1.1 Προβλήματα

1. Σχεδιάστε τα διανύσματα $\mathbf{v}=(2,3,-6)$ και $\mathbf{w}=(-1,1,1)$. Στο σχήμα σας τοποθετήστε τα $-\mathbf{v}$, $\mathbf{v}+\mathbf{w}$, $2\mathbf{v}$ και $\mathbf{v}-\mathbf{w}$.

2. Χρησιμοποιήστε συνολοθεωρητικό ή διανυσματικό συμβολισμό ή και τους δύο για να περιγράψετε τα πιο κάτω:
   (α) Το επίπεδο που παράγεται από τα $\mathbf{v}_1=(2,7,0)$ και $\mathbf{v}_2=(0,2,7)$.
   (β) Την ευθεία που περνά από τα $(-5,0,4)$ και $(6,-3,2)$.
   (γ) Το παραλληλόγραμμο με προσκείμενες πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{i}+3\mathbf{k}$ και $-2\mathbf{j}$.

3. Δείξτε ότι κάθε σημείο της ευθείας $\mathbf{v}=(1,-1,2)+t\,(2,3,1)$ ικανοποιεί την $5x-3y-z-6=0$.
   Πως θα μπορούσαμε να διατυπώσουμε διαφορετικά το πρόβλημα;

4. Έστω τα διανύσματα
   $$\mathbf{u} \;=\; -\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{v} \;=\; -\mathbf{i}-3\mathbf{j}+4\mathbf{k}\,.$$
   (α) Να βρεθούν τα $||\mathbf{u}||$, $||\mathbf{v}||$ και $\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}$.
   (β) Κανονικοποιήστε τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.
   (γ) Βρείτε τη γωνία που σχηματίζουν τα $\mathbf{u}$ και $\mathbf{v}$.

5. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{R}^3$ και $\lambda\in\mathbf{R}$, δείξτε τις πιο κάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:
   (α) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}\geq 0$.
   $\mathbf{a}\cdot\mathbf{a}=0 \quad\Longleftrightarrow\quad \mathbf{a}=\mathbf{0}$.
   (β) $(\lambda\mathbf{a})\cdot\mathbf{b}=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}) \quad$ και $\quad \mathbf{a}\cdot(\lambda\mathbf{b})=\lambda(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})$.
   (γ) $\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}+\mathbf{c})=\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}+\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} \quad$ και $\quad (\mathbf{a}+\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{a}\cdot\mathbf{c}+\mathbf{b}\cdot\mathbf{c}$
   (δ) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}=\mathbf{b}\cdot\mathbf{a}$

6. Βρείτε την προβολή του $\mathbf{u}=-\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ πάνω στο $\mathbf{v}=2\mathbf{i}+\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

7. Ένα υγρό ρέει διαμέσου μιας επίπεδης επιφάνειας με ομοιόμορφη διανυσματική ταχύτητα $\mathbf{v}$. Έστω $\mathbf{n}$ ένα μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στην επιφάνεια. Δείξτε ότι $\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}$ είναι ο όγκος του υγρού που περνά μέσα από μοναδιαία επιφάνεια του επιπέδου στη μονάδα του χρόνου.

8. Αν $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\in\mathbf{R}^3$ και $\lambda,\mu\in\mathbf{R}$, δείξτε τις πιο κάτω ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου:
   (α) $\mathbf{a}\times\mathbf{b}=-\mathbf{b}\times\mathbf{a}$.
   (β) $\mathbf{a}\times(\lambda\mathbf{b}+\mu\mathbf{c})=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{b})+\mu(\mathbf{a}\times\mathbf{c})$.
   $(\lambda\mathbf{a}+\mu\mathbf{b})\times\mathbf{c}=\lambda(\mathbf{a}\times\mathbf{c})+\mu(\mathbf{b}\times\mathbf{c})$.

9. Δείξτε ότι για το *βαθμωτό τριπλό γινόμενο* ισχύει
   $$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{b}\times\mathbf{c}) \;=\; \mathbf{b}\cdot(\mathbf{c}\times\mathbf{a}) \;=\; \mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$$

10. Δείξτε ότι για το *διανυσματικό τριπλό γινόμενο* ισχύουν τα εξής:
(α)
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \;=\; (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} \;-\; (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\, \mathbf{c}$$
(β)
$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c} \;=\; (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{b} \;-\; (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})\, \mathbf{a}$$
Σημείωση: Παρατηρούμε ότι δεν ισχύει η προσεταιριστική ιδιότητα:
$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \neq (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$$

11. Δείξτε την *ταυτότητα του Jacobi*:
$$(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} \;+\; (\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{u} \;+\; (\mathbf{w} \times \mathbf{u}) \times \mathbf{v} \;=\; \mathbf{0}\,.$$

12. Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{a}{=}\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$ και $\mathbf{b}{=}2\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

13. Βρείτε το εμβαδόν του τριγώνου με χορυφές τα $(0,0,0)$, $(1,1,1)$ και $(0,-2,3)$.

14. Βρείτε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου με πλευρές τα διανύσματα $\mathbf{i}$, $3\mathbf{j}-\mathbf{k}$ και $4\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$.

15. Δείξτε ότι το εμβαδόν ενός τριγώνου στο επίπεδο με χορυφές (x_1,y_1), (x_2,y_2) και (x_3,y_3) είναι η απόλυτη τιμή του
$$\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix}$$

16. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περνάει από το $(1,2,-3)$ και είναι κάθετο στην $\mathbf{v}{=}(0,2,-1)+t\,(1,-2,3)$.

17. Βρείτε την απόσταση του $(2,1,-1)$ από το επίπεδο $x-2y+2z+5{=}0$.

18. Βρείτε μια εξίσωση για το επίπεδο που περιέχει την ευθεία $\mathbf{v}{=}(-1,1,2)+t\,(3,2,4)$ και είναι κάθετο στο επίπεδο $2x+y-3z+4{=}0$.

19. Βρείτε την απόσταση του σημείου $(6,1,0)$ από το επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων και είναι κάθετο στο $\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

20. Έστω A, B και C τα άκρα των διανυσμάτων $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, και $\mathbf{c}$, αντίστοιχα, τα οποία είναι συνεπίπεδα και έχουν κοινή αρχή O εντός του τριγώνου ABC. Δείξτε ότι
$$E_A\,\mathbf{a} \;+\; E_B\,\mathbf{b} \;+\; E_C\,\mathbf{c} \;=\; \mathbf{0}\,,$$
όπου E_A, E_B και E_C τα εμβαδά των τριγώνων OBC, OCA και OAB, αντίστοιχα.
Σημείωση: Η πιο πάνω σχέση είναι γνωστή ως *σχέση του Καραθεοδωρή*.

21. Εκφράστε την
$$z \;=\; \frac{1}{2}\,\ln(x^2+y^2)$$
σε πολικές συντεταγμένες και κατασκευάστε πρόχειρα το γράφημά της.

22. Στον $\mathbf{R}^3$, δείξτε τα εξής:

    (α) **Κανόνας του παραλληλογράμμου.**

    $$2||\mathbf{x}||^2 + 2||\mathbf{y}||^2 = ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 + ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2$$

    (β)

    $$||\mathbf{x} - \mathbf{y}|| \, ||\mathbf{x} + \mathbf{y}|| \leq ||\mathbf{x}||^2 + ||\mathbf{y}||^2$$

    (γ) **Ταυτότητα πόλωσης** (polarization identity).

    $$4\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = ||\mathbf{x} + \mathbf{y}||^2 - ||\mathbf{x} - \mathbf{y}||^2$$

23. Δείξτε ότι τρία διανύσματα $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ και $\mathbf{c}$ βρίσκονται στο ίδιο επίπεδο που περνάει από την αρχή των αξόνων αν και μόνο αν υπάρχουν τρεις πραγματικοί αριθμοί α, β και γ, όχι όλοι μηδέν, τέτοιοι ώστε

    $$\alpha\,\mathbf{a} + \beta\,\mathbf{b} + \gamma\,\mathbf{c} = \mathbf{0}.$$

    Σημείωση: Τι σας θυμίζει η πιο πάνω σχέση;

24. Αν a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, $b_3 \in \mathbf{R}$, δείξτε ότι

    $$(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\,(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$

25. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από Καρτεσιανές σε κυλιδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:

    (α) $(0,\ 3,\ 4)$
    (β) $(-\sqrt{2},\ 1,\ 0)$
    (γ) $(0,\ 0,\ 0)$
    (δ) $(-1,\ 0,\ 1)$
    (ε) $(-2\sqrt{3},\ -2,\ 3)$

26. Μετατρέψτε τα παρακάτω σημεία από σφαιρικές σε Καρτεσιανές και κυλιδρικές συντεταγμένες και σχεδιάστε τα:

    (α) $(1,\ \pi/4,\ 1)$
    (β) $(3,\ \pi/6,\ -4)$
    (γ) $(0,\ \pi/4,\ 1)$
    (δ) $(2,\ -\pi/2,\ 1)$
    (ε) $(-2,\ -\pi/2,\ 1)$

27. Εκφράστε την εξίσωση

    $$z = x^2 - y^2$$

    σε κυλινδρικές και σφαιρικές συντεταγμένες.