ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Χειμερινό εξάμηνο 2021-2022, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
1 κουίζ, Διάρκεια: 40 min
22 Σεπτεμβρίου, 2021

Δίνονται 7 προβλήματα που αντιστοιχούν σε 125 μονάδες με άριστα το 100!

ΟΝΟΜΑ: **Αρ. Πολ. Ταυτ.**

Πρόβλημα 1. Θεωρούμε τα διανύσματα

$$u=(2,-1,1,1), \quad v=(-1,3,0,2)$$

(α) Υπολογίστε το **εσωτερικό γινόμενο** $u\cdot v$. **4μ.**
(β**)** Βρείτε τις **νόρμες** των u και v. **4μ.**
(γ) Επαληθεύσατε την **ανισότητα Cauchy-Schwarz** για τα u και v. **3μ.**
(δ) Για ποια τιμή του α είναι το διάνυσμα

$$w=(a,2,-1,2\alpha)$$

ορθογώνιο με το u **;** **4μ.**

(α)

$$u\cdot v=-2-3+0+2=-3$$

(β)

$$\|u\|=\sqrt{4+1+1+1}=\sqrt{7}$$

$$\|v\|=\sqrt{1+9+0+4}=\sqrt{14}$$

(ε) Πρέπει να ισχύει

$$|u\cdot v|\le\|u\|\|v\| \quad \text{δηλ.} \quad 3\le\sqrt{7}\,\sqrt{14} \;\; \text{ή} \;\; 3\le 7\sqrt{2}.$$

Πράγματι η ανισότητα Cauchy-Schwarz επαληθεύεται.

(δ) Για να είναι τα u και w ορθογώνια πρέπει

$$u\cdot w=0 \quad\Rightarrow\quad 2a-2-1+2a=0 \quad\Rightarrow\quad 4a=3 \quad\Rightarrow\quad a=\frac{3}{4}$$

Πρόβλημα 2. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Αντιμεταθέσιμοι πίνακες**	**2μ.**
(β) **Κάτω τριγωνικός** πίνακας	**2μ.**
(γ) **Διαγώνιος** πίνακας	**2μ.**
(δ) **Ενελικτικός** πίνακας	**2μ.**
(ε) **Αδύναμος** πίνακας	**2μ.**

(α) Οι n×n πίνακες A και B είναι **αντιμεταθέσιμοι** αν $AB = BA$.

(β) **Κάτω τριγωνικός** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας *A* του οποίου όλα τα στοιχεία που βρίσκονται πάνω από την κύρια διαγώνιο είναι μηδέν:

$$a_{ij} = 0 \text{ για } i < j$$

(γ) **Διαγώνιος** είναι ένας τετραγωνικός πίνακας $A = \left(a_{ij}\right)_{n\times n}$ τέτοιος ώστε

$$a_{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \cdots, n$$

(τα εξωδιαγώνια στοιχεία είναι όλα μηδέν).

(δ) **Ενελικτικός** καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας A για τον οποίο ισχύει $A^2 = I$.

(δ) **Αδύναμος** καλείται ένας τετραγωνικός πίνακας A για τον οποίο ισχύει $A^2 = A$.

Πρόβλημα 3. Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{και} \quad X = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(α) Βρείτε το **ίχνος** του A. **3μ.**

(β**)** Υπολογίστε το **γινόμενο** AX. **4μ.**

(γ) Βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε να ισχύει $AX = \lambda X$. **2μ.**

(δ) Υπολογίστε τον πίνακα $A - \lambda I$, όπου I ο 3×3 **ταυτοτικός πίνακας** και στη συνέχεια βρείτε το **ίχνος** του. **6μ.**

(α)

$$trA = a_{11} + a_{22} + a_{33} = 4 - 1 + 1 = 4$$

(β)

$$AX = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - 2 + 2 \\ 0 - 1 - 3 \\ 0 - 5 + 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4 \\ -4 \end{bmatrix} = -4X$$

(γ) Από το (β) βλέπουμε ότι $\lambda = -4$.

(δ)

$$A - \lambda I = A + 4I = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 5 & -5 & 1 \end{bmatrix} + 4 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & -2 & 2 \\ 3 & 3 & -3 \\ 5 & -5 & 5 \end{bmatrix}$$

και

$$tr(A - \lambda I) = 8 + 3 + 5 = 16$$

Πρόβλημα 4

(α) Κατασκευάστε τους πίνακες $A=\left(1+\delta_{ij}\right)_{3\times 3}$ και $B=\left(-1+4\delta_{ij}\right)_{3\times 3}$. **6μ.**

(β) Υπολογίστε το **γινόμενο** AB. **4μ.**

(γ) Με τη βοήθεια του αποτελέσματος στο (β) βρείτε τους **αντίστροφους** των A και B. **5μ.**

(α)

$$A=\left(1+\delta_{ij}\right)_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$B=\left(-1+4\delta_{ij}\right)_{3\times 3}=\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

(β)

$$AB=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}=4I$$

(γ) Επειδή ισχύει $A(B/4)=I$ έχουμε $A^{-1}=B/4$. Παρομοίως, επειδή ισχύει $(A/4)B=I$ έχουμε $B^{-1}=A/4$.

Πρόβλημα 5
Αν

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(α) Να βρεθεί ο A^2. **4μ.**
(β) Να βρεθεί ο A^{-1}. **3μ.**
(γ) Να βρεθεί ο A^r όπου r ακέραιος. **3μ.**

(α)

$$A^2 = AA = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(β) Έστω ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Επειδή $AA^{-1} = I$, έχουμε

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow$$

$a_{21} = a_{32} = a_{13} = 1$ ενώ τα υπόλοιπα στοιχεία είναι μηδέν. Παρατηρούμε ότι

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = A^2$$

(γ) Είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} A^0 &= I \\ A^1 &= A \\ A^2 &= A^{-1} \\ A^3 &= AA^2 = AA^{-1} = I \\ A^4 &= AA^3 = AI = A \\ &\vdots \end{aligned} \qquad \text{και} \qquad \begin{aligned} A^0 &= I \\ A^{-1} &= A^{-1} \\ A^{-2} &= \left(A^2\right)^{-1} = \left(A^{-1}\right)^{-1} = A \\ A^{-3} &= A^{-1}A^{-2} = A^{-1}A = I \\ A^{-4} &= A^{-1}A^{-3} = A^{-1}I = A^{-1} \\ &\vdots \end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε ότι ισχύει

$$A^r = \begin{cases} I, & r = 3k \\ A, & r = 3k+1, \quad k \in \mathbb{Z} \\ A^{-1}, & r = 3k+2 \end{cases}$$

Πρόβλημα 6

(α) Διατυπώστε τις τέσσερις ιδιότητες της πράξης της **πρόσθεσης** στον χώρο $M_{m\times n}$. **10μ.**

(β) Δείξτε ότι ο **αντίθετος πίνακας** ενός $m\times n$ πίνακα A είναι **μοναδικός**. **10μ.**

(γ) Αν ο $A=\left(a_{ij}\delta_{ij}\right)_{n\times n}$ είναι **αντιστρέψιμος** και $A^{-1}=\left(a'_{ij}\right)_{n\times n}$, να βρεθούν τα στοιχεία

$$a'_{ij} \quad i,j=1,\cdots,n$$ **10μ.**

(α)

Α1. **Προσεταιριστική ιδιότητα**. Για κάθε $A,B,C\in M_{m\times n}$ ισχύει

$$A+(B+C)=(A+B)+C$$

Α2. Υπάρχει το **μηδενικό στοιχείο** $O\in M_{m\times n}$ τέτοιο ώστε

$$A+O=A, \quad \forall A\in M_{m\times n}$$

Α3. Για κάθε πίνακα $A\in M_{m\times n}$ υπάρχει ο **αντίθετος πίνακας** $(-A)\in M_{m\times n}$ που είναι τέτοιος ώστε

$$A+(-A)=O$$

Α4. **Αντιμεταθετική ιδιότητα**. Για κάθε $A,B\in M_{m\times n}$ ισχύει

$$A+B=B+A$$

(β) Ο αντίθετος πίνακας του $A=(a_{ij})_{m\times n}$ ορίζεται από την $-A=(-a_{ij})_{m\times n}$ και ικανοποιεί την

$$A+(-A)=O$$

Αν A' ένας άλλος αντίθετος του A τότε

$$A+A'=O \quad\Rightarrow\quad (-A)+A+A'=(-A)+O \quad\Rightarrow\quad O+A'=(-A) \quad\Rightarrow\quad A'=(-A)$$

Άρα ο αντίθετος του A είναι μοναδικός.

(γ) Γνωρίζουμε ότι

$$AA^{-1}=I \quad\Rightarrow\quad \left(\sum_{\ell=1}^{n} a_{i\ell}\delta_{i\ell}a'_{\ell j}\right)_{n\times n}=\left(\delta_{ij}\right)_{n\times n} \quad\Rightarrow\quad \left(a_{ii}a'_{ij}\right)_{n\times n}=\left(\delta_{ij}\right)_{n\times n} \quad\Rightarrow\quad a_{ii}a'_{ij}=\delta_{ij} \quad\Rightarrow$$

$$a'_{ij}=\frac{\delta_{ij}}{a_{ii}}, \quad i,j=1,\cdots,n$$

ή

$$a'_{ij}=\begin{cases} 1/a_{ii}, & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$$

Παρατήρηση

Είναι φανερό ότι ο A είναι διαγώνιος πίνακας. Εφόσον είναι αντιστρέψιμος τα διαγώνια στοιχεία του είναι μη μηδενικά, $a_{ii}\neq 0, \quad i=1,\cdots,n$. Ο αντίστροφός του A^{-1} είναι επίσης διαγώνιος και τα στοιχεία του είναι τα αντίστροφα των διαγώνιων στοιχείων του A. Μπορούμε ακόμα να γράψουμε

$$A^{-1}=\left(\frac{\delta_{ij}}{a_{ii}}\right)_{n\times n}$$

Πρόβλημα 7

(α) Αν οι $A,B,C\in M_{n\times n}$ είναι **αντιστρέψιμοι**, δείξτε ότι

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$ **8μ.**

(β) Αποδείξτε την πιο κάτω ιδιότητα αφού αναφέρετε ποιοι πρέπει να είναι οι τύποι (διαστάσεις) των πινάκων A, B, και C για να ορίζονται οι πράξεις:

$$A(B+C)=AB+AC$$ **10μ.**

(γ) Αν $A\in M_{m\times n}$ και $B\in M_{n\times m}$, δείξτε ότι

$$tr(AB)=tr(BA)$$ **12μ.**

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$ABC\,C^{-1}B^{-1}A^{-1}=I$$

Πράγματι

$$ABC\,C^{-1}B^{-1}A^{-1}=AB(C\,C^{-1})B^{-1}A^{-1}=ABIB^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I$$

Εναλλακτική απόδειξη

Δείχνουμε πρώτα ότι $(AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}$:

$$ABB^{-1}A^{-1}=A(BB^{-1})A^{-1}=AIA^{-1}=AA^{-1}=I \quad\Rightarrow\quad (AB)^{-1}=B^{-1}A^{-1}.$$

Με βάση το πιο πάνω αποτέλεσμα έχουμε τώρα

$$(ABC)^{-1}=C^{-1}\left(AB\right)^{-1}=C^{-1}B^{-1}A^{-1}$$

(β) Πρέπει να είναι $A\in M_{m\times p}$ και $B,C\in M_{p\times n}$. Για την απόδειξη έχουμε

$$A(B+C)=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}(b_{kj}+c_{kj})\right)_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{p}(a_{ik}b_{kj}+a_{ik}c_{kj})\right)_{m\times n}=\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times n}+\left(\sum_{k=1}^{p}a_{ik}c_{kj}\right)_{m\times n}\Rightarrow$$
$$A(B+C)=AB+AC$$

(γ) Για τα δύο γινόμενα έχουμε

$$AB=\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{kj}\right)_{m\times m}\quad\Rightarrow\quad tr(AB)=\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{m}\sum_{k=1}^{n}a_{ik}b_{ki}$$

και

$$BA=\left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{kj}\right)_{n\times n}\quad\Rightarrow\quad tr(BA)=\sum_{i=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{ki}\right)=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{m}b_{ik}a_{ki}=tr(AB)$$