ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 16 Οκτωβρίου 2002 (♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1. Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α)	**Διανυσματικό πεδίο**.	2μ.
(β)	**Βαθμωτό πεδίο**.	2μ.
(γ)	**Κλίση** βαθμωτού πεδίου.	4μ.
(δ)	**Στροβιλισμός** διανυσματικού πεδίου.	4μ.
(ε)	**Απόκλιση** διανυσματικού πεδίου.	4μ.
(στ)	**Αρμονική συνάρτηση**.	4μ.

(α) **Διανυσματικό πεδίο** (vector field) στον $\mathbf{R}^n$ είναι μια απεικόνιση της μορφής $\mathbf{F} : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

(β) **Βαθμωτό πεδίο** (scalar field) στον $\mathbf{R}^n$ είναι μια απεικόνιση της μορφής $f : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$.

(γ) Έστω f ένα C^1 βαθμωτό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Η **κλίση** (gradient) του f ορίζεται ως εξής:

$$grad\, f = \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) .$$

(δ) Έστω $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Ο **στροβιλισμός** (vorticity) του $\mathbf{F}$ ορίζεται ως εξής:

$$curl\, \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

ή

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(ε) Έστω $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Η **απόκλιση** (divergence) του $\mathbf{F}$ ορίζεται ως εξής:

$$div\, \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} .$$

(στ) Μια C^2 συνάρτηση f καλείται **αρμονική** (harmonic) αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0$$

ή

$$\nabla^2 f = 0 .$$

Πρόβλημα 2.

Να δειχθεί το θεώρημα: Για κάθε C^2 βαθμωτό πεδίο f ισχύει $\nabla \times (\nabla f)=\mathbf{0}$. **15μ.**

Αφού
$$\nabla f \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) \;,$$
έχουμε
$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla f \;&=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&=\; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} \;=\; \mathbf{0}
\end{aligned}$$
λόγω της ισότητας των μεικτών παραγώγων.

Πρόβλημα 3.

Έστω η καμπύλη

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \;=\; (t,\; t\sin t,\; t\cos t)\;.$$

(α) Βρείτε το διάνυσμα και το μέτρο της ταχύτητας. **10μ.**

(β) Βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης στο σημείο $(\pi, 0, -\pi)$. **10μ.**

(γ) Βρείτε το μήκος τόξου της καμπύλης μεταξύ των σημείων $(0,0,0)$ και $(\pi, 0, -\pi)$. **15μ.**

Βοηθητικός τύπος:

$$\int \sqrt{a^2 + x^2}\, dx \;=\; \frac{x\,\sqrt{a^2+x^2}}{2} \;+\; \frac{a^2}{2}\,\ln\left(x \;+\; \sqrt{a^2+x^2}\right)$$

(α)

$$\mathbf{v}(t) \;=\; \boldsymbol{\sigma}'(t) \;=\; (1,\; \sin t + t\cos t,\; \cos t - t\sin t)$$

και

$$||\mathbf{v}(t)|| = \sqrt{1 \;+\; (\sin t + t\cos t)^2 \;+\; (\cos t - t\sin t)^2} = \sqrt{1 \;+\; (\sin^2 t + \cos^2 t) \;+\; t^2(\sin^2 t + \cos^2 t)} \quad\Longrightarrow$$

$$||\mathbf{v}(t)|| \;=\; \sqrt{2 + t^2}\,.$$

(β) Η εξίσωση της εφαπτομένης της $\boldsymbol{\sigma}$ στο $\boldsymbol{\sigma}(\boldsymbol{t}_0)$ δίνεται σε παραμετρική μορφή από την

$$I(\lambda) \;=\; \boldsymbol{\sigma}(t_0) \;+\; \lambda\,\boldsymbol{\sigma}'(t_0)\,.$$

Έχουμε λοιπόν:

$$I(\lambda) \;=\; (\pi,\; 0,\; -\pi) \;+\; \lambda\,(1,\; 0-\pi,\; -1-0) \;=\; (\pi,\; 0,\; -\pi) \;+\; \lambda\,(1,\; -\pi,\; -1)$$

(γ) Για το μήκος τόξου από το t=0 στο t=π, έχουμε

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \int_0^\pi ||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\, dt \;=\; \int_0^\pi \sqrt{2+t^2}\, dt \;=\; \left[\frac{t\,\sqrt{2+t^2}}{2} \;+\; \ln\left(t \;+\; \sqrt{2+t^2}\right)\right]_0^\pi \quad\Longrightarrow$$

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \frac{\pi\,\sqrt{2+\pi^2}}{2} \;+\; \ln\left(\pi \;+\; \sqrt{2+\pi^2}\right) \;-\; \ln\sqrt{2}\,.$$

Πρόβλημα 4.
Έστω $\boldsymbol{\omega} = \omega_1\mathbf{i} + \omega_2\mathbf{j} + \omega_3\mathbf{k}$ σταθερό διάνυσμα και $\mathbf{r}=x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ το διάνυσμα θέσης. Δείξτε ότι

$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{2}\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) .$$

30μ.

Επειδή

$$\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = (\omega_2 z - \omega_3 y)\mathbf{i} + (\omega_3 x - \omega_1 z)\mathbf{j} + (\omega_1 y - \omega_2 x)\mathbf{k}$$

έχουμε

$$\nabla \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \omega_2 z - \omega_3 y & \omega_3 x - \omega_1 z & \omega_1 y - \omega_2 x \end{vmatrix} = 2\omega_1\,\mathbf{i} + 2\omega_2\,\mathbf{j} + 2\omega_3\,\mathbf{k} = 2\,\boldsymbol{\omega}$$