ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Χειμερινό εξάμηνο 2021-- 2022, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
3ο κουίζ, Διάρκεια: 40 min
27 Οκτωβρίου, 2021

ΟΝΟΜΑ: Αρ. Πολ. Ταυτ.

Πρόβλημα 1. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Γραμμικά ανεξάρτητο** σύνολο	**3μ.**
(β) **Βάση** διανυσματικού χώρου	**3μ.**
(γ) **Γραμμική θήκη**	**3μ.**
(δ) **Γεννήτορες** διανυσματικού χώρου	**3μ.**
(ε) **Συντεταγμένες** στοιχείου διανυσματικού χώρου	**3μ.**

(α) Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K. Το πεπερασμένο υποσύνολο $S=\{u_1,\cdots,u_n\}\subset V$ καλείται **γραμμικά ανεξάρτητο** αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\cdots+\lambda_n u_n=\mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1=\lambda_2=\cdots=\lambda_n=0$$

(β) Έστω *V* γραμμικός χώρος πάνω σε ένα σώμα *K* και $A=\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του *V*. Θα λέμε ότι το *A* είναι **βάση** (basis) του *V* αν
(i) τα $u_1,u_2,\cdots,u_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και
(ii) τα $u_1,u_2,\cdots,u_n$ παράγουν τον *V*.

(γ) Έστω *V* γραμμικός χώρος πάνω σε ένα σώμα *K* και $S=\{u_1,u_2,\cdots,u_m\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του *V*. Το σύνολο *L*(*S*) των γραμμικών συνδυασμών των $u_1,u_2,\cdots,u_m$ συμβολίζεται επίσης με

$$[S] \quad \text{ή} \quad [u_1,u_2,\cdots,u_m] \quad \text{ή} \quad span[u_1,u_2,\cdots,u_m]$$

και καλείται **γραμμική θήκη** ή **γραμμικό περίβλημα** (linear span) των $u_1,u_2,\cdots,u_m$.

(δ) Τα στοιχεία $\{u_1,u_2,\cdots,u_n\}$ του διανυσματικού χώρου V είναι **γεννήτορές** του αν τον *παράγουν*, αν δηλ. κάθε στοιχείο $u\in V$ γράφεται ως γραμμικός συνδυασμός των $u_1,u_2,\cdots,u_n$.

(ε) Έστω V διανυσματικός χώρος πάνω σε ένα σώμα K και ένα διάνυσμα $u\in V$. Καλούμε **συντεταγμένες** του $u\in V$ ως προς μια βάση $B=\{u_1,\cdots,u_n\}$ του V τους αριθμούς $a_1,\cdots,a_n\in K$ για τους οποίους ισχύει

$$u=a_1u_1+\cdots+a_nu_n$$

Πρόβλημα 2. Εξετάστε και εξηγήστε αν τα πιο κάτω σύνολα είναι **βάσεις** του $\mathbf{R}^3$:

(α) $A=\{u_1=(1,1,1), \quad u_2=(1,0), \quad u_3=(0,0,0,1)\}$ **3μ.**

(β) $B=\{u_1=(0,1,1), u_2=(1,0,1), u_3=(1,1,2)\}$ **3μ.**

(γ) $C=\{u_1=(1,1,1), u_2=(0,0,0), u_3=(0,0,1)\}$ **3μ.**

(δ) $D=\{u_1=(1,-1,0), u_2=(1,1,0), u_3=(0,1,1), u_4=(1,1,1)\}$ **3μ.**

(ε) $E=\{u_1=(1,1,0), u_2=(1,-1,0), \ u_3=(1,1,1)\}$ **8μ.**

(α) Το A δεν μπορεί να είναι βάση του $\mathbf{R}^3$ αφού δεν είναι υποσύνολό του (περιέχει στοιχεία που δεν ανήκουν στον $\mathbf{R}^3$).

(β) Το B δεν είναι βάση του $\mathbf{R}^3$ επειδή είναι γραμμικά εξαρτημένο (το u_3 είναι γραμμικός συνδυασμός των άλλων στοιχείων: $u_3=u_1+u_2$).

(γ) Το C είναι γραμμικά εξαρτημένο αφού περιέχει το μηδενικό στοιχείο του $\mathbf{R}^3$. Άρα δεν είναι βάση του $\mathbf{R}^3$.

(δ) Το D είναι γραμμικά εξαρτημένο αφού περιέχει 4 στοιχεία ενώ $\dim\mathbf{R}^3=3$ (οποιοδήποτε υποσύνολο στοιχείων του $\mathbf{R}^3$ με περισσότερα από 3 στοιχεία είναι γραμμικά εξαρτημένο). Άρα το D δεν είναι βάση του $\mathbf{R}^3$.

(δ) Επειδή το E περιέχει 3 στοιχεία και $\dim\mathbf{R}^3=3$, τότε αυτό είναι βάση του $\mathbf{R}^3$ αν είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Αν λοιπόν

$$\lambda_1 u_1+\lambda_2 u_2+\lambda_3 u_3=\mathbf{0} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1(1,1,0)+\lambda_2(1,-1,0)+\lambda_3(1,1,1)=(0,0,0) \quad\Rightarrow$$

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3, \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3, \lambda_3)=(0,0,0) \quad\Rightarrow\quad \left.\begin{array}{c}\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_1-\lambda_2+\lambda_3=0\\ \lambda_3=0\end{array}\right\} \quad\Rightarrow\quad \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$$

Επειδή το E είναι γραμμικά ανεξάρτητο και $\dim\mathbf{R}^3=3$, το E είναι βάση του $\mathbf{R}^3$.

Πρόβλημα 3. Βρείτε τις **συντεταγμένες** του $p = 2 - 3x + x^2$ ως προς τις ακόλουθες βάσεις του P_2:

(α) **Συνήθης βάση** του P_2 **5μ.**

(β) $A = \left\{ p_1 = 1,\ p_2 = 1 + x,\ p_3 = 1 + x + x^2 \right\}$ **10μ.**

(α) Οι συντεταγμένες του $p = 2 - 3x + x^2$ ως προς τη συνήθη βάση $\left\{1,\ x,\ x^2\right\}$ είναι προφανώς οι (2,-3,1).

(β) Έστω $\left(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3\right)$ οι συντεταγμένες του $p = 2 - 3x + x^2$ ως προς τη βάση A. Ισχύει τότε

$$\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = p = 2 - 3x + x^2 \Rightarrow \quad \lambda_1 \cdot 1 + \lambda_2 (1 + x) + \lambda_3 (1 + x + x^2) = 2 - 3x + x^2 \Rightarrow$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + (\lambda_2 + \lambda_3)x + \lambda_3 x^2 = 2 - 3x + x^2 \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 2 \\ \lambda_2 + \lambda_3 = -3 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{r} \lambda_1 = 5 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}\right\}$$

Άρα οι του $p = 2 - 3x + x^2$ ως προς τη βάση A είναι οι (5,-4,1).

Πρόβλημα 4

(α) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του

$$W = \left\{ A \in M_{2\times 2} \quad : \quad A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

10μ.

(β) Να **επεκταθεί** η βάση που βρήκατε σε μια **βάση** του $M_{2\times 2}$. **10μ.**

(α) Παρατηρούμε ότι το γενικό στοιχείο του W γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2$$

Άρα το σύνολο $B = \{E_1, E_2\}$ παράγει τον W. Είναι επίσης γραμμικά ανεξάρτητο αφού ο E_2 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του E_1. Άρα το $B = \{E_1, E_2\}$ αποτελεί βάση του W και έτσι $\dim W = 2$.

(β) Επειδή $\dim M_{2\times 2} = 4$, απαιτούνται 2 επιπλέον πίνακες για να επεκταθεί το *B* σε βάση του $M_{2\times 2}$. Επιλέγουμε πίνακες που δεν ανήκουν στο W (δηλ. τη γραμμική θήκη του B). Μια επιλογή είναι η εξής:

$$B' = \left\{ E_1, E_2, E_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, E_4 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο B' είναι γραμμικά ανεξάρτητο. Πράγματι από την

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = O \quad \Rightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_3 & \lambda_2 + \lambda_4 \\ -\lambda_2 & \lambda_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0$$

Άρα πράγματι το B' είναι βάση του $M_{2\times 2}$.

Πρόβλημα 5. Έστω W_1 ο χώρος που παράγεται από το $A=\{u_1=(1,1,0,0),\quad u_2=(0,0,1,1)\}$.

(α) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_1. **4μ.**

(β) Ποια είναι η γενική μορφή των στοιχείων του W_1; **2μ.**

(γ) Δείξτε ότι ο W_1 είναι **υπόχωρος** του $\mathbf{R}^4$. **6μ.**

(δ) Έστω W_2 ο χώρος των διανυσμάτων του $\mathbf{R}^4$ που είναι **ορθογώνια** με τα u_1 και u_2. Να βρεθεί η γενική μορφή των στοιχείων του W_2. **4μ.**

(ε) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_2. **4μ**

(α) Επειδή το A παράγει τον W_1 και είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού το u_1 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του u_2, το A είναι βάση του W_1 και έτσι $\dim W_1 = 2$.

(β) Τα στοιχεία του W_1 είναι γραμμικοί συνδυασμοί των u_1 και u_2. Άρα η γενική μορφή των στοιχείων του W_1 είναι

$$u = au_1 + bu_2 = (a,a,b,b),\quad a,b\in\mathbf{R}$$

(γ) Ελέγχουμε αν ικανοποιούνται οι 3 συνθήκες του Θ2.2.2. Πράγματι

(i) Θέτοντας $a=b=0$ έχουμε $(0,0,0,0)\in W_1$

(ii) Για τα $u_1=(a_1,a_1,b_1,b_1),\quad u_2=(a_2,a_2,b_2,b_2)\in W_1$ έχουμε

$$u_1+u_2=\left(a_1+a_2,a_1+a_2,b_1+b_2,b_1+b_2\right)\in W_1$$

(το W_1 είναι κλειστό ως προς την πρόσθεση).

(iii) Αν $\lambda\in\mathbf{R}$ και $u=(a,a,b,b)\in W_1$ έχουμε

$$\lambda u=(\lambda a,\lambda a,\lambda b,\lambda b)\in W_1$$

(το W_1 είναι κλειστό ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό). Άρα το W_1 είναι υπόχωρος του $\mathbf{R}^4$.

(δ) Για να είναι το $u=(a,b,c,d)$ ορθογώνιο με τα u_1 και u_2 πρέπει

$$\left.\begin{aligned} u\cdot u_1&=0\\ u\cdot u_2&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned}(a,b,c,d)\cdot(1,1,0,0)&=0\\ (a,b,c,d)\cdot(0,0,1,1)&=0\end{aligned}\right\}\quad\Rightarrow\quad \left.\begin{aligned}a+b&=0\\ c+d&=0\end{aligned}\right\}$$

Άρα η γενική μορφή των στοιχείων του W_2 είναι

$$(a,-a,b,-b),\quad a,b\in\mathbf{R}$$

(ε) Παρατηρούμε ότι

$$(a,-a,b,-b)=a(1,-1,0,0)+b(0,0,1,-1)=av_1+bv_2$$

Βλέπουμε ότι το σύνολο $B=\{v_1=(1,-1,0,0),\quad v_2=(0,0,1,-1)\}$ παράγει τον W_2 και είναι γραμμικά ανεξάρτητο αφού το v_1 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του v_2. Άρα το B είναι βάση του W_2 και $\dim W_2 = 2$.

Πρόβλημα 6. Έστω οι πιο κάτω υπόχωροι του $\mathbf{R}^5$:

$$W_1 = \{(a,0,b,0,c), \quad a,b,c \in \mathbf{R}\} \text{ και } W_2 = \{(d,e,0,0,d), \quad d,e \in \mathbf{R}\}$$

(α) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_1 . **5μ.**

(β) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W_2 . **5μ.**

(γ) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του $W_1 \cap W_2$. **5μ.**

(δ) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του $W_1 + W_2$. **5μ.**

(ε) Εξηγήστε κατά πόσον ισχύει η $\mathbf{R}^5 = W_1 \oplus W_2$. **5μ.**

(α) Παρατηρούμε ότι το γενικό στοιχείο του W_1 γράφεται ως εξής:

$$(a,0,b,0,c) = a(1,0,0,0,0) + b(0,0,1,0,0) + c(0,0,0,0,1) = ae_1 + be_3 + ce_5$$

Το σύνολο $\{e_1, e_3, e_5\}$ παράγει μονοσήμαντα τον W_1 και άρα είναι βάση του. Έχουμε έτσι $\dim W_1 = 3$.

Παρατήρηση: Τα e_1, e_3, e_5 είναι γραμμικά ανεξάρτητα ως στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbf{R}^5$.

(β) Παρατηρούμε ότι το γενικό στοιχείο του W_2 γράφεται ως εξής:

$$(d,e,0,0,d) = d(1,0,0,0,1) + e(0,1,0,0,0) = du_1 + eu_2$$

Επειδή το σύνολο $\{u_1 = (1,0,0,0,1), \quad u_2 = (0,1,0,0,0)\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο (το u_1 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του u_2) και παράγει τον W_2 , είναι βάση του. Έχουμε έτσι $\dim W_2 = 2$.

(γ) Για τα στοιχεία της $W_1 \cap W_2$ ισχύει

$$(a,0,b,0,c) = (d,e,0,0,d) \quad \Rightarrow \quad \left.\begin{array}{c} e = b = 0 \\ a = c = d \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad W_1 \cap W_2 = \{(d,0,0,0,d), \quad d \in \mathbf{R}\}$$

Παρατηρούμε ότι το $\{u_1 = (1,0,0,0,1)\}$ παράγει μονοσήμαντα την τομή $W_1 \cap W_2$ και άρα είναι βάση της. Έτσι έχουμε $\dim W_1 \cap W_2 = 1$.

(δ) Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.3.8 ότι

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim W_1 \cap W_2 = 3 + 2 - 1 = 4$$

Άρα μια βάση του αθροίσματος $W_1 + W_2$ περιέχει 4 στοιχεία. Επειδή $u_1 = e_1 + e_5$, επιλέγουμε τα $\{e_1, e_3, e_5, u_2 = e_2\}$.

Παρατήρηση: Τα πιο πάνω στοιχεία είναι γραμμικά ανεξάρτητα αφού είναι στοιχεία της συνήθους βάσης του $\mathbf{R}^5$.

(ε) Δεν ισχύει η $\mathbf{R}^5 = W_1 \oplus W_2$ επειδή $W_1 \cap W_2 \neq \varnothing$.