ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Εαρινό εξάμηνο 2021-2022, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ, Διάρκεια: 2 ώρες
13 Νοεμβρίου, 2021

Δίνονται 13 προβλήματα που αντιστοιχούν σε 130 μονάδες με άριστα το 100!

ΟΝΟΜΑ: Αρ. Πολ. Ταυτ.

Πρόβλημα 1. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) **Συντεταγμένες** στοιχείου διανυσματικού χώρου **1μ.**
(β) **Σχέση ισοδυναμίας** **1μ.**
(γ) **Πρόσημο μετάθεσης** **1μ.**
(δ) **Αβελιανή ομάδα** **2μ.**
(ε) **Διάσταση** διανυσματικού χώρου **1μ.**

(α) Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και ένα διάνυσμα $u \in V$. Καλούμε **συντεταγμένες** του $u \in V$ ως προς μια βάση $B = \{u_1, \cdots, u_n\}$ του V τους αριθμούς $a_1, \cdots, a_n \in K$ για τους οποίους ισχύει

$$u = a_1 u_1 + \cdots + a_n u_n$$

(β) Μια σχέση $\sim$ στο σύνολο A καλείται **σχέση ισοδυναμίας** (equivalence relation) αν
(i) $a \sim a \quad \forall a \in A$ (αυτοπαθής ή ανακλαστική ιδιότητα)
(ii) $a \sim b$ αν και μόνο αν $b \sim a, \quad a, b \in A$ (συμμετρική ιδιότητα)
(iii) Αν $a \sim b$ και $b \sim c$ τότε $a \sim c, \quad a, b, c \in A$ (Μεταβατική ιδιότητα)
(γ) Ορίζουμε ως **πρόσημο** μιας μετάθεσης $\sigma \in S_n$ τη συνάρτηση $\operatorname{sgn} : S_n \to \{-1, 1\}$ με τύπο

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = (-1)^{\mu(\sigma)}$$

όπου $\mu(\sigma)$ η δείκτρια (δηλ. το πλήθος των αντιστροφών) της μετάθεσης. Έτσι έχουμε

$$\operatorname{sgn}(\sigma) = \begin{cases} +1, & \sigma \text{ άρτια} \\ -1, & \sigma \text{ περιττή} \end{cases}$$

(δ) Το ζεύγος $(G, \cdot)$ όπου G ένα μη κενό σύνολο και $\cdot$ μια πράξη στο G καλείται **αβελιανή ομάδα** αν ισχύουν τα εξής:
(i) Η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική, δηλ. $a(bc) = (ab)c \quad \forall a, b, c \in G$
(ii) Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο $e \in G$ ως προς την πράξη $\cdot$ τέτοιο ώστε $ae = ea = a \quad \forall a \in G$
(iii) Κάθε στοιχείο $a \in G$ έχει αντίστροφο $a^{-1} \in G$ τέτοιο ώστε $aa^{-1} = a^{-1}a = e$
(iv) Η πράξη $\cdot$ είναι αντιμεταθετική, δηλ. $ab = ba \quad \forall a, b \in G$

(ε) Το πλήθος n των στοιχείων μιας βάσης του $V \neq \{\mathbf{0}\}$ καλείται **διάσταση** (dimension) του V και συμβολίζεται με $dimV = n$. Αν $V = \{\mathbf{0}\}$, τότε $dimV = 0$.

Πρόβλημα 2. Έστω W_1 ο χώρος που παράγεται από το $A=\{u_1=(1,1,0,0,0), \quad u_2=(0,0,0,1,1)\}$.

(α) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_1. **3μ.**

(β) Δείξτε ότι ο W_1 είναι **υπόχωρος** του $\mathbf{R}^5$. **4μ.**

(γ) Έστω W_2 ο χώρος των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^5$ που είναι **ορθογώνια** με τα u_1 και u_2. Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_2. **5μ**

(δ) Εξηγήστε κατά πόσον ισχύει η $\mathbf{R}^5=W_1\oplus W_2$. **8μ.**

(α) Επειδή το A παράγει τον W_1 και είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού το u_1 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του u_2, το A είναι βάση του W_1 και έτσι $\dim W_1=2$.

(β) Τα στοιχεία του W_1 είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2. Άρα η γενική μορφή των στοιχείων του W_1 είναι

$$u=au_1+bu_2=(a,a,0,b,b), \quad a,b\in\mathbf{R}$$

Ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες του Θ2.2.2. Πράγματι

(i) Θέτοντας $a=b=0$ έχουμε $\mathbf{0}=(0,0,0,0,0)\in W_1$

(ii) Για τα $u_1=(a_1,a_1,0,b_1,b_1), \quad u_2=(a_2,a_2,0,b_2,b_2)\in W_1$ έχουμε

$$u_1+u_2=\left(a_1+a_2,a_1+a_2,0,b_1+b_2,b_1+b_2\right)\in W_1$$

(το W_1 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση).

(iii) Αν $\lambda\in\mathbf{R}$ και $u=(a,a,0,b,b)\in W_1$ έχουμε

$$\lambda u=(\lambda a,\lambda a,0,\lambda b,\lambda b)\in W_1$$

(το W_1 είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Άρα το W_1 είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^5$.

(γ) Για να είναι το $u=(a,b,c,d,e)$ ορθογώνιο με τα u_1 και u_2 πρέπει

$$\left.\begin{array}{l} u\cdot u_1=0 \\ u\cdot u_2=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} (a,b,c,d,e)\cdot(1,1,0,0,0)=0 \\ (a,b,c,d,e)\cdot(0,0,0,1,1)=0 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l} a+b=0 \\ d+e=0 \end{array}\right\}$$

Άρα η γενική μορφή των στοιχείων του W_2 είναι

$$(a,-a,c,d,-d), \quad a,c,d\in\mathbf{R}$$

Παρατηρούμε ότι

$$(a,-a,c,d,-d)=a(1,-1,0,0,0)+c(0,0,1,0,0)+d(0,0,0,1,-1)=av_1+cv_2+dv_3$$

Βλέπουμε ότι το σύνολο $B=\{v_1=(1,-1,0,0,0), \quad v_2=(0,0,1,0,0), \quad v_3=(0,0,0,1,-1)\}$ παράγει τον W_2 και είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι, αν

$$av_1+cv_2+dv_3=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad (a,-a,c,d,-d)=(0,0,0,0,0) \quad\Rightarrow\quad a=c=d=0.$$

Άρα το B είναι βάση του W_2 και $\dim W_2=3$.

(ε) Για να ισχύει η $\mathbf{R}^5 = W_1 \oplus W_2$ πρέπει κάθε στοιχείο του $\mathbf{R}^5$ να γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός ενός στοιχείου $w_1 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 \in W_1$ και ενός στοιχείου $w_2 = \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2 + \lambda_5 v_3 \in W_2$. Αν λοιπόν

$$(a,b,c,d,e) = w_1 + w_2 = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 v_1 + \lambda_4 v_2 + \lambda_5 v_3$$

$$= \lambda_1 (1,1,0,0,0) + \lambda_2 (0,0,0,1,1) + \lambda_3 (1,-1,0,0,0) + \lambda_4 (0,0,1,0,0) + \lambda_5 (0,0,0,1,-1) \quad \Rightarrow$$

$$\left(\lambda_1 + \lambda_3, \lambda_1 - \lambda_3, \lambda_4, \lambda_2 + \lambda_5, \lambda_2 - \lambda_5\right) = (a,b,c,d,e) \quad \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_3 = a \\ \lambda_1 - \lambda_3 = b \\ \lambda_4 = c \\ \lambda_2 + \lambda_5 = d \\ \lambda_2 - \lambda_5 = e \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} \lambda_1 = (a+b)/2 \\ \lambda_3 = (a-b)/2 \\ \lambda_4 = c \\ \lambda_2 = (d+e)/2 \\ \lambda_5 = (d-e)/2 \end{array}\right\}$$

Η λύση είναι μοναδική. Άρα πράγματι $\mathbf{R}^5 = W_1 \oplus W_2$.

Πρόβλημα 3

(α) Δείξτε ότι ο μόνος **αδύναμος** $n \times n$ πίνακας που είναι **αντιστρέψιμος** είναι ο **ταυτοτικός**. **3μ.**

(β) Να βρεθούν τα **ίχνη** των **στοιχειωδών πινάκων** $E_i^a, E_{i,j}^a, E_{i,j} \in M_{n\times n}$ **3μ.**

(γ) Αν $A, B \in M_{n\times n}$ και

$$2021AB + A + B = O$$

δείξτε ότι οι A και B είναι **αντιμεταθέσιμοι**. **6μ.**

(α) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος τότε ισχύει:

$$AA^{-1} = I \quad \Rightarrow \quad AAA^{-1} = AI \quad \Rightarrow \quad A^2A^{-1} = A \quad \Rightarrow \quad AA^{-1} = A \quad \Rightarrow \quad I = A$$

Άρα ο μόνος αδύναμος $n \times n$ πίνακας που είναι αντιστρέψιμος είναι ο ταυτοτικός.

(β)

$$trE_i^a = n + a - 1$$

$$trE_{i,j}^a = n$$

$$trE_{i,j} = n - 2$$

(γ) Από τη δοσμένη σχέση έχουμε διαδοχικά:

$$2021AB + A + B = O \quad \Rightarrow \quad A(2021B + I) + B = O \quad \Rightarrow \quad 2021A(2021B + I) + 2021B = O \quad \Rightarrow$$

$$2021A(2021B + I) + 2021B + I = I \quad \Rightarrow \quad (2021A + I)(2021B + I) = I$$

Είναι φανερό ότι $(2021A + I)^{-1} = (2021B + I)$. ‘Αρα λοιπόν

$$(2021B + I)(2021A + I) = I \quad \Rightarrow \quad 2021B(2021A + I) + 2021A + I = I \quad \Rightarrow$$

$$B(2021A + I) + A = O \quad \Rightarrow \quad 2021BA + B + A = O$$

Από την τελευταία και τη δοσμένη σχέση έχουμε

$$2021(BA - AB) = O \quad \Rightarrow \quad BA = AB$$

Άρα οι A και B είναι αντιμεταθέσιμοι.

Πρόβλημα 4. Έστω $W_{3\times 3}$ το σύνολο των **αντισυμμετρικών** 3×3 πινάκων.

(α) Ποια είναι η γενική μορφή των στοιχείων του $W_{3\times 3}$; **1μ.**

(β) Δείξτε ότι ο $W_{3\times 3}$ είναι **υπόχωρος** του $M_{3\times 3}$. **4μ.**

(γ) Βρείτε μια **βάση** και τη **διάσταση** του $W_{3\times 3}$. **3μ.**

(α)

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}, \quad a,b,c\in \mathbf{R}$$

(β) Ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες του Θ2.2.2. Πράγματι

(i) Θέτοντας $a=b=c=0$ έχουμε $O\in M_{3\times 3}$

(ii) Για τους

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a_1 & b_1 \\ -a_1 & 0 & c_1 \\ -b_1 & -c_1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B\begin{bmatrix} 0 & a_2 & b_2 \\ -a_2 & 0 & c_2 \\ -b_2 & -c_2 & 0 \end{bmatrix}\in W_{3\times 3}$$

έχουμε

$$A+B=\begin{bmatrix} 0 & a_1+a_2 & b_1+b_2 \\ -a_1-a_2 & 0 & c_1+c_2 \\ -b_1-b_2 & -c_1-c_2 & 0 \end{bmatrix}\in W_{3\times 3}$$

(το $W_{3\times 3}$ είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση).

(iii) Αν $\lambda\in\mathbf{R}$ τότε

$$\lambda A=\begin{bmatrix} 0 & \lambda a & \lambda b \\ -\lambda a & 0 & \lambda c \\ -\lambda b & -\lambda c & 0 \end{bmatrix}\in W_{3\times 3}$$

(το $W_{3\times 3}$ είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Άρα το $W_{3\times 3}$ είναι υπόχωρος του $M_{3\times 3}$.

(γ) Παρατηρούμε ότι

$$A=\begin{bmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{bmatrix}=a\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}+b\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}+c\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}=aE_1+bE_2+cE_3$$

Το σύνολο $\{E_1,E_2,E_3\}$ παράγει τον $W_{3\times 3}$ και είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού τα στοιχεία του είναι μη μηδενικά και κανένα δεν μπορεί να είναι γραμμικός συνδυασμός των υπολοίπων. Άρα το σύνολο αυτό είναι βάση του $W_{3\times 3}$ και έτσι $\dim W_{3\times 3}=3$.

Πρόβλημα 5. Έστω ο πίνακας

$$A = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Δείξτε ότι ο A είναι **ορθογώνιος**. **2μ.**

(β) Βρείτε τον **αντίστροφο** του πίνακα

$$P = \begin{bmatrix} A & I \\ O & A^T \end{bmatrix}$$

6μ.

(α)

$$AA^T = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ -\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4}\begin{bmatrix} 1+3 & -\sqrt{3}+\sqrt{3} \\ -\sqrt{3}+\sqrt{3} & 3+1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = I$$

Άρα ο ο A είναι ορθογώνιος.

(β) Έστω ότι ο αντίστροφος του P είναι της μορφής

$$P = \begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix}$$

οπότε

$$PP^{-1} = \begin{bmatrix} A & I \\ O & A^T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} X & Y \\ Z & W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} AX+Z & AY+W \\ A^TZ & A^TW \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I & O \\ O & I \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{c} AX+Z=I \\ AY+W=O \\ A^TZ=O \\ A^TW=I \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} AX=I \\ AY+W=O \\ Z=O \\ W=A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} X=A^T \\ AY=-A \\ Z=O \\ W=A \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{c} X=A^T \\ Y=-I \\ Z=O \\ W=A \end{array}\right\} \Rightarrow P^{-1} = \begin{bmatrix} A^T & -I \\ O & A \end{bmatrix}$$

Άρα,

$$P^{-1} = \begin{bmatrix} 1/2 & -\sqrt{3}/2 & -1 & 0 \\ \sqrt{3}/2 & 1/2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1/2 & \sqrt{3}/2 \\ 0 & 0 & -\sqrt{3}/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 6

(α) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B \in M_{n\times m}$, δείξτε ότι $tr(AB) = tr(BA)$ **4μ.**

(β) Επαληθεύσατε την **ανισότητα Cauchy-Schwarz** για τα διανύσματα

$$u = (3,2,0,-1), \quad v = (4,-1,1,2)$$

3μ.

(γ) Κατασκευάστε μια **γνήσια υποομάδα** της $(S_5, \circ)$ που να περιέχει τη μετάθεση $\sigma = (2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 1)$. **3μ.**

(α) Για τα δύο γινόμενα έχουμε

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}\right)_{m\times m} \quad \Rightarrow \quad tr(AB) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{ki}$$

και

$$BA = \left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{kj}\right)_{n\times n} \quad \Rightarrow \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} b_{ik} a_{ki} = tr(AB)$$

(β) Υπολογίζουμε το εσωτερικό γινόμενο και τις νόρμες των u και v:

$$u \cdot v = 12 - 2 + 0 - 2 = 8$$
$$\|u\| = \sqrt{9+4+0+1} = \sqrt{14}$$
$$\|u\| = \sqrt{16+1+1+4} = \sqrt{22}$$

Πρέπει να ισχύει

$$|u\cdot v| \le \|u\|\|v\| \quad \text{δηλ.} \quad 8 \le \sqrt{14}\,\sqrt{22} \ \text{ ή } \ 8 \le 2\sqrt{77}.$$

Πράγματι η ανισότητα Cauchy-Schwarz επαληθεύεται.

(γ) Κάθε υποομάδα της $(S_5, \circ)$ πρέπει να περιέχει την ταυτοτική μετάθεση $e = (1,2,3,4,5) \in S_5$ η οποία έχει ως αντίστροφη τον εαυτό της, $e^{-1} = e$. [Ικανοποιείται η συνθήκη (i) του ορισμού.]

Η ζητούμενη υποομάδα πρέπει να είναι κλειστή ως προς την αντιστροφή [συνθήκη (iii) του ορισμού], άρα πρέπει να περιλαμβάνει και την αντίστροφη της $\sigma = (2,\ 3,\ 4,\ 5,1)$:

$$\sigma^{-1} = \begin{pmatrix} \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 & \sigma_4 & \sigma_5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix} = (5,1,2,3,4)$$

Το σύνολο $\{e, \sigma, \sigma^{-1}\} \subset S_5$ είναι επίσης κλειστό ως προς την σύνθεση [συνθήκη (ii) του ορισμού] αφού

$$\sigma \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ \sigma = e \in S_5$$
$$\sigma \circ e = e \circ \sigma = \sigma \in S_5$$
$$e \circ \sigma^{-1} = \sigma^{-1} \circ e = \sigma^{-1} \in S_5$$

Οι τρεις συνθήκες του ορισμού ικανοποιούνται, άρα το σύνολο $\{e, \sigma, \sigma^{-1}\} \subset S_5$ είναι γνήσια υποομάδα της $(S_5, \circ)$.

Πρόβλημα 7.

(α) Δείξτε ότι αν ένας **αντισυμμετρικός** πίνακας είναι αντιστρέψιμος τότε και ο αντίστροφός του είναι αντισυμμετρικός. **3μ.**

(β) Ένας πίνακας $A \in M_{n\times n}$ καλείται **στοχαστικός** αν

$$a_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n.$$

Δείξτε ότι το γινόμενο δύο στοχαστικών πινάκων είναι στοχαστικός πίνακας. **5μ.**

(α) Επειδή ο A είναι αντισυμμετρικός ισχύει:

$$A^T = -A$$

Αφού ο A είναι αντιστρέψιμος, ο A^T είναι επίσης αντιστρέψιμοες και έτσι έχουμε:

$$A^T = -A \quad \Rightarrow \quad \left(A^T\right)^{-1} = \left(-A\right)^{-1} \quad \Rightarrow \quad \left(A^{-1}\right)^T = \left(-A\right)^{-1} = -A^{-1}$$

Άρα ο αντίστροφος του A είναι επίσης αντισυμμετρικός.

(β) Έστω $A, B \in M_{n\times n}$ δύο στοχαστικοί πίνακες, οπότε

$$a_{ij} \geq 0 \ \text{ και } \ b_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n \tag{1}$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1, \quad \sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1, \quad i = 1, 2, \cdots, n \tag{2}$$

Αν $AB = (c_{ij})_{n\times n}$, τότε

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj}$$

Από την (1) είναι φανερό ότι

$$c_{ij} \geq 0, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

Επιπλέον έχουμε

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot \sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \cdot 1 = 1$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη (2). Άρα ο AB είναι στοχαστικός.

Πρόβλημα 8. Σε κάθε περίπτωση να βρεθεί η **λύση** (αν υπάρχει) του γραμμικού συστήματος $AX = B$ αν ο **επαυξημένος πίνακας** $[A|B]$ είναι **γραμμοϊσοδύναμος** με τον

(α) $$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & | & -4 \end{bmatrix}$$ **2μ.**

(β) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & | & 0 \end{bmatrix}$$ **2μ.**

(γ) $$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & | & -4 \end{bmatrix}$$ **2μ.**

(α) Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με δύο ελεύθερες μεταβλητές, τις x_2 και x_3. Έχουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - 2\lambda + \mu \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= \mu \\ x_4 &= 2 \\ x_5 &= -4 \end{aligned}$$

(β) Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με μία ελεύθερη μεταβλητή, την x_4. Έχουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned} x_1 &= \lambda \\ x_2 &= -2\lambda \\ x_3 &= 3\lambda \\ x_4 &= \lambda \end{aligned}$$

(γ) Το σύστημα είναι μη συμβιβαστό αφού έχουμε ηγετικό στοιχείο στην τελευταία στήλη του ανηγμένου κλιμακωτού.

Πρόβλημα 9. Να επιλυθεί το γραμμικό σύστημα:

$$\begin{aligned} 3x_1+6x_2+9x_3+x_4+\phantom{x_5+{}}17x_6&=-11\\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5+15x_6&=-6\\ 2x_1+4x_2+6x_3+x_4-x_5+7x_6&=-7\\ x_1+2x_2+3x_3+x_4+x_5+15x_6&=-6 \end{aligned}$$

10μ.

Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό $[R\,|\,S]$ του επαυξημένου πίνακα

$$[A\,|\,B]=\begin{bmatrix} 3 & 6 & 9 & 1 & 0 & 17 & | & -11\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 15 & | & -6\\ 2 & 4 & 6 & 1 & -1 & 7 & | & -7\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 15 & | & -6 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 15 & | & -6\\ 3 & 6 & 9 & 1 & 0 & 17 & | & -11\\ 2 & 4 & 6 & 1 & -1 & 7 & | & -7\\ 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 15 & | & -6 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 15 & | & -6\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -28 & | & 7\\ 0 & 0 & 0 & -1 & -3 & -23 & | & 5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 1 & 15 & | & -6\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 23 & | & -5\\ 0 & 0 & 0 & -2 & -3 & -28 & | & 7\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 & -8 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 23 & | & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 18 & | & -3\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & -2 & -8 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3 & 23 & | & -5\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 & 0 & 4 & | & -3\\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 5 & | & -2\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 6 & | & -1\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{bmatrix}=[R\,|\,S]$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με τρεις ελεύθερες μεταβλητές, τις x_2, x_3 και x_6. Έχουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned} x_1&=-3-2\lambda-3\mu-4\kappa\\ x_2&=\lambda\\ x_3&=\mu\\ x_4&=-2-5\kappa\\ x_5&=-1-6\kappa\\ x_6&=\kappa \end{aligned}$$

Πρόβλημα 10. Αν

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\4&2&1&3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&-4&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}0&0&0&1\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\1&0&0&0\end{bmatrix}$$

να υπολογιστούν τα γινόμενα BA, CA, BCA, $C^{-1}BCA$ και $C^{2021}A$ **χωρίς να εκτελεστούν οι πολλαπλασιασμοί.** **10μ.**

Παρατηρούμε ότι οι B και C είναι στοιχειώδεις: $B=E_{1,3}^{-4}$ και $C=E_{1,4}$.

$$BA=E_{1,3}^{-4}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\4&2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-14&-9&16\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\4&2&1&3\end{bmatrix}\quad\left(r_1\to r_1-4r_3\right)$$

$$CA=E_{1,4}\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\4&2&1&3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&2&1&3\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\1&2&3&4\end{bmatrix}\quad\left(r_1\leftrightarrow r_4\right)$$

$$BCA=E_{1,3}^{-4}CA=E_{1,3}^{-4}\begin{bmatrix}4&2&1&3\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\1&2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}4&-14&-11&-17\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\1&2&3&4\end{bmatrix}\quad\left(r_1\to r_1-4r_3\right)$$

$$C^{-1}BCA=\left(E_{1,4}\right)^{-1}BCA=E_{1,4}\begin{bmatrix}4&-14&-11&-17\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\1&2&3&4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3&4\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\4&-14&-11&-17\end{bmatrix}\quad\left(r_1\leftrightarrow r_4\right)$$

Επειδή

$$C^{2021}=\left(E_{1,4}\right)^{2021}=\left(E_{1,4}\right)^{2020}E_{1,4}=IE_{1,4}=E_{1,4}$$

$$C^{2021}A=E_{1,4}A=\begin{bmatrix}4&2&1&3\\-1&0&4&-2\\0&4&3&5\\1&2&3&4\end{bmatrix}$$

Πρόβλημα 11. Να βρεθούν οι αντίστροφοι των κάτωθι πινάκων:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&1\\1&1&4\\2&3&4\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&-3&0&1\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&1&0\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

10μ.

Βρίσκουμε τον ανηγμένο κλιμακωτό του σύνθετου πίνακα [*D*|*I*]:

$$[A\,|\,I]=\begin{bmatrix}1&2&1&|&1&0&0\\1&1&4&|&0&1&0\\2&3&4&|&0&0&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&1&|&1&0&0\\0&-1&3&|&-1&1&0\\0&-1&2&|&-2&0&1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&7&|&-1&2&0\\0&-1&3&|&-1&1&0\\0&0&-1&|&-1&-1&1\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&0&7&|&-1&2&0\\0&1&-3&|&1&-1&0\\0&0&1&|&1&1&-1\end{bmatrix}\sim$$

$$\sim\begin{bmatrix}1&0&0&|&-8&-5&7\\0&1&0&|&4&2&-3\\0&0&1&|&1&1&-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}I&|&A^{-1}\end{bmatrix}$$

Άρα

$$A^{-1}=\begin{bmatrix}-8&-5&7\\4&2&-3\\1&1&-1\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι

$$B=E_{4,2}^{-3}\quad\Rightarrow\quad B^{-1}=\left(E_{4,2}^{-3}\right)^{-1}=E_{4,2}^{3}=\begin{bmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&3&0&1\end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε τέλος ότι

$$C=E_{2,4}\quad\Rightarrow\quad C^{-1}=\left(E_{2,4}\right)^{-1}=E_{2,4}=C$$

(ο C είναι ενελικτικός).

Πρόβλημα 12

(α) Δίνεται ότι ορίζουσα τάξης 8 περιλαμβάνει 8! όρους ένας εκ των οποίων είναι της μορφής

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{28}a_{87}a_{16}a_{71}a_{62}a_{53}a_{34}a_{ij}$$

Να βρεθούν η **μετάθεση** σ που αντιστοιχεί στον πιο πάνω όρο και το πρόσημό της. **3μ.**

(β) Χρησιμοποιώντας τον **ορισμό της ορίζουσας** δείξτε ότι

$$\det(\lambda A)=\lambda^n \det A, \quad A\in M_{n\times n}, \quad \lambda\in \mathbf{R}$$

3μ.

(γ) **Χρησιμοποιώντας τον ορισμό**, υπολογίστε την ορίζουσα

$$\begin{vmatrix} a & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & a \\ 0 & 0 & a & b \end{vmatrix}$$

4μ.

(δ) Να βρεθούν οι ορίζουσες των **στοιχειωδών πινάκων** $E_i^a, E_{i,j}^a, E_{i,j}\in M_{n\times n}$ **με βάση τον ορισμό**.

6μ.

(α) Ο όρος είναι ο

$$\operatorname{sgn}(\sigma)\, a_{28}a_{87}a_{16}a_{71}a_{62}a_{53}a_{34}a_{45}=\operatorname{sgn}(6,8,4,5,3,2,1,7)a_{16}\, a_{28}a_{34}a_{45}a_{53}a_{62}a_{71}a_{87}$$

και η μετάθεση είναι η $\sigma=(6,8,4,5,3,2,1,7)$ το πρόσημο της οποίας είναι

$$\operatorname{sgn}(\sigma)=(-1)^{5+6+3+3+2+1+0+0}=(-1)^{20}=1$$

(β) Επειδή $\lambda A=(\lambda a_{ij})$, έχουμε

$$\det(\lambda A)=\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\,\lambda a_{1\sigma_1}\lambda a_{2\sigma_2}\cdots\lambda a_{n\sigma_n}=\lambda^n\sum_{\sigma\in S_n}\operatorname{sgn}(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_n)\,a_{1\sigma_1}a_{2\sigma_2}\cdots a_{n\sigma_n}=\lambda^n\det A$$

(γ) Παρατηρούμε ότι από το άθροισμα του ορισμού επιβιώνουν μόνο 2 όροι:

$$\det A=\operatorname{sgn}(1,2,3,4)\,a_{11}a_{22}a_{33}a_{44}+\operatorname{sgn}(1,2,4,3)\,a_{11}a_{22}a_{34}a_{43}=+abab-abaa=a^2b(b-a)$$

(δ) Ο E_i^a είναι διαγώνιος πίνακας. Παρατηρούμε ότι στο άθροισμα του ορισμού επιβιώνει μόνο ένας όρος που αντιστοιχεί στο γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου:

$$\det E_i^a=\operatorname{sgn}(1,2,\cdots,i,\cdots,n)1\cdot 1\cdots a\cdots 1=\operatorname{sgn}(e)a=a$$

Ο $E_{i,j}^a$ είναι τριγωνικός πίνακας. Παρατηρούμε ότι στο άθροισμα του ορισμού επιβιώνει πάλι μόνο ο όρος που αντιστοιχεί στο γινόμενο των στοιχείων της διαγωνίου:

$$\det E_{i,j}^a=\operatorname{sgn}(1,2,\cdots,n)1\cdot 1\cdots 1=\operatorname{sgn}(e)\cdot 1=1$$

Ο $E_{i,j}$ έχει μόνο ένα μη μηδενικό στοιχείο, τη μονάδα, σε κάθε γραμμή και κάθε στήλη. Οι μονάδες αυτές είναι στη κύρια διαγώνιο με εξαίρεση τις γραμμές i και j, στις οποίες βρίσκεται στις θέσεις ij και ji αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι στο άθροισμα του ορισμού επιβιώνει μόνο ένας όρος:

$$\det E_{i,j}=\operatorname{sgn}(1,\cdots,j,\cdots,i,\cdots n)\,a_{11}\cdots a_{ij}\cdots a_{ji}\cdots a_{nn}=-\operatorname{sgn}(1,\cdots,i,\cdots,j,\cdots n)\cdot 1=-\operatorname{sgn}(e)=-1$$

Πρόβλημα 13. Αν $A \in M_{n\times n}$, δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι **ισοδύναμες**:

(i) Ο A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.

(ii) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

(iii) Το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.

6μ.

(i) $\Rightarrow$ (ii)

Αν ο A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων,

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k$$

τότε ο A είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων (οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι) και

$$A^{-1} = \left(E_1 E_2 \cdots E_k\right)^{-1} = E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}$$

(ii) $\Rightarrow$ (iii)

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε από την $AX = B$ έχουμε

$$A^{-1}AX = A^{-1}B \quad \Rightarrow \quad X = A^{-1}B$$

Άρα το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.

(iii) $\Rightarrow$ (i)

Αν το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση, τότε ο ανηγμένος κλιμακωτός του *A* είναι ο ταυτοτικός πίνακας, $R = I$. Όμως από τη σχετική πρόταση υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πίνακων $E_1, E_2, \cdots E_k$, έτσι ώστε

$$A = E_1 E_2 \cdots E_k R = E_1 E_2 \cdots E_k I = E_1 E_2 \cdots E_k .$$

Άρα ο A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.