ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 25 Σεπτεμβρίου 2002 (♡)

Όνομα: ΑΠΤ:

Πρόβλημα 1.

(α) Βρείτε την **εξίσωση του επιπέδου** που περνά από το σημείο $(1,2,-1)$ και είναι κάθετο στην ευθεία $\mathbf{v}=(0,2,-1)+t\,(1,-2,3)$. **15μ.**

(β) Διατυπώστε και αποδείξτε την **τριγωνική ανισότητα** στον $\mathbf{R}^n$. **30μ.**

(γ) Δείξτε ότι *δεν υπάρχει* το όριο της

$$f(x,y) \;=\; \frac{x^2y^2}{x^2y^2 \,+\, (x-y)^2}$$

στο $(0,0)$. **15μ.**

(α) Το επίπεδο είναι κάθετο στο διάνυσμα $(1,-2,3)$ και περνά από το σημείο $(1,2,-1)$. Από τον τύπο

$$A\,(x-x_0) \,+\, B\,(y-y_0) \,+\, C(z-z_0) \;=\; 0$$

έχουμε

$$1\,(x-1) \,-\, 2\,(y-2) \,+\, 3(z+1) \;=\; 0 \quad\Longrightarrow\quad x \,-\, 2y \,+\, 3z \,+\, 6 \;=\; 0\,.$$

(β) **Διατύπωση:** Αν $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{R}^n$ τότε $||\mathbf{x}+\mathbf{y}||\le||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||$.

Απόδειξη:

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \;=\; (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) \;=\; \mathbf{x}\cdot\mathbf{x} \,+\, 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \,+\, \mathbf{y}\cdot\mathbf{y} \;=\; ||\mathbf{x}||^2 \,+\, 2\,\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \,+\, ||\mathbf{y}||^2 \quad\Longrightarrow$$

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \;\le\; ||\mathbf{x}||^2 \,+\, 2\,|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \,+\, ||\mathbf{y}||^2$$

(χρησιμοποιήσαμε την $z\le|z|$). Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz, ισχύει

$$|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \;\le\; ||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}||\,,$$

οπότε

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||^2 \;\le\; ||\mathbf{x}||^2 \,+\, 2||\mathbf{x}||\,||\mathbf{y}|| \,+\, ||\mathbf{y}||^2 \;=\; (||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||)^2 \quad\Longrightarrow$$

$$||\mathbf{x}+\mathbf{y}||\le||\mathbf{x}||+||\mathbf{y}||$$

(γ) Βρίσκουμε τα όρια κατά μήκος του άξονα των x (C_1, $y{=}0$) και κατά μήκος της ευθείας $y{=}x$ (C_2).

$$\lim_{C_1} f(x,y) \;=\; \lim_{x\to0}\frac{x^2 0}{x^2 0 \,+\, (x-0)^2} \;=\; \lim_{x\to0}\frac{0}{x^2} \;=\; 0$$

$$\lim_{C_2} f(x,y) \;=\; \lim_{x\to0}\frac{x^4}{x^4 \,+\, 0^2} \;=\; 1\,.$$

Παρατηρούμε ότι η $f(x,y)$ τείνει σε διαφορετικές τιμές. Άρα δεν υπάρχει το όριο της $f(x,y)$ στο $(0,0)$.

Πρόβλημα 2.

(α) Περιγράψτε σύντομα και σχεδιάστε πρόχειρα τις **ισοσταθμικές επιφάνειες** που σε *σφαιρικές συντεταγμένες* (r, θ, ϕ) ορίζονται από τις

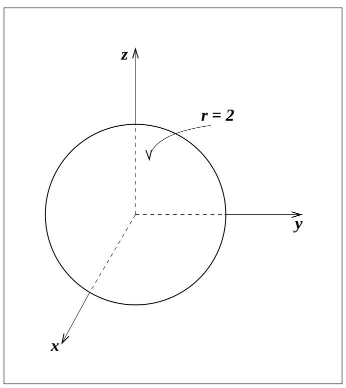
$$\text{(i)} \quad r = 2 \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \theta = \frac{\pi}{3} \qquad\qquad \text{(iii)} \quad \phi = \frac{\pi}{4}$$

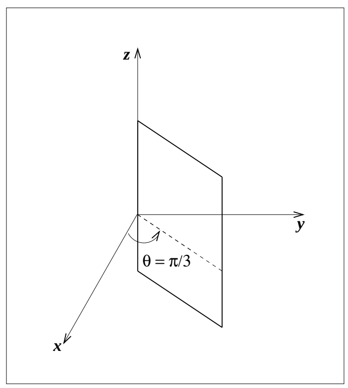
30μ.

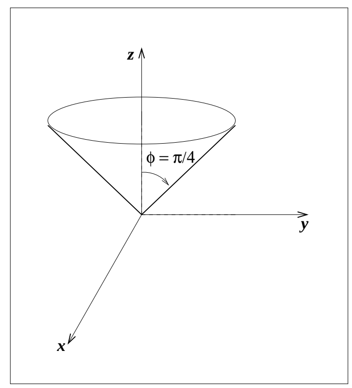
(β) Εκφράστε τις πιο πάνω ισοσταθμικές επιφάνειες σε **Καρτεσιανές συντεταγμένες**. **10μ.**

(α)

- Η $r = 2$ ορίζει την επιφάνεια σφαίρας με κέντρο την αρχή και ακτίνα 2.
- Η θ=$\pi/3$ ορίζει την επιφάνεια ημιεπιπέδου το οποίο αρχίζει από τον άξονα των z και τέμνει κάθετα το επίπεδο xy σε γωνία θ=$\pi/3$.
- Η ϕ=$\pi/4$ ορίζει την επιφάνεια κυκλικού κώνου η οποία σχηματίζει γωνία $\pi/4$ με τον άξονα των z και έχει κορυφή την αρχή.







(β)

(i) r=2.

$$x^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2 \,=\, 4 \quad \Longrightarrow \quad z \,=\, \pm\sqrt{4 \,-\, x^2 \,-\, y^2}\,.$$

(ii) θ=$\pi/3$ οπότε $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$$\frac{\pi}{3} \,=\, tan^{-1}\frac{y}{x} \quad \Longrightarrow \quad \frac{y}{x} \,=\, tan\frac{\pi}{3} \,=\, \sqrt{3} \quad \Longrightarrow \quad y \,=\, \sqrt{3}\,x\,, \qquad x \geq 0\,.$$

(iii) ϕ=$\pi/4$ οπότε $z \geq 0$.

$$\frac{\pi}{4} \,=\, tan^{-1}\frac{\sqrt{x^2 \,+\, y^2}}{z} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\sqrt{x^2 \,+\, y^2}}{z} \,=\, tan\frac{\pi}{4} \,=\, 1 \quad \Longrightarrow \quad z \,=\, \sqrt{x^2 \,+\, y^2}\,.$$