ΜΑΣ121: ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι
Χειμερινό εξάμηνο 2021-- 2022, Διδάσκων: Γιώργος Γεωργίου
4ο κουίζ, Διάρκεια: 40 min
24 Νοεμβρίου, 2021

Δίνονται 6 προβλήματα που αντιστοιχούν σε 100 μονάδες με άριστα το 100!

ΟΝΟΜΑ: Αρ. Πολ. Ταυτ.

Πρόβλημα 1. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) **Γραμμικός χώρος γραμμών** **3μ.**
(β) **Βαθμός πίνακα.** **3μ.**
(γ) **Ισοδύναμοι πίνακες** **2μ.**
(δ) **Ιδιάζων πίνακας** **2μ.**
(ε) **Αλγεβρικό συμπλήρωμα** **3μ.**

(α) **Γραμμικός χώρος γραμμών** είναι η γραμμική θήκη των γραμμών ενός πίνακα.

(β) Ονομάζουμε **βαθμό** ή **τάξη** (rank) ενός πίνακα $A \in M_{n\times n}$ και τον συμβολίζουμε με $\mathrm{rank}(A)$ τη κοινή διάσταση των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών του A:

$$\mathrm{rank}(A) = \gamma(A) = \sigma(A)$$

(γ) Οι πίνακες $A, B \in M_{m\times n}$ είναι **ισοδύναμοι** (equivalent) αν έχουν τον ίδιο βαθμό, δηλ. αν

$$\mathrm{rank}(A) = \mathrm{rank}(B)$$

(δ) Ένας τετραγωνικός πίνακας A καλείται **ιδιάζων** (singular) αν $\det A = 0$

(ε) Έστω $A \in M_{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας. Καλούμε **ελάσσονα ορίζουσα** και τη συμβολίζουμε με M_{ij} την ορίζουσα τάξης $(n-1)$ που προκύπτει αν διαγράψουμε την i γραμμή και την j στήλη της ορίζουσας του A. Το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** του στοιχείου a_{ij} ορίζεται ως η προσημασμένη ελάσσονα ορίζουσα:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

Πρόβλημα 2.
(α) Να βρεθούν οι **βαθμοί** των πιο κάτω πινάκων.

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&2&4\\5&4&9\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}1&-1&1&-1\\-2&2&-2&2\\3&-3&3&-3\\-4&4&-4&4\end{bmatrix},\quad C=\begin{bmatrix}1&-2&3&2&1&0&4\\2&-3&1&1&1&-2&3\end{bmatrix}$$

12μ.

(β) Να βρεθεί μια βάση και η διάσταση του χώρου που **παράγεται** από τα διανύσματα

$$u_1=(1,-2,0,4),\quad u_2=(3,1,1,0),\quad u_3=(-1,-5,-1,8),\quad u_4=(3,8,2,-12)$$

8μ.

(α) Βρίσκουμε τον κλιμακωτό του A:

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3\\1&0&1\\2&2&4\\5&4&9\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&-2&-2\\0&-6&-6\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&-2&-2\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&2&3\\0&1&1\\0&0&0\\0&0&0\end{bmatrix}\quad\Rightarrow\quad \text{rank}A=2$$

Για τον B παρατηρούμε ότι όλες οι γραμμές είναι βαθμωτά πολλαπλάσια της 1ης γραμμής. Άρα

$$\text{rank}B=1$$

Για τον C παρατηρούμε ότι οι δύο γραμμές του είναι γραμμικά ανεξάρτητες αφού η μια δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο της άλλης. Άρα

$$\text{rank}C=2$$

(β) Ο χώρος που παράγεται είναι ο γραμμικός χώρος γραμμών του πίνακα που έχει ως γραμμές τα δοσμένα διανύσματα και έτσι η διάστασή του είναι ίση με τον βαθμό του A.
Βρίσκουμε τον κλιμακωτό A:

$$A=\begin{bmatrix}u_1\\u_2\\u_3\\u_4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&-2&0&4\\3&1&1&0\\-1&-5&-1&8\\3&8&2&-12\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&0&4\\0&7&1&-12\\0&-7&-1&12\\0&14&2&-24\end{bmatrix}\sim\begin{bmatrix}1&-2&0&4\\0&7&1&-12\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

Ο κλιμακωτός έχει 2 μη μηδενικές γραμμές. Άρα $\text{rank}A=2$.

Μια βάση του γραμμικού χώρου γραμμών είναι η

$$B=\{v_1=(1,-2,0,4),\quad v_1=(0,7,1,-12)\}$$

Πρόβλημα 3.

(α) Να δειχθεί η πρόταση: Αν ο $B \in M_{m\times m}$ είναι αντιστρέψιμος πίνακας και $A \in M_{m\times n}$, τότε

$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(A)$$

10μ.

(β) Να δειχθεί η πρόταση: Αν $A, B \in M_{n\times n}$ ισχύει

$$\det(AB) = \det(A)\det(B)$$

10μ.

(γ) Δείξτε ότι αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος ισχύει

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

5μ.

(α) Αν ο $B \in M_{m\times m}$ είναι αντιστρέψιμος, τότε σύμφωνα με το Θ.5.3.5 είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων

$$B = E_1 E_2 \cdots E_k$$

Άρα

$$BA = E_1 E_2 \cdots E_k A$$

οπότε οι BA και A είναι γραμμοϊσοδύναμοι και άρα, σύμφωνα με την Πρ. 5.5.4, έχουν τον ίδιο βαθμό:

$$\operatorname{rank}(BA) = \operatorname{rank}(A)$$

(β) Αν κάποιος από τους δύο πίνακες δεν είναι αντιστρέψιμος θα έχει μηδενική ορίζουσα οπότε

$$\det(A)\det(B) = 0$$

Μηδενική ορίζουσα θα έχει τότε και ο AB αφού δεν θα είναι αντιστρέψιμος. ‘Άρα $\det(AB) = 0$ και η ταυτότητα ισχύει.

Αν τώρα οι $A, B \in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμοι τότε μπορούν να εκφραστούν ως γινόμενα στοιχειωδών πινάκων και:

$$AB = \left(E_1 \cdots E_k\right)\left(E_1' \cdots E_\ell'\right) \quad \Rightarrow \quad \det\left(AB\right) = \det\left(E_1 \cdots E_k E_1' \cdots E_\ell'\right)$$

Σύμφωνα με την Πρ. 6.3.2 έχουμε

$$\begin{aligned}\det\left(AB\right) &= \det(E_1)\cdots\det(E_k)\cdot\det(E_1')\cdots\det(E_\ell') = \left\{\det(E_1)\cdots\det(E_k)\right\}\cdot\left\{\det(E_1')\cdots\det(E_\ell')\right\} \\ &= \det\left(E_1\cdots E_k\right)\cdot\det\left(E_1'\cdots E_\ell'\right) = \det(A)\det(B)\end{aligned}$$

(γ) Αν ο $A \in M_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος ισχύει $AA^{-1} = I$ και έτσι

$$\det\left(AA^{-1}\right) = \det(I) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det\left(A\right)\det\left(A^{-1}\right) = 1 \quad \Rightarrow \quad \det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$$

(επειδή ο A είναι αντιστρέψιμος, $\det(A) \neq 0$).

Πρόβλημα 4. Να υπολογιστούν οι **ορίζουσες**:

$$(\alpha)\ \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} \qquad (\beta)\ \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \qquad (\gamma)\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} \qquad (\delta)\ \begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix}$$

(2+3+5+5)μ.

(α)

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = 3(-2) - 1\cdot 4 = -10$$

(β) Η ορίζουσα δεν ορίζεται. Ο πίνακας δεν είναι τετραγωνικός.

(γ)

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 6 & 9 \end{vmatrix} = 3\cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -3\cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & -5 & -3 \end{vmatrix} = -3\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & -2 & -3 \end{vmatrix}$$

$$= -3\cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & -8 \end{vmatrix} = (-3)\cdot 1\cdot 2\cdot(-8) = 48$$

(δ)

$$\begin{vmatrix} a & b & b & b \\ b & a & b & b \\ b & b & a & b \\ b & b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+3b & b & b & b \\ a+3b & a & b & b \\ a+3b & b & a & b \\ a+3b & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 1 & a & b & b \\ 1 & b & a & b \\ 1 & b & b & a \end{vmatrix} = (a+3b)\begin{vmatrix} 1 & b & b & b \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} =$$

$$= (a+3b)(a-b)^3$$

Πρόβλημα 5. Δείξτε ότι

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 2\beta & 3\beta \\ 3\beta & \alpha & \beta & 2\beta \\ 2\beta & 3\beta & \alpha & \beta \\ \beta & 2\beta & 3\beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha-2\beta)(\alpha+6\beta)\left(\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2\right)$$

15μ.

Χρησιμοποιούμε τόσο στοιχειώδεις μετασχηματισμούς γραμμών και στηλών όσο και αναπτύγματα:

$$\begin{vmatrix} \alpha & \beta & 2\beta & 3\beta \\ 3\beta & \alpha & \beta & 2\beta \\ 2\beta & 3\beta & \alpha & \beta \\ \beta & 2\beta & 3\beta & \alpha \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha+6\beta & \beta & 2\beta & 3\beta \\ \alpha+6\beta & \alpha & \beta & 2\beta \\ \alpha+6\beta & 3\beta & \alpha & \beta \\ \alpha+6\beta & 2\beta & 3\beta & \alpha \end{vmatrix} = (\alpha+6\beta)\begin{vmatrix} 1 & \beta & 2\beta & 3\beta \\ 1 & \alpha & \beta & 2\beta \\ 1 & 3\beta & \alpha & \beta \\ 1 & 2\beta & 3\beta & \alpha \end{vmatrix} =$$

$$=(\alpha+6\beta)\begin{vmatrix} 1 & \beta & 2\beta & 3\beta \\ 0 & \alpha-\beta & -\beta & -\beta \\ 0 & 2\beta & \alpha-2\beta & -2\beta \\ 0 & \beta & \beta & \alpha-3\beta \end{vmatrix} = (\alpha+6\beta)\begin{vmatrix} \alpha-\beta & -\beta & -\beta \\ 2\beta & \alpha-2\beta & -2\beta \\ \beta & \beta & \alpha-3\beta \end{vmatrix} =$$

$$=(\alpha+6\beta)\begin{vmatrix} \alpha-2\beta & -\beta & -\beta \\ 0 & \alpha-2\beta & -2\beta \\ \alpha-2\beta & \beta & \alpha-3\beta \end{vmatrix} = (\alpha+6\beta)(\alpha-2\beta)\begin{vmatrix} 1 & -\beta & -\beta \\ 0 & \alpha-2\beta & -2\beta \\ 1 & \beta & \alpha-3\beta \end{vmatrix} =$$

$$=(\alpha+6\beta)(\alpha-2\beta)\begin{vmatrix} 1 & -\beta & -\beta \\ 0 & \alpha-2\beta & -2\beta \\ 0 & 2\beta & \alpha-2\beta \end{vmatrix} = (\alpha+6\beta)(\alpha-2\beta)\begin{vmatrix} \alpha-2\beta & -2\beta \\ 2\beta & \alpha-2\beta \end{vmatrix} =$$

$$=(\alpha+6\beta)(\alpha-2\beta)\left[(\alpha-2\beta)^2+4\beta^2\right]=(\alpha-2\beta)(\alpha+6\beta)\left(\alpha^2-4\alpha\beta+8\beta^2\right)$$

Πρόβλημα 6. Αν

$$A=\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 5 & 3 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Να υπολογιστεί το **αλγεβρικό συμπλήρωμα** A_{32} . **8μ.**

(β) Να υπολογιστεί το άθροισμα

$$2A_{31}+(-1)A_{32}+4A_{33}+5A_{34}$$

4μ.

(α)

$$A_{32}=(-1)^{3+2}M_{32}=-\begin{vmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & -1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 3 \\ 0 & -9 & -4 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ -9 & -4 \end{vmatrix}=8+27=35$$

(β) Το άθροισμα είναι το ανάπτυγμα της ορίζουσας

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 2 & -1 & 4 & 5 \\ 1 & -2 & 3 & 1 \end{vmatrix}$$

ως προς τα στοιχεία της 3^{ης} γραμμής. Επειδή δύο γραμμές της ορίζουσας είναι ίσες η τιμή της είναι μηδέν.