ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Εαρινό εξάμηνο 2017-2018, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
2ο κουίζ, Διάρκεια: 40 min
4 Οκτωβρίου, 2017

ΟΝΟΜΑ: **Αρ. Πολ. Ταυτ.**

Πρόβλημα 1. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Καρτεσιανό γινόμενο**	**4μ.**
(β) **Διμελής πράξη**	**4μ.**
(γ) **Ημιομάδα**	**4μ.**
(δ) **Υποομάδα**	**4μ.**
(ε**) Τάξη ομάδας**	**4μ.**

(α) Έστω δυο σύνολα *A* και *B*. Το σύνολο των διατεταγμένων ζευγών της μορφής (a,b) με $a\in A$ και $b\in B$ καλείται **καρτεσιανό γινόμενο** και συμβολίζεται με $A\times B$:

$$A\times B=\{(a,b),\, a\in A, b\in B\}$$

(β) Μια **διμελής πράξη** ή απλώς **πράξη** στο μη κενό σύνολο *A* είναι μια απεικόνιση * του συνόλου $A\times A$ στο σύνολο A:

$$*: A\times A\to A \quad \text{όπου} \quad (a,b)\mapsto a*b$$

(γ) Το ζεύγος $(S,*)$ όπου S ένα μη κενό σύνολο και * μια πράξη στο S καλείται **ημιομάδα** αν η πράξη * είναι προσεταιριστική.

(δ) Έστω $(G,\cdot)$ μια ομάδα. Το υποσύνολο $H\subseteq G$ καλείται **υποομάδα** της *G* αν ισχύουν τα εξής:
(i) $e\in H$
(ii) Αν $x,y\in H$ τότε $x\cdot y\in H$ (το *H* είναι κλειστό ως προς την πράξη $\cdot$).
(iii) Αν $x\in H$ τότε $x^{-1}\in H$ (το *H* είναι κλειστό ως προς την αντιστροφή).

(ε) Το πλήθος των στοιχείων μιας ομάδας $(G,\cdot)$ καλείται **τάξη** της G και συμβολίζεται με $|G|$.

Πρόβλημα 2. Έστω το σύνολο $M_{n\times n}$ των $n\times n$ πινάκων και η πράξη *:

$$A*B = A+B+AB, \quad A,B\in M_{n\times n}$$

(α) Δείξτε ότι το ζεύγος $(M_{n\times n},*)$ είναι **ημιομάδα**. **10μ.**

(β) Βρείτε το **ουδέτερο** στοιχείο του $M_{n\times n}$ ως προς την πράξη * **10μ.**

(γ) Τι πρέπει να ισχύει για να έχει ένας πίνακας $A\in M_{n\times n}$ **συμμετρικό** ως προς την πράξη *; **15μ.**

(α) Παρατηρούμε πρώτα ότι η * είναι πράξη στο $M_{n\times n}$, δηλ. το $M_{n\times n}$ είναι κλειστό ως προς την πράξη *, αφού $A+B+AB\in M_{n\times n}$ όταν $A,B\in M_{n\times n}$. Για να είναι το ζεύγος $(M_{n\times n},*)$ ημιομάδα, πρέπει επιπλέον η πράξη * να είναι προσεταιριστική, δηλ. να ισχύει

$$A*(B*C)=(A*B)*C, \quad A,B,C\in M_{n\times n} \qquad \text{(i)}$$

Για τα δύο μέλη της (i) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} A*(B*C) &= A*(B+C+BC) = A+(B+C+BC)+A(B+C+BC) \\ &= A+B+C+BC+AB+AC+ABC \\ (A*B)*C &= (A+B+AB)*C = (A+B+AB)+C+(A+B+AB)C \\ &= A+B+C+AB+AC+BC+ABC \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η (i) ισχύει. Άρα το $(M_{n\times n},*)$ είναι ημιομάδα.

(β) Βλέπουμε εύκολα ότι το ουδέτερο στοιχείο του $M_{n\times n}$ ως προς την πράξη * είναι ο μηδενικός πίνακας $O\in M_{n\times n}$. Πράγματι

$$A*O = A+O+AO = A \quad \forall A\in M_{n\times n}$$

και

$$O*A = O+A+OA = A \quad \forall A\in M_{n\times n}$$

Άρα

$$A*O = O*A = A \quad \forall A\in M_{n\times n}$$

(γ) Έστω ο πίνακας $A\in M_{n\times n}$. Αν υπάρχει το συμμετρικό του $A'\in M_{n\times n}$ ως προς την πράξη *, έχουμε:

$$A*A' = O \;\Rightarrow\; A+A'+AA' = O \;\Rightarrow\; (I+A)A' = -A \;\Rightarrow\; A' = -(I+A)^{-1}A$$

Ομοίως έχουμε:

$$A'*A = O \;\Rightarrow\; A'+A+A'A = O \;\Rightarrow\; A'(I+A) = -A \;\Rightarrow\; A' = -A(I+A)^{-1}$$

Επειδή το συμμετρικό του *A* είναι μοναδικό μένει να δείξουμε ότι

$$A(I+A)^{-1} = (I+A)^{-1}A$$

Παρατηρούμε ότι

$$A = A(I+A)(I+A)^{-1} = (A+A^2)(I+A)^{-1} = (I+A)A(I+A)^{-1}$$

Πολλαπλασιάζοντας από αριστερά με $(I+A)^{-1}$ προκύπτει το ζητούμενο. Άρα λοιπόν το συμμετρικό του *A* δίνεται από την

$$A' = -A(I+A)^{-1} = -(I+A)^{-1}A$$

Παρατηρούμε ότι για να έχει ο $A\in M_{n\times n}$ συμμετρικό στοιχείο, πρέπει ο πίνακας $(I+A)$ να είναι αντιστρέψιμος.

Πρόβλημα 3.

(α) Έστω το $K' \subset \mathbf{R}$ και $+$ και $\cdot$ οι συνήθεις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού στον $\mathbf{R}$. Ποιες συνθήκες πρέπει να ικανοποιούνται για αν είναι η τριάδα $(K',+,\cdot)$ σώμα; **5μ.**

(β) Είναι η τριάδα $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ σώμα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **5μ.**

(γ) Έστω μια πράξη * στο σύνολο A που περιέχει το ουδέτερο στοιχείο ως προς την πράξη *. Θεωρούμε ακόμα ότι το ζεύγος $(A,*)$ είναι ημιομάδα. Δείξτε ότι αν υπάρχει το συμμετρικό στοιχείο ενός στοιχείου $a \in A$, τότε αυτό είναι μοναδικό. **15μ.**

(α) Το $(K',+,\cdot)$ είναι σώμα αν ικανοποιούνται οι εξής συνθήκες:

(i) $0 \in K'$ και $1 \in K'$

(ii) Το K' είναι κλειστό ως προς τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού.

(iii) Αν $x \in K'$ τότε $-x \in K'$ (κάθε στοιχείο του K' έχει αντίθετο στο K').

(iv) Αν $x \in K' - \{0\}$ τότε $x^{-1} \in K' - \{0\}$ (κάθε στοιχείο του $K' - \{0\}$ έχει αντίστροφο στο K').

(β) Το $(\mathbf{Z},+,\cdot)$ **δεν είναι σώμα** γιατί δεν έχουν όλα τα μη μηδενικά του στοιχεία ακέραιο αντίστροφο (μόνο τα -1 και 1 έχουν αντίστροφο που είναι ακέραιος).

(γ) Έστω a' και $a'' \in A$ δύο συμμετρικά στοιχεία του $a \in A$ ως προς την πράξη *, οπότε ισχύουν οι

$$a' * a = a * a' = e \qquad \text{(i)}$$

και

$$a'' * a = a * a'' = e \qquad \text{(ii)}$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} a'' &= a'' * e && \text{(ορισμός του ουδέτερου στοιχείου)} \\ &= a'' * (a * a') && \text{(από την (i))} \\ &= (a'' * a) * a' && \text{(η * είναι προσεταιριστική αφού το } (A,*) \text{ είναι ημιομάδα)} \\ &= e * a' && \text{(από την (ii))} \\ &= a' \end{aligned}$$

Άρα αν υπάρχει το συμμετρικό στοιχείο ενός στοιχείου $a \in A$, τότε αυτό είναι μοναδικό.

Πρόβλημα 4.

(α) Διατυπώστε τον ορισμό της **αβελιανής ομάδας**. **5μ.**

(β) Δείξτε ότι το ζεύγος $(\mathbf{R}^3,+)$ όπου + η συνήθης πράξη της πρόσθεσης στον $\mathbf{R}^3$ είναι αβελιανή ομάδα. **20μ.**

(γ) Ορίζουμε τώρα την πράξη * στον $\mathbf{R}^3$:

$$u*v=(u_1v_1,u_2v_2,u_3v_3)\in\mathbf{R}^3 \quad \textit{όπου} \quad u=(u_1,u_2,u_3),\, v=(v_1,v_2,v_3)\in\mathbf{R}^3$$

Είναι το ζεύγος $(\mathbf{R}^3,*)$ ημιομάδα, ομάδα, ή αβελιανή ομάδα; Αιτιολογήστε την απάντησή σας. **10μ**

(α) Το ζεύγος $(G,\cdot)$ όπου G ένα μη κενό σύνολο και $\cdot$ μια πράξη στο G καλείται **αβελιανή ομάδα** αν ισχύουν τα εξής:

(i) Η πράξη $\cdot$ είναι προσεταιριστική, δηλ. $a(bc)=(ab)c \quad \forall a,b,c\in G$

(ii) Υπάρχει το ουδέτερο στοιχείο $e\in G$ ως προς την πράξη $\cdot$ τέτοιο ώστε $ae=ea=a \quad \forall a\in G$

(iii) Κάθε στοιχείο $a\in G$ έχει αντίστροφο $a^{-1}\in G$ τέτοιο ώστε $aa^{-1}=a^{-1}a=e$

(iv) Η πράξη $\cdot$ είναι αντιμεταθετική, δηλ. $ab=ba \quad \forall a,b\in G$

(β) Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u=(u_1,u_2,u_3),\, v=(v_1,v_2,v_3),\, w=(w_1,w_2,w_3)\in\mathbf{R}^3$$

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τέσσερις συνθήκες του πιο πάνω ορισμού.

(i) $u+(v+w)=(u_1+v_1+w_1,\, u_2+v_2+w_2,\, u_3+v_3+w_3)=(u+v)+w \quad \forall u,v,w\in\mathbf{R}^3$

(ii) Το μηδενικό στοιχείο του $\mathbf{R}^3$ είναι το $\mathbf{0}=(0,0,0)$:

$$u+\mathbf{0}=\mathbf{0}+u=u,\quad u\in\mathbf{R}^3$$

(iii) Το αντίθετο στοιχείο του $u\in\mathbf{R}^3$ είναι το $-u=(-u_1,-u_2,-u_3)$:

$$u+(-u)=(-u)+u=\mathbf{0},\quad u\in\mathbf{R}^3$$

(iv) Η πράξη + είναι αντιμεταθετική αφού $u+v=(u_1+v_1,\, u_2+v_2,\, u_3+v_3)=v+u \quad \forall u,v\in\mathbf{R}^3$

Άρα πράγματι το ζεύγος $(\mathbf{R}^3,+)$ είναι αβελιανή ομάδα.

(γ) Παρατηρούμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (i), (ii) και (iv) αλλά όχι και η (iii).

(i) $u*(v*w)=(u_1v_1w_1,\, u_2v_2w_2,\, u_3v_3w_3)=(u*v)*w \quad \forall u,v,w\in\mathbf{R}^3$

(ii) Το ουδέτερο στοιχείο του $\mathbf{R}^3$ ως προς την πράξη * είναι το $e=(1,1,1)$:

$$u*e=e*u=u,\quad u\in\mathbf{R}^3$$

(iv) Η πράξη * είναι αντιμεταθετική αφού $u*v=(u_1v_1,\, u_2v_2,\, u_3v_3)=v*u \quad \forall u,v\in\mathbf{R}^3$

(iii) Αν το u' είναι το συμμετρικό του $u\in\mathbf{R}^3$ ως προς την πράξη * έχουμε:

$$u*u'=e \quad\Rightarrow\quad (u_1u_1',\, u_2u_3',\, u_2u_3')=(1,1,1) \quad\Rightarrow\quad u_i'=\frac{1}{u_i},\quad i=1,2,3$$

Παρατηρούμε ότι το u δεν έχει αντίστροφο αν κάποια συνιστώσα του είναι μηδέν. Είναι φανερό ότι υπάρχουν στοιχεία του $\mathbf{R}^3$ που δεν έχουν αντίστροφο και έτσι το $(\mathbf{R}^3,*)$ είναι απλά ημιομάδα.