{2018} \\ 0 & 0 & 2^{2018} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Επειδή $A^2 = I$, $A^{2017}BAD = ABAD$. Ο τελευταίος πίνακας προκύπτει από τον D εφαρμόζοντας διαδοχικά τους μετασχηματισμούς $r_2 \leftrightarrow r_4$, $r_4 \to r_4 - 4r_2$ και $r_2 \leftrightarrow r_4$. Βρίσκουμε έτσι ότι

$$A^{2017}BAD = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & -4 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 10

(α) Δείξτε ότι ο $A \in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος **αν και μόνο αν** $rank(A) = n$. **3μ.**

(β) Αν $A \in M_{m\times n}$ και ο $B \in M_{m\times m}$ είναι αντιστρέψιμος δείξτε ότι $rank(BA) = rank(A)$. **3μ.**

(γ) Έστω τα διανύσματα του $\mathbf{R}^5$:

$$u_1 = (2,1,3,2,2), u_2 = (0,0,1,1,1), u_3 = (2,1,2,1,1), u_4 = (1,0,2,1,1), u_5 = (1,1,1,1,1)$$

Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** της γραμμικής θήκης του $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$. **6μ.**

(α) Ως γνωστό $rank(A) = rank(R)$, όπου R ο ανηγμένος κλιμακωτός του A. Αν $rank(A) = n$, τότε $rank(R) = n$ και άρα ο R δεν έχει μηδενική γραμμή, οπότε $R = I$. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Για το αντίστροφο, αν $rank(A) \neq n$, θα έχουμε αναγκαστικά $rank(A) < n$ οπότε ο *R* έχει μηδενική γραμμή και έτσι $R \neq I$, οπότε ο *A* δεν είναι αντιστρέψιμος. Άρα αν ο *A* είναι αντιστρέψιμος έχουμε αναγκαστικά $rank(A) = n$.

(β) Ο B ως αντιστρέψιμος πίνακας είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων και έτσι

$$BA = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

Παρατηρούμε ότι οι A και BA είναι γραμμοϊσοδύναμοι και άρα $rank(BA) = rank(A)$.

(γ) Κατασκευάζουμε τον πίνακα *A* που έχει ως γραμμές τα δοσμένα διανύσματα. Οι μη μηδενικές γραμμές του ανηγμένου κλιμακωτού του *A* αποτελούν μια βάση της γραμμικής θήκης του $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ και η διάσταση της γραμμικής θήκης είναι ο βαθμός του *A*.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -2 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 2 & 2 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = R$$

Οι τρεις πρώτες γραμμές του *R* αποτελούν μια βάση της γραμμικής θήκης του $\{u_1,u_2,u_3,u_4,u_5\}$ και η διάσταση της τελευταίας είναι ίση με $rank(A) = 3$

Πρόβλημα 11. Έστω οι πίνακες

$$A=\begin{bmatrix}1&2&2&1&8\\2&4&5&4&24\\1&2&2&2&11\\3&6&7&5&32\end{bmatrix} \text{ και } B=\begin{bmatrix}8\\20\\9\\28\end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθούν οι $rank(A)$ και $rank([A|B])$. **3μ.**

(β) Είναι το σύστημα $AX=B$ **συμβιβαστό**; **1μ.**

(γ) Αν ναι, να βρεθεί η **λύση** του συστήματος. **2μ.**

(α) Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό $[R|S]$ του επαυξημένου πίνακα

$$[A|B]=\begin{bmatrix}1&2&2&1&8&|&8\\2&4&5&4&24&|&20\\1&2&2&2&11&|&9\\3&6&7&5&32&|&28\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&2&1&8&|&8\\0&0&1&2&8&|&4\\0&0&0&1&3&|&1\\0&0&1&2&8&|&4\end{bmatrix}$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&2&0&-3&-8&|&0\\0&0&1&2&8&|&4\\0&0&0&1&3&|&1\\0&0&0&0&0&|&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&0&0&1&|&3\\0&0&1&0&2&|&2\\0&0&0&1&3&|&1\\0&0&0&0&0&|&0\end{bmatrix}=[R|S]$$

Οι R και $[R|S]$ έχουν τρεις μη μηδενικές γραμμές και έτσι

$$rank(A)=rank([A|B])=3$$

(β) Αφού $rank(A)=rank([A|B])$ το σύστημα $AX=B$ είναι συμβιβαστό.

(γ) Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με δύο ελεύθερες μεταβλητές, τις x_2 και x_5 . Έχουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned}x_1&=3-2\lambda-\mu\\x_2&=\lambda\\x_3&=2-2\mu\\x_4&=1-3\mu\\x_5&=\mu\end{aligned}$$

Πρόβλημα 12

(α) Διατυπώστε τον ορισμό της **ορίζουσας** τετραγωνικού πίνακα. **1μ.**

(β) Δίνεται ότι ορίζουσα τάξης 7 περιλαμβάνει 7! όρους ένας εκ των οποίων είναι της μορφής

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{13}a_{24}a_{32}a_{47}a_{56}a_{61}a_{ij}$$

Να βρεθούν η μετάθεση σ που αντιστοιχεί στον πιο πάνω όρο και το πρόσημό της. **2μ.**

(γ) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ορίζουσας δείξτε ότι

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A, \quad A \in M_{n\times n}, \quad \lambda \in \mathbf{R}$$

3μ.

(δ) Χρησιμοποιώντας τον ορισμό, δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & b \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ b & 0 & 0 & a \end{vmatrix} = \left(a^2 - b^2\right)^2$$

4μ.

(α) Καλούμε ορίζουσα ενός τετραγωνικού πίνακα $A \in M_{n\times n}$ το άθροισμα

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}$$

(β) Ο όρος είναι ο

$$\operatorname{sgn}(3,4,2,7,6,1,5)\, a_{13}a_{24}a_{32}a_{47}a_{56}a_{61}a_{75}$$

και η μετάθεση είναι η $\sigma = (3,4,2,7,6,1,5)$ το πρόσημο της οποίας είναι

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{2+2+1+3+2+0+0} = (-1)^{10} = 1$$

(γ) Επειδή $\lambda A = (\lambda a_{ij})$, έχουμε

$$\det(\lambda A) = \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)\, \lambda a_{1\sigma_1} \lambda a_{2\sigma_2} \cdots \lambda a_{n\sigma_n} = \lambda^n \sum_{\sigma\in S_n} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} = \lambda^n \det A$$

(δ) Παρατηρούμε ότι από το άθροισμα

$$\det A = \sum_{\sigma\in S_4} \operatorname{sgn}(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4)\, a_{1\sigma_1} a_{2\sigma_2} a_{3\sigma_3} a_{4\sigma_4}$$

επιβιώνουν μόνο 4 όροι:

$$\det A = \operatorname{sgn}(1,2,3,4)\, a_{11}a_{22}a_{33}a_{44} + \operatorname{sgn}(1,3,2,4)\, a_{11}a_{23}a_{32}a_{44} + \operatorname{sgn}(4,2,3,1)\, a_{14}a_{22}a_{33}a_{41}$$
$$+ \operatorname{sgn}(4,3,2,1)\, a_{14}a_{23}a_{32}a_{41} \quad \Rightarrow$$
$$\det A = +a^4 - a^2b^2 - b^2a^2 + b^4 = (a^2 - b^2)^2$$

Πρόβλημα 13

(α) **Με τη χρήση των ιδιοτήτων ορίζουσας**, να βρεθεί η τιμή της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

3μ.

(β) Αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι *ορθογώνιος* δείξτε ότι $\det(A) = \pm 1$ **2μ.**

(γ) Αν ο $A \in M_{(2n+1)\times(2n+1)}$ είναι *αντισυμμετρικός* δείξτε ότι $\det(A) = 0$ **2μ.**

(δ) Να δειχθεί η πρόταση**:** αν $A, B \in M_{n\times n}$ τότε ισχύει $\det(AB) = \det A \ \det B$ **4μ.**

(α)

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+b+c & b & c \\ 1+a+b+c & 1+b & c \\ 1+a+b+c & b & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 1+b & c \\ 1 & b & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1+a+b+c$$

(β) Εφόσον ο *A* είναι ορθογώνιος

$$AA^T = I \quad\Rightarrow\quad \det(AA^T) = \det I = 1 \quad\Rightarrow\quad \det A \det A^T = 1 \quad\Rightarrow\quad (\det A)^2 = 1 \quad\Rightarrow\quad \det A = \pm 1$$

(γ) Εφόσον ο *A* είναι αντισυμμετρικός

$$A^T = -A \quad\Rightarrow\quad \det(A^T) = \det(-A) = (-1)^{2n+1}\det A \quad\Rightarrow\quad \det A = -\det A \quad\Rightarrow\quad \det A = 0$$

(δ) Αν κάποιος από τους *A* και *B* δεν είναι αντιστρέψιμος, τότε και ο *AB* δεν είναι αντιστρέψιμος και η πρόταση ισχύει αφού

$$\det(AB) = 0 = \det A \det B$$

Αν τώρα οι *A* και *B* είναι αμφότεροι αντιστρέψιμοι τότε γράφονται σαν γινόμενα στοιχειωδών πινάκων:

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k \quad \text{και} \quad B = E_1^{'} E_2^{'} \cdots E_\ell^{'}$$

οπότε

$$AB = E_1 E_2 \cdots E_k E_1^{'} E_2^{'} \cdots E_\ell^{'} \quad\Rightarrow$$

$$\det(AB) = \det(E_1 E_2 \cdots E_k E_1^{'} E_2^{'} \cdots E_\ell^{'}) = \det(E_1 E_2)\cdots E_k) \det(E_1^{'} E_2^{'} \cdots E_\ell^{'}) \quad\Rightarrow$$

$$\det(AB) = \det A \det B$$

Πρόβλημα 14. Αν

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

να βρεθούν τα εξής:

(α) Η **ορίζουσα** του *A*. **2μ.**

(β) Ο **συμπληρωματικός πίνακας** του *A*. **2μ.**

(γ) Ο **αντίστροφος** του *A*. **1μ.**

(α)

$$\det A = \begin{vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

(β)

$$adj(A) = \begin{bmatrix} +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ +\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} & +\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(γ)

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{\det(A)} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 3 & -3 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$