ΓΡΑΜΜΙΚΗ ΑΛΓΕΒΡΑ Ι (ΜΑΣ121) - 15 Οκτωβρίου 2003 (♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Γραμμική θήκη.** **2μ.**
(β) **Γραμμικά ανεξάρτητα στοιχεία.** **2μ.**
(γ) **Βάση διανυσματικού χώρου.** **3μ.**
(δ) **Διάσταση διανυσματικού χώρου.** **3μ.**

(α) Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και $S=\{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m\}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Το σύνολο $L(S)$ των γραμμικών συνδυασμών των $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m$ συμβολίζεται επίσης με

$$[S] \qquad \text{ή} \qquad [u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m] \qquad \text{ή ακόμα} \qquad span[u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m]$$

και καλείται **γραμμική θήκη ή περίβλημα** (linear span) των $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_m$.

(β) Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K και $\{u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n\}$, $n \in \mathbf{N}$ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του V. Τα διανύσματα $u_1,\, u_2,\, \cdots,\, u_n$ λέμε ότι είναι **γραμμικά ανεξάρτητα** αν ισχύει η συνεπαγωγή

$$\lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_n u_n = \mathbf{0} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_n = 0\,.$$

(γ) Έστω V γραμμικός χώρος πάνω σ'ένα σώμα K. Το πεπερασμένο υποσύνολο
$A=\{e_1,\, e_2,\, \cdots,\, e_n\}$, $n \in \mathbf{N}$, του V καλείται (**πεπερασμένη**) **βάση** του V αν τα $e_1,\, e_2,\, \cdots,\, e_n$
(i) είναι γραμμικά ανεξάρτητα, και
(ii) παράγουν το χώρο V.

(δ) Αν ο γραμμικός χώρος $V \neq \{\mathbf{0}\}$ έχει μια βάση με $n \in \mathbf{N}$ στοιχεία, ο αριθμός n καλείται **διάσταση** (dimension) του V και συμβολίζεται με

$$dimV = n\,.$$

Αν $V=\{\mathbf{0}\}$, θα λέμε ότι η διάσταση του V είναι μηδέν.

Πρόβλημα 2.
Δίνεται ότι ο

$$W = \left\{ A \in \mathcal{M}_{3\times3} \mid A = \begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & b-c \end{bmatrix} , \quad a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}_{2\times2}$. Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του W. **30μ.**

Ένα (οποιοδήποτε) στοιχείο του W μπορεί να γραφεί ως εξής:

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ 0 & a-b & a-c \\ 0 & 0 & b-c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Παρατηρούμε ότι το σύνολο των

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} , \quad E_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} , \quad E_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

παράγει τον W. Για να είναι το $\{E_1, E_2, E_3\}$ βάση του W πρέπει επιπλέον αυτό να είναι γραμμικά ανεξάρτητο:

$$\lambda_1 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \lambda_2 \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \lambda_3 \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} = O \quad \Longrightarrow$$

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ 0 & \lambda_1 - \lambda_2 & \lambda_1 - \lambda_3 \\ 0 & 0 & \lambda_2 - \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0 \,.$$

Άρα το $\{E_1, E_2, E_3\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έτσι αποτελεί βάση του W.
(Θα μπορούσαμε πάντως να παρατηρήσουμε ότι το γενικό στοιχείο του W γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των E_1, E_2 και E_3, οπότε -σύμφωνα με την Πρ. 3.3.2- το $\{E_1, E_2, E_3\}$ είναι βάση του W.)

Για τη διάσταση του W έχουμε

$$dimW = 3 \,.$$

Πρόβλημα 3.

(α) Να δειχθεί ότι το σύνολο A είναι *βάση* του $\mathbf{R}^4$:

$$A \;=\; \{\, u_1 = (1,1,0,0), \;\; u_2 = (0,1,1,0), \;\; u_3 = (0,0,1,1), \;\; u_4 = (1,0,0,0)\,\}$$

10μ.

(β) Να βρεθούν οι *συντεταγμένες* του $u = (1,2,3,4)$ *ως προς τη βάση* A. **10μ.**

(α) Το A αποτελείται από 4 στοιχεία. Επειδή $dim\mathbf{R}^4$=4, σύμφωνα με το Θ. 3.3.6 (ii) αρκεί να δείξουμε ότι το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο:

$$\lambda_1\, u_1 \;+\; \lambda_2\, u_2 \;+\; \lambda_3\, u_3 \;+\; \lambda_4\, u_4 \;=\; \mathbf{0} \quad\Longrightarrow$$

$$\lambda_1\,(1,1,0,0) \;+\; \lambda_2\,(0,1,1,0) \;+\; \lambda_3\,(0,0,1,1) \;+\; \lambda_4\,(1,0,0,0) \;=\; (0,0,0,0) \quad\Longrightarrow$$

$$(\lambda_1{+}\lambda_4,\, \lambda_1{+}\lambda_2,\, \lambda_2{+}\lambda_3,\, \lambda_3) = (0,0,0,0) \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_4 \;=\; 0 \\ \lambda_1+\lambda_2 \;=\; 0 \\ \lambda_2+\lambda_3 \;=\; 0 \\ \lambda_3 \;=\; 0 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Άρα το A είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έτσι αποτελεί βάση του $\mathbf{R}^4$.

(β) Θα βρούμε τα $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ για τα οποία ισχύει:

$$u \;=\; \lambda_1\, u_1 \;+\; \lambda_2\, u_2 \;+\; \lambda_3\, u_3 \;+\; \lambda_4\, u_4 \quad\Longrightarrow$$

$$(1,2,3,4) \;=\; \lambda_1\,(1,1,0,0) \;+\; \lambda_2\,(0,1,1,0) \;+\; \lambda_3\,(0,0,1,1) \;+\; \lambda_4\,(1,0,0,0) \quad\Longrightarrow$$

$$(1,2,3,4) = (\lambda_1{+}\lambda_4,\, \lambda_1{+}\lambda_2,\, \lambda_2{+}\lambda_3,\, \lambda_3) \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{array}{l} \lambda_1+\lambda_4 \;=\; 1 \\ \lambda_1+\lambda_2 \;=\; 2 \\ \lambda_2+\lambda_3 \;=\; 3 \\ \lambda_3 \;=\; 4 \end{array}\right\} \quad\Longrightarrow\quad \left.\begin{array}{l} \lambda_3 \;=\; 4 \\ \lambda_2 \;=\; 3-4 \;=\; -1 \\ \lambda_1 \;=\; 2-(-1) \;=\; 3 \\ \lambda_4 \;=\; 1-3 \;=\; -2 \end{array}\right\}$$

Οι συντεταγμένες του u ως προς τη βάση A είναι οι

$$(3,\; -1,\; 4,\; -2)\,.$$

Πρόβλημα 4.
Δίνεται ότι τα σύνολα

$$V_1 = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix}, \quad a, b, c \in \mathbf{R} \right\}$$

και

$$V_2 = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2} \mid A = \begin{bmatrix} d & 0 \\ d & e \end{bmatrix}, \quad d, e \in \mathbf{R} \right\}$$

είναι υπόχωροι του $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

(α) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του V_1. **10μ.**

(β) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του V_2. **10μ.**

(γ) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του $V_1 \cap V_2$. **10μ.**

(δ) Να βρεθεί μια **βάση** και η **διάσταση** του $V_1 + V_2$. **10μ.**

(α) Το γενικό στοιχείο του V_1 γράφεται μονοσήμαντα σαν γραμμικός συνδυασμός των πινάκων E_1, E_2, E_3:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ 0 & c \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = aE_1 + bE_2 + cE_3 .$$

Άρα το σύνολο $\{E_1, E_2, E_3\}$ αποτελεί μια βάση του V_1 και $dimV_1$=3.

(β) Το γενικό στοιχείο του V_2 γράφεται ως εξής:

$$\begin{bmatrix} d & 0 \\ d & c \end{bmatrix} = d \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} + e \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = dE_4 + eE_3 .$$

Το σύνολο $\{E_4, E_3\}$ παράγει προφανώς τον V_2 κα είναι γραμμικά ανεξάρτητο (αφού ο E_4 δεν είναι βαθμωτό πολλαπλάσιο του E_3). Άρα το $\{E_4, E_3\}$ είναι βάση του V_2 και $dimV_2$=2.

(γ) Έστω

$$A \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix}$$

ένα στοιχείο του V_2. Αν $A \in V_1 \cap V_2$ τότε πρέπει να είναι α=0 και β=0. Άρα το γενικό στοιχείο του $V_1 \cap V_2$ είναι της μορφής

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} = \gamma \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \gamma E_3 .$$

Είναι φανερό ότι το $\{E_3\}$ αποτελεί μια βάση του $V_1 \cap V_2$ και $dim(V_1 \cap V_2)$=1.

(δ)

1ος τρόπος

Επειδή

$$dim(V_1 + V_2) = dimV_1 + dimV_2 - dim(V_1 \cap V_2) = 3 + 2 - 1 = 4$$

και ο $V_1 + V_2$ είναι υπόχωρος του $\mathcal{M}_{2\times 2}$ που έχει διάσταση 4, συμπεραίνουμε ότι $V_1 + V_2$=$\mathcal{M}_{2\times 2}$. Μια βάση του $V_1 + V_2$ είναι η συνήθης βάση του $\mathcal{M}_{2\times 2}$

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

2ος τρόπος

Η ένωση των βάσεων των V_1 και V_2 παράγει προφανώς τον $V_1 + V_2$. Αφού ο E_3 ανήκει και στις δύο βάσεις το σύνολο αυτό αποτελείται από τέσσερα στοιχεία:

$$\{E_1, E_2, E_3, E_4\} .$$

Θα δείξουμε ότι το πιο πάνω σύνολο είναι γραμμικά ανεξάρτητο:

$$\lambda_1 E_1 + \lambda_2 E_2 + \lambda_3 E_3 + \lambda_4 E_4 = O \quad \Longrightarrow \quad \begin{bmatrix} \lambda_1 + \lambda_4 & \lambda_2 \\ \lambda_4 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \Longrightarrow \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Άρα το $\{E_1, E_2, E_3, E_4\}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητο και έτσι αποτελεί βάση του $V_1 + V_2$. Έχουμε επίσης $dim(V_1 + V_2)$=4, οπότε συμπεραίνουμε εκ νέου ότι $V_1 + V_2$=$\mathcal{M}_{2\times 2}$.