

ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι & ΙΙ (ΜΑΣ121, ΜΑΣ221)
ΥΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΓΙΑ ΒΕΛΤΙΩΣΗ ΤΩΝ ΛΥΣΕΩΝ

1. Να εξηγήτε σύντομα κάθε λογικό βήμα (ιδιαίτερα στις αποδείξεις θεωρημάτων), αναφέροντας τις ιδιότητες καθώς και τα σχετικά θεωρήματα που χρησιμοποιείτε. Επίσης, δεν πρέπει να παραλείπετε σημαντικές ενδιάμεσες πράξεις. Μην γράφετε απευθείας το αποτέλεσμα.

Παράδειγμα 1

Αν $a \neq 0$, τότε από την $a \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0}$ παίρνουμε, βάσει της ιδιότητας (β),

$$\frac{1}{a} \cdot (a \cdot \mathbf{u}) = \frac{1}{a} \cdot \mathbf{0} = \mathbf{0}.$$

Με βάση τις ιδιότητες B3 και B4 του ορισμού, έχουμε

$$\left(\frac{1}{a} \cdot a\right) \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \implies 1 \cdot \mathbf{u} = \mathbf{0} \implies \mathbf{u} = \mathbf{0}.$$

Παράδειγμα 2

$$\|\mathbf{u}\| = \sqrt{2} \implies \mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{\|\mathbf{u}\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(1, -1, 0) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{-1}{\sqrt{2}}, 0\right).$$

2. Στην αρχή μιας απόδειξης ή μιας λύσης, να δίνετε επαρκείς εξηγήσεις για τη διαδικασία που θα ακολουθήσετε.

Παράδειγμα 1

Για να είναι ο W υπόχωρος του V , πρέπει να ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες της σχετικής πρότασης.

Παράδειγμα 2

Αρκεί να δείξουμε ότι

$$V = W_1 + W_2 \quad \text{και} \quad W_1 \cap W_2 = \{\mathbf{0}\}.$$

3. Μην παραλείπετε το τελικό σας συμπέρασμα.
- Ο W είναι υπόχωρος του V
 - Το αντίθετο στοιχείο είναι μοναδικό.
4. Μην χρησιμοποιείτε αυθαίρετες συντομογραφίες και δικά σας σύμβολα.

ΛΑΘΟΣ	ΣΩΣΤΟ
το αντ. μον.	Το αντίθετο στοιχείο είναι μοναδικό!
βαθμ. πολλ.	βαθμωτός πολλαπλασιασμός
στοιχ.	στοιχείο
εσ. γιν.	εσωτερικό γινόμενο
θνδ	θέλω να δείξω

5. Εκφράσεις όπως

- κλειστή η πρόσθεση
- κλειστός ο βαθμωτός πολλαπλασιασμός
- κλειστότητα στο βαθμωτό πολλαπλασιασμό

είναι εσφαλμένες.

Οι πράξεις δεν μπορεί να είναι κλειστές. Μόνο τα σύνολα:

- ο W είναι κλειστός ως προς την πρόσθεση.

6. Οι προτάσεις σας πρέπει να είναι πλήρεις. Μην παραλείπετε τα άρθρα, τους συνδέσμους και τα ρήματα.

ΛΑΘΟΣ	ΣΩΣΤΟ
πρέπει 0 ανήκει	πρέπει το 0 να ανήκει
Από νόμο απαλοιφής	Βάσει της ιδιότητας της απαλοιφής
W υπόχωρος	Ο W είναι υπόχωρος <u>του V</u>
Είναι υπόχωρος	Ο W είναι υπόχωρος <u>του V</u>
W είναι υπόχωρος του V	Ο W είναι υπόχωρος <u>του V</u>
\implies υπόχωρος	\implies ο W είναι υπόχωρος <u>του V</u>
Για να είναι υπόχωρος εξετάζουμε 3 συνθήκες	Για να είναι ο W υπόχωρος του V πρέπει να ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες της σχετικής πρότασης.
Έστω υπάρχει	Έστω ότι υπάρχει
Έστω \exists	Έστω ότι \exists
Αφού $-u$ αντίθετο στοιχείο	Επειδή το $-u$ είναι το αντίθετο στοιχείο του u
Πρέπει να δείξουμε ότι $-u$ μοναδικό	Πρέπει να δείξουμε ότι το $-u$ είναι μοναδικό.
$\implies -u$ μοναδικό	\implies το $-u$ είναι μοναδικό.
$v(1, -2, 0)$	$v = (1, -2, 0)$
$u + v$ δεν γίνεται	Η πρόσθεση $u + v$ δεν ορίζεται
$u + v =$ αδύνατο	Η πρόσθεση $u + v$ δεν ορίζεται
$u + v =$ δεν γίνεται	Η πρόσθεση $u + v$ δεν ορίζεται
$u + v$ δεν ισχύει	Η πρόσθεση $u + v$ δεν ορίζεται

7. Να διατυπώνετε προσεκτικά και με ακρίβεια τις σκέψεις σας.

(α) Οι εκφράσεις

Έστω $a \neq 0$

και

Έστω ότι $a \neq 0$

έχουν διαφορετικό νόημα!

(β) Οι προτάσεις

Τα u και w έχουν διαφορετικές συντεταγμένες

και

Τα u και w έχουν διαφορετικό πλήθος συντεταγμένων

έχουν διαφορετικό νόημα. Στην πρώτη περίπτωση, τα u και w ανήκουν στον ίδιο χώρο και δεν είναι ίσα μεταξύ τους. Στη δεύτερη περίπτωση, τα u και w ανήκουν σε διαφορετικούς χώρους.

(ς) **Σύνολο - Άθροισμα**

Οι δύο όροι έχουν διαφορετικό περιεχόμενο. Για παράδειγμα

η γραμμική θήκη του S είναι το **σύνολο** των γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του S

(και όχι το άθροισμα των γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του S).

Επίσης, στην έκφραση

το σύνολο *όλων* των γραμμικών συνδυασμών των στοιχείων του S

το 'όλων' είναι περιττό.

8. **Ορθογραφικά λάθη σε μαθηματικούς όρους δεν επιτρέπονται.**

ΛΑΘΟΣ	ΣΩΣΤΟ
ανοίχουν	ανήκουν
απαλειφή	απαλοιφή
άρθροισμα	άθροισμα
απαλοίφω	απαλείφω
βάση της ...	βάσει της ...
γραμμικός ανεξάρτητα	γραμμικά ανεξάρτητα (διανύσματα)
εξείς	εξής
επομένος	επομένως
εσωτερικό	εσωτερικό
Ευκλείδιος	Ευκλείδειος
εφόσων	εφόσον
ιδιώτητα	ιδιότητα
ισούτε	ισούνται
θέτωντας	θέτοντας
πλειρεί	πληροί
προσθέτωντας	προσθέτοντας
συμπαιρένω	συμπεραίνω
συνδιασμός	συνδυασμός
συνήθες	σύνηθες
υπόχωρος	υπόχωρος

9. **Μη γράφετε περισσότερα απ'όσα απαιτούνται για τη λύση ενός προβλήματος. Οι αποδείξεις προτάσεων ή ιδιοτήτων που δεν έχουν σχέση με το πρόβλημα είναι ανεπίτρεπτες.**