ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 18 Νοεμβρίου 2000
ΕΝΔΙΑΜΕΣΗ ΕΞΕΤΑΣΗ

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1

(α) Αν $\mathbf{u}=(3,2,-1)$ και $\mathbf{v}=(\kappa,2,-\kappa)$

(i) **Κανονικοποιήστε** το $\mathbf{u}$. **1μ.**

(ii) Βρείτε την τιμή του κ για να είναι τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ **ορθογώνια** μεταξύ τους. **1μ.**

(β) Έστω V *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K. Να δειχθούν οι εξής προτάσεις:

(i) Το αντίθετο στοιχείο του $u \in V$ είναι **μοναδικό**. **1μ.**

(ii) $-(a\mathbf{u}) = a(-\mathbf{u}) \quad \forall \mathbf{u} \in V\,, \quad a \in K$. **2μ.**

(α) (i) Βρίσκουμε πρώτα τη νόρμα του $\mathbf{u}$.

$$||\mathbf{u}|| \;=\; \sqrt{3^2+2^2+(-1)^2} \;=\; \sqrt{14}$$

Το $\mathbf{u}$ κανονικοποιείται ως εξής:

$$\mathbf{e}_u \;=\; \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} \;=\; \left(\frac{3}{\sqrt{14}}\,,\,\frac{2}{\sqrt{14}}\,,\,-\frac{1}{\sqrt{14}}\right)\,.$$

(ii) Αν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$ είναι ορθογώνια

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad 3\kappa+4+\kappa \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad \kappa \;=\; -1\,.$$

(β) (i) Εξ ορισμού υπάρχει το αντίθετο στοιχείο $-u$ του $u \in V$, τέτοιο ώστε

$$u \,+\, (-u) \;=\; (-u) \,+\, u \;=\; \mathbf{0}\,.$$

Έστω u' ένα άλλο αντίθετο στοιχείο του u, οπότε

$$u \,+\, u' \;=\; u' \,+\, u \;=\; \mathbf{0}\,.$$

Για το u' έχουμε διαδοχικά:

$$u' \;=\; u' \,+\, \mathbf{0} \;=\; u' \,+\, [u \,+\, (-u)] \;=\; (u' \,+\, u) \,+\, (-u) \;=\; \mathbf{0} \,+\, (-u) \;=\; (-u)\,.$$

(Χρησιμοποιήσαμε την προσεταιριστική ιδιότητα.) Άρα το αντίθετο στοιχείο του $u \in V$ είναι μοναδικό.

(ii) Για το διάνυσμα $-(au)$ ισχύει

$$au \,+\, (-(au)) \;=\; \mathbf{0}\,. \tag{1}$$

Από την

$$u \,+\, (-u) \;=\; \mathbf{0} \quad\Longrightarrow\quad a\,[u \,+\, (-u)] \;=\; a\,\mathbf{0} \;=\; \mathbf{0}\,,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την Πρ. 2.1.3. Έχουμε έτσι

$$au \,+\, a(-u) \;=\; \mathbf{0}\,. \tag{2}$$

Εξισώνοντας τις (1) και (2),

$$au \,+\, (-(au)) \;=\; au \,+\, a(-u)\,,$$

και κάνοντας χρήση του νόμου της διαγραφής παίρνουμε

$$-(au) \;=\; a(-u)\,.$$

Πρόβλημα 2

(α) Διατυπώστε τον ορισμό της **βάσης** διανυσματικού χώρου. **1μ.**

(β) Διατυπώστε τον ορισμό της **διάστασης** διανυσματικού χώρου. **1μ.**

(γ) Αν τα x, y, z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα στοιχεία ενός διανυσματικού χώρου V, να δειχθεί ότι τα διανύσματα

$$x+y\ ,\quad x-y\ ,\quad x-2y+z$$

είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. **2μ.**

(δ) Έστω τα διανύσματα $u_1, u_2, \cdots, u_k$ του $\mathbf{R^n}$ και το σύνολο

$$W \;=\; \left\{ u \in \mathbf{R^n} \mid u \cdot u_i \;=\; 0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \;\right\}\ .$$

Δείξτε ότι ο W είναι **υπόχωρος** του $\mathbf{R^n}$. **4μ.**

(α) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος και A=$\{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το A είναι μια **βάση** του V αν

(i) τα $e_1, e_2, \cdots, e_n$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα, και

(ii) τα $e_1, e_2, \cdots, e_n$ παράγουν τον V.

(β) Ο αριθμός n των στοιχείων μιας βάσης του $V \neq \{\mathbf{0}\}$ καλείται **διάσταση** του V και συμβολίζεται με $dimV$=n. Αν $V = \{\mathbf{0}\}$, τότε $dimV$=0.

(γ) Αν

$$\lambda_1\,(x+y) \;+\; \lambda_2\,(x-y) \;+\; \lambda_3\,(x-2y+z) \;=\; \mathbf{0}$$

τότε

$$(\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3)\,x \;+\; (\lambda_1-\lambda_2)\,y \;+\; \lambda_3\,z \;=\; 0\,.$$

Επειδή τα x, y, z είναι γραμμικώς ανεξάρτητα,

$$\left.\begin{array}{rl} \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 & = 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{array}{rl} \lambda_1+\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_1-\lambda_2 & = 0 \\ \lambda_3 & = 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0\,.$$

Άρα τα $x+y,\ x-y,\ x-2y+z$ είναι γραμμικώς ανεξάρτητα.

(δ) Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες της Πρ. 2.2.2.

(i) Επειδή $\mathbf{0} \cdot u_i$=0 για κάθε u_i, $\mathbf{0} \in W$.

(ii) Έστω δύο διανύσματα $u, v \in W$ οπότε

$$\left.\begin{array}{l} u \cdot u_i \;=\; 0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \\ v \cdot u_i \;=\; 0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad u \cdot u_i \;+\; v \cdot u_i \;=\; 0+0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \quad\Longrightarrow$$

$$(u+v) \cdot u_i \;=\; 0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \quad\Longrightarrow\quad u+v \in W\,.$$

Άρα ο W είναι κλειστός ως προς την πρόσθεση.

(iii) Αν $a \in \mathbf{R}$ και $u \in W$, τότε

$$u \cdot u_i \;=\; 0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \quad\Longrightarrow\quad a\,(u \cdot u_i) \;=\; a\,0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \quad\Longrightarrow$$

$$(au) \cdot u_i \;=\; 0\ ,\quad i = 1, 2, \cdots, k \quad\Longrightarrow\quad au \in W\,.$$

Άρα ο W είναι κλειστός ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Οι τρεις συνθήκες της Πρ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα ο W είναι υπόχωρος του V.

Πρόβλημα 3

Έστω V *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K και W_1 και W_2 υπόχωροι του V. Δείξτε ότι η **τομή** $W_1 \cap W_2$ των W_1 και W_2 είναι **υπόχωρος** του V. **4μ.**

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες της Πρ. 2.2.2.

(i) Επειδή οι W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του V, $\mathbf{0} \in W_1$ και $\mathbf{0} \in W_2$. Άρα $\mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$.

(ii) Έστω δύο διανύσματα $u, v \in W_1 \cap W_2$ οπότε $u, v \in W_1$ και

$$u + v \in W_1 \,, \tag{1}$$

λόγω της κλειστότητας του W_1 ως προς την πρόσθεση (είναι υπόχωρος του V). Ομοίως έχουμε $u, v \in W_2$ και

$$u + v \in W_2 \,. \tag{2}$$

Από τις (1) και (2) έπεται ότι

$$u + v \in W_1 \cap W_2 \,.$$

Άρα η τομή $W_1 \cap W_2$ είναι κλειστή ως προς την πρόσθεση.

(iii) Έστω $a \in K$ και το διάνυσμα $u \in W_1 \cap W_2$. Επειδή $u \in W_1$ και ο W_1 είναι κλειστός ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό,

$$a\, u \in W_1 \,.$$

Επειδή $u \in W_2$ και ο W_2 είναι και αυτός κλειστός ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό,

$$a\, u \in W_2 \,.$$

Άρα

$$a\, u \in W_1 \cap W_2$$

και η τομή $W_1 \cap W_2$ είναι κλειστή ως προς το βαθμωτό πολλαπλασιασμό.

Οι τρεις συνθήκες της Πρ. 2.2.2 ικανοποιούνται. Άρα η τομή $W_1 \cap W_2$ είναι υπόχωρος του V.

Πρόβλημα 4

Έστω ο υπόχωρος του $\mathcal{M}_{2\times 2}$:

$$W \;=\; \left\{\; A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \;\;:\;\; A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{bmatrix} \;,\;\; a, b, c \in \mathbf{R} \;\right\} \mathbf{5\mu.}$$

(α) Να βρεθεί **μια βάση και η διάσταση** του W. **3μ.**

(β) Να **επεκτείνετε** τη βάση που βρήκατε στο (i) σε μια βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$. **2μ.**

(α) Για το γενικό στοιχείο του W έχουμε

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & a+b+c \end{bmatrix} \;=\; a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \;=\; a\,E_1 \;+\; b\,E_2 \;+\; c\,E_3\,.$$

Το σύνολο $B{=}\{E_1, E_2, E_3\}$ παράγει τον W. Θα δείξουμε ότι είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Πράγματι, αν

$$\lambda_1\,E_1 + \lambda_2\,E_2 + \lambda_3\,E_3 \;=\; O \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 \;=\; \lambda_2 \;=\; \lambda_3 \;=\; 0\,.$$

Το B είναι γραμμικώς ανεξάρτητο και αφού παράγει τον W, είναι μια βάση του. Έχουμε τέλος

$$dim W \;=\; 3\,.$$

(β) Εφόσον $dim\mathcal{M}_{2\times 2}{=}4$, για την επέκταση του B σε μια βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$ πρέπει να βρούμε ένα στοιχείο του $\mathcal{M}_{2\times 2}$ που *δεν ανήκει* στη γραμμική θήκη της βάσης B. Έστω ο πίνακας

$$E_4 \;=\; \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\,.$$

Σύμφωνα με το Θ. 3.3.6, για να είναι το σύνολο $B'{=}\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$, πρέπει να είναι γραμμικώς ανεξάρτητο. Αν

$$\lambda_1\,E_1 \;+\; \lambda_2\,E_2 \;+\; \lambda_3\,E_3 \;+\; \lambda_4\,E_4 \;=\; O \quad\Longrightarrow\quad \begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 \\ \lambda_3 & \lambda_1+\lambda_2+\lambda_3+\lambda_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad\Longrightarrow$$

$$\lambda_1 \;=\; \lambda_2 \;=\; \lambda_3 \;=\; \lambda_4 \;=\; 0\,.$$

Το B' είναι πράγματι γραμμικώς ανεξάρτητο και συνεπώς αποτελεί μια βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Πρόβλημα 5
Έστω V_1 και V_2 υπόχωροι του διανυσματικού χώρου V. Δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:
(α) $V = V_1 \oplus V_2$.
(β) $V = V_1 + V_2$ και $dimV = dimV_1 + dimV_2$.

8μ.

Αν
$$V \;=\; V_1 \oplus V_2\,,$$
τότε από το Θ 2.3.5 έχουμε
$$V \;=\; V_1 \;+\; V_2 \tag{1}$$
και
$$V_1 \cap V_2 \;=\; \{\mathbf{0}\} \tag{2}$$
Μένει να δείξουμε ότι $dimV$=$dimV_1$+$dimV_2$. Από το Θ. 3.3.8, γνωρίζουμε ότι
$$dim(V_1 + V_2) \;=\; dimV_1 \;+\; dimV_2 \;-\; dim(V_1 \cap V_2)\,. \tag{3}$$
Από τις (1)-(3), παίρνουμε
$$dimV \;=\; dimV_1 \;+\; dimV_2 \;-\; dim\{\mathbf{0}\} \;=\; dimV_1 \;+\; dimV_2 \;-\; 0 \qquad \Longrightarrow$$
$$dimV \;=\; dimV_1 \;+\; dimV_2\,.$$

Αντίστροφα, αν
$$V \;=\; V_1 \;+\; V_2 \tag{4}$$
και
$$dimV \;=\; dimV_1 \;+\; dimV_2 \tag{5}$$
τότε, από τις (3)-(5), συμπεραίνουμε ότι
$$dim(V_1 \cap V_2) \;=\; 0 \qquad \Longrightarrow \qquad V_1 \cap V_2 \;=\; \{\mathbf{0}\}\,. \tag{6}$$
Βάσει του Θ. 2.3.5, από τις (4) και (6) έπεται ότι
$$V = V_1 \oplus V_2\,.$$

Πρόβλημα 6

(α) Να βρεθούν οι τύποι των πινάκων A, B, και C για να έχει νόημα η πιο κάτω σχέση:

$$A\,(BC) \;=\; (AB)C\,. \qquad \textbf{1μ.}$$

(β) Να δειχθεί η πιο πάνω σχέση. **3μ.**

(γ) Να δειχθεί ότι ο αντίστροφος αντιστρέψιμου πίνακα είναι **μοναδικός**. **2μ.**

(δ) Αν ο $n \times n$ πίνακας A είναι αντιστρέψιμος, δείξτε ότι ο A^T είναι αντιστρέψιμος και

$$\left(A^T\right)^{-1} \;=\; \left(A^{-1}\right)^T\;. \qquad \textbf{2μ.}$$

(α) Για να είναι οι A, B και C συμβιβαστοί ως προς τον πολλαπλασιασμό πρέπει

$$A \in \mathcal{M}_{m\times n}\,, \qquad B \in \mathcal{M}_{n\times p} \quad \text{και} \quad C \in \mathcal{M}_{p\times q}\,.$$

(β) Από τον ορισμό του πολλαπλασιασμού πινάκων, έχουμε

$$BC \;=\; \left(\sum_{k=1}^{p} b_{ik}\, c_{kj}\right)_{n\times q}$$

και

$$A\,(BC) \;=\; \left(\sum_{l=1}^{n} a_{il} \sum_{k=1}^{p} b_{lk}\, c_{kj}\right)_{m\times q} \;=\; \left(\sum_{k=1}^{p}\sum_{l=1}^{n} a_{il}\, b_{lk}\, c_{kj}\right)_{m\times q} \;=\; (AB)\,C\,.$$

(γ) Έστω A^{-1} και A' δύο αντίστροφοι του αντιστρέψιμου πίνακα A:

$$AA^{-1} \;=\; A^{-1}A \;=\; I \quad \text{και} \quad AA' \;=\; A'A \;=\; I\,.$$

Έχουμε διαδοχικά:

$$A'A \;=\; I \;\Longrightarrow\; A'A\,A^{-1} \;=\; I\,A^{-1} \;\Longrightarrow\; A'\,(AA^{-1}) \;=\; A^{-1} \;\Longrightarrow\; A'I \;=\; A^{-1} \;\Longrightarrow\; A' \;=\; A^{-1}\,.$$

Άρα ο αντίστροφος του A είναι μοναδικός.

(δ) Αναστρέφοντας την

$$AA^{-1} \;=\; A^{-1}A \;=\; I$$

παίρνουμε

$$\left(AA^{-1}\right)^T \;=\; \left(A^{-1}A\right)^T \;=\; I^T \;\Longrightarrow\; \left(A^{-1}\right)^T A^T \;=\; A^T \left(A^{-1}\right)^T \;=\; I\,.$$

Άρα ο A^T είναι αντιστρέψιμος και

$$\left(A^T\right)^{-1} \;=\; \left(A^{-1}\right)^T\;.$$

Πρόβλημα 7

(α) Αν ο $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι **μηδενοδύναμος δείκτη** k, δείξτε ότι ο πίνακας $(A-I)$ είναι *αντιστρέψιμος*. **2μ.**

(β) Δείξτε ότι αν ο $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι *αντιστρέψιμος και αντισυμμετρικός*, τότε και ο A^{-1} είναι **αντισυμμετρικός**. **2μ.**

(γ) Ένας πραγματικός $n\times n$ πίνακας $A=(a_{ij})$ λέγεται **στοχαστικός** αν

$$a_{ij} \geq 0\,, \qquad i,j=1,2,\cdots,n$$

και

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \;=\; 1\,, \qquad i=1,2,\cdots,n\,.$$

Δείξτε ότι το γινόμενο δύο στοχαστικών πινάκων είναι στοχαστικός πίνακας. **4μ.**

(α)

$$A^k = O \implies -A^k + I = -O + I = I \implies -(A^k - I) = I \implies$$
$$-(A-I)\left(A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + A + I\right) = I\,.$$

Άρα ο $(A-I)$ είναι αντιστρέψιμος και

$$(A-I)^{-1} = -\left(A^{k-1} + A^{k-2} + \cdots + A + I\right)\,.$$

(β) Επειδή ο A είναι αντισυμμετρικός έχουμε

$$A^T = -A\,.$$

Για τον αντίστροφο του A έχουμε

$$AA^{-1} = I \implies \left(AA^{-1}\right)^T = I^T \implies \left(A^{-1}\right)^T A^T = I \implies \left(A^{-1}\right)^T(-A) = I \implies$$

$$\left(A^{-1}\right)^T A = -I \implies \left(A^{-1}\right)^T AA^{-1} = -IA^{-1} \implies \left(A^{-1}\right)^T I = -A^{-1} \implies \left(A^{-1}\right)^T = -A^{-1}\,.$$

Άρα ο A^{-1} είναι αντισυμμετρικός.

(γ) Έστω $A, B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ δύο στοχαστικοί πίνακες, οπότε

$$a_{ij} \geq 0 \quad \text{και} \quad b_{ij} \geq 0\,, \qquad i,j=1,2,\cdots,n\,, \tag{1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} = 1\,, \qquad i=1,2,\cdots,n\,, \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} b_{ij} = 1\,, \qquad i=1,2,\cdots,n\,. \tag{3}$$

Αν $AB=(c_{ij})$, τότε

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj}$$

Είναι προφανές [βλ. (1)] ότι

$$c_{ij} \geq 0\,, \qquad i,j=1,2,\cdots,n\,.$$

Επιπλέον έχουμε,

$$\sum_{j=1}^{n} c_{ij} = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} \sum_{j=1}^{n} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\cdot 1 = 1\,.$$

[Χρησιμοποιήσαμε διαδοχικά τις (3) και (2)]. Άρα ο πίνακας AB είναι στοχαστικός.

Πρόβλημα 8
(α) Αν ο $B \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι ορθογώνιος, δείξτε ότι ο σύνθετος πίνακας

$$A \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{rr} B & B \\ -B & B \end{array} \right] ,$$

είναι επίσης **ορθογώνιος**. **3μ.**
(β) Αν ο $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι αντιμεταθέσιμος με κάθε $n\times n$ πίνακα, δείξτε ότι ο A είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του μοναδιαίου πίνακα. **6μ.**

(α) Εφόσον ο B είναι ορθογώνιος

$$BB^T \;=\; B^T B \;=\; I_n \;.$$

Για τον ανάστροφο του A έχουμε

$$A^T \;=\; \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\begin{array}{rr} B^T & -B^T \\ B^T & B^T \end{array} \right] ,$$

και έτσι

$$AA^T = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{rr} B & B \\ -B & B \end{array} \right] \left[\begin{array}{rr} B^T & -B^T \\ B^T & B^T \end{array} \right] = \frac{1}{2} \left[\begin{array}{cc} 2\,BB^T & -BB^T + BB^T \\ -BB^T + BB^T & 2\,BB^T \end{array} \right] = \left[\begin{array}{cc} I_n & O \\ O & I_n \end{array} \right] = I_{2n}.$$

Άρα ο A είναι ορθογώνιος.

(β) Πρέπει για κάθε $n\times n$ πίνακα B να ισχύει

$$AB \;=\; BA \quad\Longrightarrow\quad \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\, b_{kj} \;=\; \sum_{k=1}^{n} b_{ik}\, a_{kj} \;. \tag{1}$$

Έστω ότι ο B είναι διαγώνιος και ότι τα στοιχεία της διαγωνίου του είναι διαφορετικά μεταξύ τους:

$$b_{ii} \neq b_{jj} \quad \text{για} \quad i \neq j \;.$$

Από την (1) έχουμε

$$a_{ij}\, b_{jj} \;=\; b_{ii}\, a_{ij} \quad\Longrightarrow\quad a_{ij}\,(b_{jj} - b_{ii}) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad a_{ij} \;=\; 0 \;\; \text{για} \;\; i \neq j \;.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο A είναι **διαγώνιος**.
Άρα από την (1) έχουμε

$$a_{ii}\, b_{ij} \;=\; b_{ij}\, a_{jj} \;. \tag{2}$$

Αν τα στοιχεία του B είναι μη μηδενικά, τότε από την (2) παίρνουμε

$$a_{ii} \;=\; a_{jj} \quad \forall i, j \;.$$

Τα στοιχεία της διαγωνίου του (διαγώνιου) A είναι ίσα μεταξύ τους. Άρα

$$A \;=\; a\, I \;.$$

Πρόβλημα 9

Αν $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, δείξτε ότι οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:

(i) Ο A είναι αντιστρέψιμος.

(ii) Το σύστημα $AX = B$ έχει μοναδική λύση.

(iii) Ο A είναι γινόμενο πεπερασμένου πλήθους στοιχειωδών πινάκων.

4μ.

(i) $\Longrightarrow$ (ii)

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε από την $AX = B$ έχουμε

$$A^{-1}\,AX \;=\; A^{-1}\,B \quad\Longrightarrow\quad (A^{-1}A)\,X \;=\; A^{-1}\,B \quad\Longrightarrow\quad I\,X \;=\; A^{-1}\,B \quad\Longrightarrow\quad X \;=\; A^{-1}\,B\,.$$

Άρα η λύση του $AX = B$ είναι μοναδική.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii)

Αν το $AX = B$ έχει μοναδική λύση, τότε ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A είναι ο μοναδιαίος πίνακας, $R{=}I$ (Πόρισμα 5 του Θ. 5.2.2). Σύμφωνα τώρα με το Πόρισμα 1 του Θ. 5.3.4, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \cdots, E_k$ έτσι ώστε

$$A \;=\; E_1E_2\cdots E_k\,R \quad\Longrightarrow\quad A \;=\; E_1E_2\cdots E_k\,I \;=\; E_1E_2\cdots E_k\,.$$

(iii) $\Longrightarrow$ (i)

Αν ο A είναι γινόμενο στοιχειωδών πινάκων, τότε ο A είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων (σύμφωνα με την Πρ. 5.3.3 οι στοιχειώδεις πίνακες είναι αντιστρέψιμοι):

$$A \;=\; E_1E_2\cdots E_k \quad\Longrightarrow\quad A^{-1} \;=\; E_k^{-1}\cdots E_2^{-1}E_1^{-1}\,.$$

<u>Πρόβλημα 10</u>
Να βρεθεί η **γενική λύση** του συστήματος:

$$\begin{array}{rrrrrcr} x_1 & +2\,x_2 & +3\,x_3 & -2\,x_4 & +\;\;x_5 & = & 4 \\ 3\,x_1 & +6\,x_2 & +5\,x_3 & -4\,x_4 & +3\,x_5 & = & 5 \\ x_1 & +2\,x_2 & +7\,x_3 & -4\,x_4 & +\;\;x_5 & = & 11 \end{array}$$

5μ.

Βρίσκουμε τον ανηγμένο Γ-κλιμακωτό του επαυξημένου πίνακα

$$[A|B] \;=\; \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 3 & 6 & 5 & -4 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 7 & -4 & 1 & 11 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 4 & -2 & 0 & 7 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & -4 & 2 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 3 & -2 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \quad \Longrightarrow$$

$$[A|B] \sim \left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 0 & -1/2 & 1 & -5/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 0 & 7/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

Το σύστημα έχει άπειρο πλήθος λύσεων με τρεις ελεύθερες μεταβλητές, τις x_2, x_4 και x_5. Θέτοντας $x_2{=}\lambda$, $x_4{=}\mu$ και $x_5{=}\kappa$, παίρνουμε τη γενική λύση

$$\begin{aligned} x_1 &= -\frac{5}{4} - 2\lambda + \frac{1}{2}\mu - \kappa \\ x_2 &= \lambda \\ x_3 &= \frac{7}{4} + \frac{1}{2}\mu \\ x_4 &= \mu \\ x_5 &= \kappa \end{aligned}$$

Πρόβλημα 11
Για ποιες τιμές του a είναι ο πίνακας

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & a & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$$

αντιστρέψιμος; **2μ.**

Ο A είναι αντιστρέψιμος αν ο Γ-κλιμακωτός του δεν έχει μηδενική γραμμή. Βρίσκουμε λοιπόν τον Γ-κλιμακωτό του A:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & a & 3 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & a+2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a+2 & 3 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1-a \end{bmatrix}.$$

Ο A είναι αντιστρέψιμος αν $a \neq 1$.

Πρόβλημα 12

Έστω οι πίνακες

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{και} \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(α) Βρείτε τον **αντίστροφο** του A (αν υπάρχει). **5μ.**

(β) <u>Χωρίς να εκτελέσετε τους πολλαπλασιασμούς</u>, βρείτε τους BA και AB. **3μ.**

(α) Βρίσκουμε τον ανηγμένο Γ-κλιμακωτό του σύνθετου πίνακα $[A|I]$:

$$[A|I] = \left[\begin{array}{rrr|rrr} 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 10 & 3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \sim$$

$$\sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & -3 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 10 & 3 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & 2 & -5 \end{array}\right] \Longrightarrow$$

$$[A|I] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 3/2 & 0 & -1 & 3/2 \\ 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 5/2 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{rrr|rrr} 1 & 0 & 0 & 3/4 & 1/2 & -9/4 \\ 0 & 1 & 0 & 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & -1 & 5/2 \end{array}\right] = [I|A^{-1}]\,.$$

Εφόσον ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του A είναι ο μοναδιαίος πίνακας, ο A είναι αντιστρέψιμος και

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 & -9/4 \\ 1/4 & 1/2 & -3/4 \\ -1/2 & -1 & 5/2 \end{bmatrix}.$$

(β) Παρατηρούμε ότι ο B είναι στοιχειώδης:

$$B = E^4_{2,3} = \hat{E}^4_{3,2}\,.$$

Ο $BA{=}E^4_{2,3}A$ προκύπτει από τον A με εφαρμογή του αντίστοιχου στοιχειώδους μετασχηματισμού γραμμών

$$r_2 \longrightarrow r_2 + 4r_3\,.$$

Ομοίως, ο $AB{=}A\hat{E}^4_{3,2}$ προκύπτει από τον A με εφαρμογή του αντίστοιχου στοιχειώδους μετασχηματισμού στηλών

$$c_3 \longrightarrow c_3 + 4c_2\,.$$

Έτσι έχουμε:

$$BA = E^4_{2,3}A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 3 \\ -1 & 11 & 4 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix},$$

και

$$AB = A\hat{E}^4_{3,2} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 19 \\ -1 & 3 & 12 \\ 0 & 2 & 9 \end{bmatrix}.$$

Πρόβλημα 13

(α) Διατυπώστε τον ορισμό του **βαθμού πίνακα**. **1μ.**

(β) Διατυπώστε τον ορισμό της **γραμμικής θήκης**. **1μ.**

(γ) Να βρεθεί η *διάσταση* της γραμμικής θήκης:

$$W \;=\; L[(2,1,6,6)\,,(3,1,1,-1)\,,(5,2,7,5)\,,(8,3,8,4)]$$

3μ.

(δ) Βρείτε μια *βάση* της πιο πάνω γραμμικής θήκης. **1μ.**

(α) Ονομάζουμε **βαθμό** ενός πίνακα $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ και τον συμβολίζουμε με $rank(A)$ την κοινή διάσταση των γραμμικών χώρων γραμμών και στηλών του A:

$$rank(A) \;=\; dimV_r(A) \;=\; dimV_c(A)\,.$$

(β) Έστω V ένας διανυσματικός χώρος πάνω σε κάποιο σώμα K και $S{=}\{u_1, u_2, \cdots, u_n\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Καλούμε **γραμμική θήκη** του S το σύνολο των γραμμικών συνδυασμών των $u_1, u_2, \cdots, u_n$:

$$L(S) \;=\; \left\{ u \in V \mid u \;=\; \sum_{i=1}^{n} \lambda_i\, u_i\,, \quad \lambda_i \in K \right\}.$$

(γ) Η διάσταση της γραμμικής θήκης είναι ίση με το βαθμό του πίνακα A που έχει ως γραμμές τα διανύσματα που παράγουν τον W. Βρίσκουμε τον Γ-κλιμακωτό του A:

$$A \;=\; \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 6 \\ 3 & 1 & 1 & -1 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 3 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 & 6 \\ 1 & 0 & -5 & -7 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 3 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 2 & 1 & 6 & 6 \\ 5 & 2 & 7 & 5 \\ 8 & 3 & 8 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 16 & 20 \\ 0 & 2 & 32 & 40 \\ 0 & 3 & 48 & 60 \end{bmatrix} \Longrightarrow$$

$$A \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 16 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \;=\; R'\,.$$

Ο R' έχει 2 μη μηδενικές γραμμές. Άρα

$$dimW \;=\; rank(A) \;=\; 2\,.$$

(δ) Οι μη μηδενικές γραμμές του Γ-κλιμακωτού R' αποτελούν μια βάση του W:

$$\{(1,0,-5,-7)\,,\;(0,1,16,20)\}\;.$$

Πρόβλημα 14

Να αποδειχθούν οι πιο κάτω προτάσεις:

(α) Αν R είναι ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$, υπάρχει αντιστρέψιμος πίνακας $P \in \mathcal{M}_{m\times m}$ τέτοιος ώστε $R = PA$. **2μ.**

(β) Αν ο $B \in \mathcal{M}_{m\times m}$ είναι *αντιστρέψιμος* και $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, τότε $rank(BA) = rank(A)$. **2μ.**

(γ) Ο $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$ είναι αντιστρέψιμος αν και μόνο αν $rank(A) = n$. **3μ.**

(α) Σύμφωνα με το Θ. 5.3.4, υπάρχει ένας πεπερασμένος αριθμός στοιχειωδών πινάκων $E_1, E_2, \cdots, E_k$ έτσι ώστε

$$R \;=\; E_1 E_2 \cdots E_k\, A \qquad \Longrightarrow \qquad R \;=\; P\, A\,,$$

όπου ο $P{=}E_1 E_2 \cdots E_k$ είναι αντιστρέψιμος ως γινόμενο αντιστρέψιμων πινάκων:

$$P^{-1} \;=\; E_k^{-1} \cdots E_2^{-1} E_1^{-1}\,.$$

(β) Σύμφωνα με το Θ. 5.3.5, ο B ως αντιστρέψιμος είναι το γινόμενο στοιχειωδών πινάκων,

$$B \;=\; E_1\, E_2\, \cdots\, E_k\,,$$

και έτσι

$$BA \;=\; E_1\, E_2\, \cdots\, E_k\, A\,.$$

Οι BA και A είναι λοιπόν γραμμοϊσοδύναμοι και έτσι

$$rank(BA) = rank(A)\,.$$

(γ) Ως γνωστό,

$$rank(A) \;=\; rank(R)\,,$$

όπου R ο ανηγμένος Γ-κλιμακωτός του $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$.

Αν ο A είναι αντιστρέψιμος, τότε $R{=}I_n$ και έτσι

$$rank(A) \;=\; rank(I_n) \;=\; n\,.$$

Αντίστροφα, αν $rank(A){=}n$, τότε $rank(R){=}n$ και άρα ο R δεν έχει μηδενική γραμμή οπότε $R{=}I_n$. Άρα ο A είναι αντιστρέψιμος.

Πρόβλημα 15

(α) Διατυπώστε τον ορισμό της **ορίζουσας**. **1μ.**

(β) Αν $A \in \mathcal{M}_{n\times n}$, δείξτε ότι $det(\lambda A) = \lambda^n detA$. **2μ.**

(γ) Με βάση τον ορισμό, υπολογίστε την ορίζουσα

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

3μ.

(δ) Στο ανάπτυγμα της ορίζουσας του $A \in \mathcal{M}_{7\times 7}$, με ποιο πρόσημο εμφανίζεται ο όρος

$$a_{14}\, a_{25}\, a_{31}\, a_{47}\, a_{52}\, a_{66}\, a_{73}\ ;$$

1μ.

(α) Καλούμε **ορίζουσα** του $n\times n$ πίνακα $A=(a_{ij})$ το άθροισμα

$$detA = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\, a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n}\ .$$

(β) Αφού $\lambda A=(\lambda a_{ij})$, έχουμε από τον ορισμό:

$$det(\lambda A) = \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, (\lambda a_{1\sigma_1})\, (\lambda a_{2\sigma_2}) \cdots (\lambda a_{n\sigma_n}) = \lambda^n \sum_{\sigma\in S_n} sgn(\sigma)\, a_{1\sigma_1}\, a_{2\sigma_2} \cdots a_{n\sigma_n} = \lambda^n\, detA\ .$$

(γ)

$$detA = \sum_{\sigma\in S_4} sgn(\sigma_1,\sigma_2,\sigma_3,\sigma_4)\, a_{1\sigma_1}\, a_{2\sigma_2}\, a_{3\sigma_3}\, a_{4\sigma_4}\ .$$

Παρατηρούμε ότι μόνο δύο όροι του αθροίσματος δεν είναι μηδέν:

$$detA = sgn(4,2,3,1)\, a_{14}\, a_{22}\, a_{33}\, a_{41} + sgn(4,3,2,1)\, a_{14}\, a_{23}\, a_{32}\, a_{41} \Longrightarrow$$

$$detA = (-1)^{3+1+1} 2\cdot 1\cdot 1\cdot 2 + (-1)^{3+2+1} 2\cdot 5\cdot 2\cdot 2 = -4+40 = 36\ .$$

(δ) Ο δοσμένος όρος εμφανίζεται με το πρόσημο

$$sgn(4,5,1,7,2,6,3) = (-1)^{3+3+0+3+0+1} = (-1)^{10} = +1\ .$$

Πρόβλημα 16

(α) Με τη χρήση των ιδιοτήτων, να υπολογισθεί η τιμή της ορίζουσας:

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix}$$

4μ.

(β) Αν ο $A \in \mathcal{M}_{(2n+1)\times(2n+1)}$ είναι **αντισυμμετρικός**, δείξτε ότι $det(A) = 0$. **2μ.**

(α)

$$\begin{vmatrix} 1+a & b & c \\ a & 1+b & c \\ a & b & 1+c \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1+a+b+c & b & c \\ 1+a+b+c & 1+b & c \\ 1+a+b+c & b & 1+c \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 1 & 1+b & c \\ 1 & b & 1+c \end{vmatrix}$$

$$= (1+a+b+c)\begin{vmatrix} 1 & b & c \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = (1+a+b+c)\,.$$

(β) Γνωρίζουμε ότι

$$detA^T = detA\,.$$

Επειδή ο A είναι αντισυμμετρικός,

$$A^T = -A \quad \Longrightarrow \quad detA^T = det(-A) \quad \Longrightarrow \quad detA = (-1)^{2n+1}detA = -detA \quad \Longrightarrow \quad detA = 0\,.$$