ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 3 Οκτωβρίου 2003 (♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

(α) Έστω τα διανύσματα $\mathbf{u}$=(2, 1, 2) και $\mathbf{v}$=(1, 0, −1).

(i) Βρείτε τα $\mathbf{u}+\mathbf{v}$ και $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$. **4μ.**

(ii) **Κανονικοποιήστε** το $\mathbf{u}$. **2μ.**

(iii) Βρείτε ένα διάνυσμα $\mathbf{w}$ που να είναι **ορθογώνιο** με το $\mathbf{v}$. **2μ.**

(iv) Βρείτε το σύνολο W των διανυσμάτων που είναι είναι **ορθογώνια** με το $\mathbf{v}$. **2μ.**

(β) Αν V είναι ένας *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K και W ένα υποσύνολο του V, τι πρέπει να ισχύει για να είναι το W **υπόχωρος** του V; **4μ.**

(γ) Αν V είναι ένας *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K και οι W_1 και W_2 είναι *υπόχωροι* του V, τι πρέπει να ισχύει για να είναι ο V το **ευθύ άθροισμα** των W_1 και W_2, δηλ. V=$W_1 \oplus W_2$; **4μ.**

(α) (i) $\mathbf{u}+\mathbf{v}$=(2, 1, 2)+(1, 0, −1)=(2 + 1, 1 + 0, 2 − 1)=(3, 1, 1)

$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$=3 · 1 + 1 · 0 + 2 · (−1)=1

(ii) Βρίσκουμε πρώτα τη νόρμα του $\mathbf{u}$:

$||\mathbf{u}||$=$\sqrt{2^2+1^2+2^2}$=$\sqrt{9}$=3. Έχουμε έτσι

$$\mathbf{e}_u = \frac{\mathbf{u}}{||\mathbf{u}||} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) .$$

(iii) Αν το $\mathbf{w}$=(x, y, z) είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{v}$, τότε

$$\mathbf{w}\cdot\mathbf{v} = 0 \implies x + 0 - z = 0 \implies z = x$$

Παρατηρούμε ότι το $\mathbf{w}$=(1, 0, 1) είναι ορθογώνιο με το $\mathbf{v}$.

(iv) Από το (iii) παρατηρούμε ότι

$$W = \{\mathbf{w} \in \mathbf{R}^3 \,|\, \mathbf{w} = (a,\, b,\, a)\,,\;\; a, b \in \mathbf{R}\}$$

(β) Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.2.1, πρέπει το W να είναι επίσης διανυσματικός χώρος πάνω στο K με τις πράξεις τις πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού του V.

Μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.2.2. Το W είναι υπόχωρος του V αν ισχύουν τα εξής:

(i) $\mathbf{0} \in W$ (το μηδενικό στοιχείο του V ανήκει στο W).

(ii) Για κάθε $u, v \in W$ ισχύει $u + v \in W$ (κλειστότητα ως προς την πρόσθεση).

(iii) Για κάθε $u \in W$ και $\lambda \in K$ ισχύει $\lambda u \in W$ (κλειστότητα ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό).

(γ) Σύμφωνα με τον Ορισμό 2.3.4, ο V είναι το ευθύ άθροισμα των W_1 και W_2 αν κάθε $v \in V$ γράφεται **μονοσήμαντα** σαν άθροισμα ενός στοιχείου $w_1 \in W_1$ και ενός στοιχείου $w_2 \in W_2$.

Μπορούμε εναλλακτικά να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.3.5. Ο V είναι το ευθύ άθροισμα των W_1 και W_2 αν $W_1 + W_2$=V και $W_1 \cap W_2$=$\{\mathbf{0}\}$.

Πρόβλημα 2.

Έστω V *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K. Να δειχθούν οι εξής προτάσεις:

(α) Το μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ του $u \in V$ είναι **μοναδικό**. **15μ.**

(β) Κάθε στοιχείο $u \in V$ έχει **μοναδικό** αντίθετο στοιχείο. **15μ.**

(α) Ο V έχει εξ ορισμού ένα μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}$ τέτοιο ώστε

$$u + \mathbf{0} = u \quad \forall u \in V \tag{i}$$

Έστω ότι υπάρχει ακόμα ένα μηδενικό στοιχείο $\mathbf{0}'$. Θα ισχύει τότε

$$\mathbf{0}' + u = u \quad \forall u \in V \tag{ii}$$

Θέτοντας u=$\mathbf{0}'$ στην (i) και u=$\mathbf{0}$ στην (ii) παίρνουμε

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0}' \\ \mathbf{0}' + \mathbf{0} = \mathbf{0} \end{array}\right\} \implies \mathbf{0}' = \mathbf{0}\,.$$

Άρα το μηδενικό στοιχείο του V είναι μοναδικό.

(β) Κάθε $u \in V$ έχει εξ ορισμού ένα αντίθετο στοιχείο $-u \in V$ τέτοιο ώστε

$$u + (-u) = (-u) + u = \mathbf{0}\,. \tag{i}$$

Έστω ότι υπάρχει ακόμα ένα αντίθετο στοιχείο u' του $u \in V$, οπότε

$$u + u' = \mathbf{0}\,. \tag{ii}$$

Προσθέτοντας το $-u$ στα δύο μέλη της (ii) παίρνουμε

$$(-u) + u + u' = (-u) + \mathbf{0} \implies (\,(-u) + u\,) + u' = -u \implies \mathbf{0} + u' = -u \implies u' = -u\,.$$

Άρα το αντίθετο στοιχείο κάθε στοιχείου $u \in V$ είναι μοναδικό.

Πρόβλημα 3.

Έστω V *διανυσματικός χώρος* πάνω σε κάποιο σώμα K και W_1 και W_2 δύο υπόχωροί του. Αποδείξτε την πρόταση:

Το σύνολο $W_1 \cap W_2$ είναι υπόχωρος του V. **25μ.**

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι τρεις συνθήκες του Θ. 2.2.2.

(i) Επειδή οι W_1 και W_2 είναι υπόχωροι του V έχουμε

$$\left.\begin{array}{l} \mathbf{0} \in W_1 \\ \mathbf{0} \in W_2 \end{array}\right\} \implies \mathbf{0} \in W_1 \cap W_2$$

(ii) Αν τα $u, v \in W_1 \cap W_2$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} u, v \in W_1 \\ u, v \in W_2 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} u+v \in W_1 \\ u+v \in W_2 \end{array}\right\} \implies u+v \in W_1 \cap W_2$$

(χρησιμοποιήσαμε το ότι οι W_1 και W_2 είναι κλειστοί ως προς την πρόσθεση, αφού αυτοί είναι υπόχωροι του V).

(iii) Αν $u \in W_1 \cap W_2$ και $\lambda \in K$ τότε

$$\left.\begin{array}{l} u \in W_1 \\ u \in W_2 \end{array}\right\} \implies \left.\begin{array}{l} \lambda u \in W_1 \\ \lambda u \in W_2 \end{array}\right\} \implies \lambda u \in W_1 \cap W_2$$

(αξιοποιήσαμε την κλειστότητα των W_1 και W_2 ως προς τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό).

Συμπεραίνουμε ότι ο $W_1 \cap W_2$ είναι υπόχωρος του V.

Πρόβλημα 4.

(α) Δίνεται ότι τα σύνολα

$$W_1 \;=\; \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid A \;=\; \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix},\;\; a, b \in \mathbf{R} \right\}$$

και

$$W_2 \;=\; \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid A \;=\; \begin{bmatrix} c & 0 \\ c & d \end{bmatrix},\;\; c, d \in \mathbf{R} \right\}$$

είναι υπόχωροι του $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Δείξτε ότι $\mathcal{M}_{2\times 2}$=$W_1 \oplus W_2$. **20μ.**

(β) Έστω τώρα τα σύνολα

$$W_1 \;=\; \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid A \;=\; \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & b \end{bmatrix},\;\; b \in \mathbf{R} \right\}$$

και

$$W_2 \;=\; \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid A \;=\; \begin{bmatrix} c & 0 \\ c & 1 \end{bmatrix},\;\; c \in \mathbf{R} \right\}$$

Ελέγξτε αν ισχύει η $\mathcal{M}_{2\times 2}$=$W_1 \oplus W_2$. **5μ.**

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε 2×2 πίνακας γράφεται μονοσήμαντα σαν άθροισμα ενός στοιχείου του W_1 και ενός στοιχείου του W_2. Έστω ο πίνακας

$$A \;=\; \begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι υπάρχουν μοναδικά $a, b, c, d \in \mathbf{R}$ έτσι ώστε

$$\begin{bmatrix} x & y \\ z & w \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} c & 0 \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+c & b \\ c & b+d \end{bmatrix} \iff \left.\begin{array}{rcl} a+c & = & x \\ b & = & y \\ c & = & z \\ b+d & = & w \end{array}\right\} \iff \left.\begin{array}{rcl} a & = & x-z \\ b & = & y \\ c & = & z \\ d & = & w-y \end{array}\right\}$$

Τα a, b, c και d είναι μοναδικά. Άρα πράγματι $\mathcal{M}_{2\times 2}$=$W_1 \oplus W_2$.

(β) Απαραίτητη προϋπόθεση για να ισχύει η $\mathcal{M}_{2\times 2}$=$W_1 \oplus W_2$ είναι οι W_1 και W_2 να είναι υπόχωροι του $\mathcal{M}_{2\times 2}$. Αυτό δεν αληθεύει στην περίπτωση αυτή. Για παράδειγμα, ο μηδενικός πίνακας O δεν ανήκει στο W_1, οπότε ο W_1 δεν είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}_{2\times 2}$ (ομοίως βρίσκουμε ότι ούτε ο W_1 είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}_{2\times 2}$). Άρα λοιπόν **δεν ισχύει** η $\mathcal{M}_{2\times 2}$=$W_1 \oplus W_2$.