ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Εαρινό εξάμηνο 2017-2018, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
1 κουίζ, Διάρκεια: 40 min
13 Σεπτεμβρίου, 2017

ΟΝΟΜΑ: Αρ. Πολ. Ταυτ.

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u = (1,-2,0,3), \quad v = (2,1,-3,1)$$

(α) Υπολογίστε το διάνυσμα $2u - v$ **3μ.**
(β) Υπολογίστε το **εσωτερικό γινόμενο** $u \cdot v$ **3μ.**
(γ**)** Βρείτε τις **νόρμες** των **u** και **v** **4μ.**
(δ) Για ποια τιμή του α είναι το διάνυσμα

$$w = (a,-2a,2,-1)$$

ορθογώνιο με το **u;** **4μ.**
(ε) Επαληθεύσατε την **ανισότητα Cauchy-Schwarz** για τα **u** και **v.** **2μ.**

(α)

$$2u - v = 2(1,-2,0,3) - (2,1,-3,1) = (2,-4,0,6) - (2,1,-3,1) = (0,-5,3,5)$$

(β)

$$u \cdot v = 2 - 2 + 0 + 3 = 3$$

(γ)

$$\|u\| = \sqrt{1+4+0+9} = \sqrt{14}$$

$$\|v\| = \sqrt{4+1+9+1} = \sqrt{15}$$

(δ) Για να είναι τα **u** και **w** ορθογώνια πρέπει

$$u \cdot w = 0 \quad \Rightarrow \quad a + 4a + 0 - 3 = 0 \quad \Rightarrow \quad a = \frac{3}{5}$$

(ε) Πρέπει να ισχύει

$$|u \cdot v| \le \|u\| \|v\| \quad \text{δηλ.} \quad 3 \le \sqrt{14}\,\sqrt{15}.$$

Πράγματι η ανισότητα Cauchy-Schwarz επαληθεύεται.

Πρόβλημα 2. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Αντιμεταθέσιμοι πίνακες**	**2μ.**
(β) **Γινόμενο πινάκων**	**2μ.**
(γ) **Άνω τριγωνικός** πίνακας	**2μ.**
(δ) **Τετραγωνικός** πίνακας	**2μ.**
(ε) **'Ιχνος** πίνακα	**2μ.**

(α) Οι n×n πίνακες A και B είναι **αντιμεταθέσιμοι** αν AB=BA.

(β) Το γινόμενο των $A \in M_{m\times p}$ και $B \in M_{p\times n}$ ορίζεται ως εξής:

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \right)_{m\times n}$$

(γ) **Άνω τριγωνικός** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας *A* του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται κάτω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν:

$$a_{ij} = 0 \text{ για } i > j$$

(δ) **Τετραγωνικός** είναι ένας *n*×*n* πίνακας.

(ε) Καλούμε **ίχνος** (trace) ενός n×n πίνακα $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ και το συμβολίζουμε με trA το άθροισμα των διαγώνιων στοιχείων του:

$$trA = \sum_{k=1}^{n} a_{kk}$$

Πρόβλημα 3.

(α) Ορίστε τα μηδενικά στοιχεία των χώρων $\mathbf{R}^3$ και $M_{2\times3}$ **4μ.**

(β) Δώστε παραδείγματα **στοιχείων** των πιο πάνω χώρων και στη συνέχεια βρείτε τα **αντίθετά** τους. **4μ.**

(γ) Διατυπώστε τις τέσσερις ιδιότητες της πράξης της πρόσθεσης στον χώρο $\mathbf{R}^n$ **5μ.**

(α)

Χώρος	Μηδενικό στοιχείο
$\mathbf{R}^3$	$\mathbf{0} = (0,0,0)$
$M_{2\times3}$	$O=\begin{bmatrix}0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}$

(β) Στον $\boldsymbol{R}^3$

$$u = (1,2,3) \quad \text{και} \quad (-u) = (-1,-2,-3)$$

Στον $M_{2\times3}$

$$A=\begin{bmatrix}4&-1&2\\3&1&0\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad (-A)=\begin{bmatrix}-4&1&-2\\-3&-1&0\end{bmatrix}$$

(γ)

Α1. Προσεταιριστική ιδιότητα. Για κάθε $u,v,w\in\mathbf{R}^n$ ισχύει

$$u+(v+w)=(u+v)+w$$

Α2. Υπάρχει το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}\in\mathbf{R}^n$ τ'ετοιο ώστε

$$u+\mathbf{0}=u, \quad \forall u\in\mathbf{R}^n$$

Α3. Για κάθε $u\in\mathbf{R}^n$ υπάρχει το αντίθετό του $u\in\mathbf{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$u+(-u)=\mathbf{0}$$

Α4. Αντιμεταθετική ιδιότητα. Για κάθε $u,v\in\mathbf{R}^n$ ισχύει

$$u+v=v+u$$

Πρόβλημα 4. Έστω ο πίνακας

$$A=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix} \quad \text{και} \quad \mathrm{B}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}$$

(α) Με τι ισούνται τα στοιχεία α_{12} και α_{33}; **2μ.**
(β) Βρείτε τον πίνακα A+2B+3I, όπου I ο 3×3 ταυτοτικός πίνακας **4μ.**
(γ) Βρείτε τα ίχνη των A και B. **4μ.**
(δ) Υπολογίστε το γινόμενο AB **10μ**
(ε) Αν ο $A=\left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος και $A^{-1}=\left(a'_{ij}\right)_{n\times n}$, δείξτε ότι

$$\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}a'_{\ell j}=\delta_{ij}, \quad i,j=1,\cdots,n$$ **5μ**

(α)

$$\alpha_{12}=-2 \quad \text{και} \quad \alpha_{33}=1$$

(β)

$$A+2\mathrm{B}+3\mathrm{I}=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}+2\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}+3\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}6 & -4 & 2\\ 0 & 4 & 2\\ 4 & -4 & 10\end{bmatrix}$$

(γ)

$$trA=3 \quad \text{και} \quad trB=4$$

(δ)

$$AB=\begin{bmatrix}1 & -2 & 0\\ -2 & 1 & -2\\ 0 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & 2\\ 2 & -1 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1-2+0 & -1+0+0 & 1-4+0\\ -2+1-4 & 2+0+2 & -2+2-6\\ 0-2+2 & 0+0-1 & 0-4+3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1 & -1 & -3\\ -5 & 4 & -6\\ 0 & -1 & -1\end{bmatrix}$$

(ε) Γνωρίζουμε ότι

$$AA^{-1}=I \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}a'_{\ell j}\right)_{n\times n}=\left(\delta_{ij}\right)_{n\times n} \quad \Rightarrow \quad \sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}a'_{\ell j}=\delta_{ij}$$

Πρόβλημα 5.

(α) Κατασκευάστε τον πίνακα $A=\left((-1)^{i+j}\right)_{3\times 4}$ **4μ.**

(β) Κατασκευάστε τον πίνακα $B=\left((i+j)\delta_{ij}\right)_{3\times 3}$ **4μ.**

(γ) Βρείτε το ίχνος και τον αντίστροφο του Β. **8μ.**

(δ) Να βρεθούν τα α και β αν

$$A=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad A^{-1}=\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \beta \end{bmatrix}$$ **5μ.**

(α)

$$A=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

(β)

$$B=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}$$

(γ)

$$trB=12 \quad \text{και} \quad B^{-1}=\begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/6 \end{bmatrix}$$

(δ) Ισχύει $AA^{-1}=I$ και έτσι έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \alpha & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & \beta \end{bmatrix}=I \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & \beta/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2\alpha+2 & 0 & 1+\beta \end{bmatrix}=I$$

Άρα $\alpha=-1 \quad \text{και} \quad \beta=0$.

Πρόβλημα 6.

(α) Αποδείξτε την πιο κάτω ιδιότητα αφού αναφέρετε ποιοι πρέπει να είναι οι τύποι (διαστάσεις) των πινάκων *A*, *B*, και *C* για να ορίζονται οι πολλαπλασιασμοί:

$$(A+B)C = AC + BC$$

10μ.

(β) Αν $A \in M_{m\times n}$ και $B \in M_{n\times m}$, δείξτε ότι

$$tr(AB) = tr(BA)$$

15μ.

(α) Πρέπει να είναι $A, B \in M_{m\times n}$ και $C \in M_{n\times q}$. Για την απόδειξη έχουμε

$$(A+B)C = \left(\sum_{k=1}^{n}(a_{ik}+b_{ik})c_{kj}\right)_{m\times q} = \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}c_{kj}\right)_{m\times q} + \left(\sum_{k=1}^{n}b_{ik}c_{kj}\right)_{m\times q} = AC + BC$$

(β) Για τα δύο γινόμενα έχουμε

$$AB = \left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times m} \quad \Longrightarrow \quad tr(AB) = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

και

$$BA = \left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{kj}\right)_{n\times n} \quad \Longrightarrow \quad tr(BA) = \sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{ki}\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{ki} = tr(AB)$$

Πρόβλημα 7.

(α) Δείξτε ότι ο αντίστροφος αντιστρέψιμου πίνακα είναι μοναδικός. **5μ.**

(β) Αν ο A είναι αντιστρέψιμος δείξτε ότι

$$(A+I)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1}$$

10μ.

(α) Έστω A^{-1} και A' δύο αντίστροφοι του αντιστρέψιμου πίνακα A:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I \quad \kappa\alpha\iota \quad AA' = A'A = I$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$A'A = I \quad \Longrightarrow \quad A'AA^{-1} = IA^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A'I = A^{-1} \quad \Longrightarrow \quad A' = A^{-1}$$

Άρα ο αντίστροφος του A είναι μοναδικός.

(β)

$$(I+A)^{-1} = I - (A^{-1}+I)^{-1} \;\Leftrightarrow\; (I+A)^{-1} = (A^{-1}+I)^{-1}(A^{-1}+I) - (A^{-1}+I)^{-1} \quad \Leftrightarrow$$

$$(I+A)^{-1} = (A^{-1}+I)^{-1}\ (A^{-1}+I-I) = (A^{-1}+I)^{-1}\ A^{-1} \;\Leftrightarrow$$

$$(I+A)^{-1} = [A(A^{-1}+I)]^{-1} = (AA^{-1}+A)^{-1} = \ (I+A)^{-1}$$