ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 30 Οκτωβρίου 2002 (♢♢♢)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

(α) Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(i) **Διπλό ολοκλήρωμα** (πάνω σε ορθογώνιο). **5μ.**

(ii) **Τριπλό ολοκλήρωμα** (πάνω σε ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο). **5μ.**

(β) Διατυπώστε το **Θεώρημα Μέσης Τιμής για Διπλά Ολοκληρώματα**. **5μ.**

(α) (i) **Διπλό ολοκλήρωμα**

Έστω η συνάρτηση $f : R \to \mathbf{R}$, όπου $R=[a,b]\times[c,d]$. Θεωρούμε μια διαμέριση του R τάξης n:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d$$

με

$$\Delta x \;=\; x_{j+1} - x_j \;=\; \frac{b-a}{n}\,, \qquad \Delta y \;=\; y_{k+1} - y_k \;=\; \frac{d-c}{n}\,,$$

και το αντίστοιχο άθροισμα Riemann:

$$S_n \;=\; \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x \Delta y\,,$$

όπου $\mathbf{c}_{jk} \in R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$. Αν η ακολουθία $\{S_n\}$ συγκλίνει σε ένα όριο S όταν $n \to \infty$ και το όριο S είναι το ίδιο για οποιαδήποτε επιλογή σημείων $\mathbf{c}_{jk}$ στα ορθογώνια R_{jk}, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη πάνω στο R και γράφουμε

$$\int\!\!\int_R f(x,y)\,dxdy \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,\Delta x \Delta y \;=\; S\,.$$

(ii) **Τριπλό ολοκλήρωμα**

Έστω η συνάρτηση $f : B \to \mathbf{R}$, όπου $B=[a,b]\times[c,d]\times[u,v]$. Θεωρούμε μια διαμέριση του B τάξης n:

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\,, \qquad c = y_0 < y_1 < \cdots < y_n = d\,, \qquad u = z_0 < z_1 < \cdots < z_n = v\,,$$

με

$$\Delta x \;=\; x_{j+1} - x_j \;=\; \frac{b-a}{n}\,, \qquad \Delta y \;=\; y_{k+1} - y_k \;=\; \frac{d-c}{n}\,, \qquad \Delta z \;=\; z_{i+1} - z_i \;=\; \frac{u-v}{n}\,,$$

και το αντίστοιχο άθροισμα Riemann:

$$S_n \;=\; \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ijk})\,\Delta x \Delta y \Delta z\,,$$

όπου $\mathbf{c}_{ijk} \in B_{ijk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}] \times [z_i, z_{i+1}]$. Αν η ακολουθία $\{S_n\}$ συγκλίνει σε ένα όριο S όταν $n \to \infty$ και το όριο S είναι το ίδιο για οποιαδήποτε επιλογή σημείων $\mathbf{c}_{ijk}$ στα ορθογώνια παραλληλεπίπεδα B_{ijk}, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη πάνω στο B και γράφουμε

$$\int\!\!\int\!\!\int_B f(x,y,z)\,dxdydz \;=\; \lim_{n\to\infty} \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{ijk})\,\Delta x \Delta y \Delta z \;=\; S\,.$$

(β) **Θεώρημα Μέσης Τιμής για Διπλά Ολοκληρώματα**

Υποθέτουμε ότι η $f : D \to \mathbf{R}$ είναι συνεχής και το D είναι ένα στοιχειώδες χωρίο στο επίπεδο. Τότε για κάποιο σημείο $(x_0, y_0) \in D$ ισχύει

$$\int_D f(x,y)\,dA \;=\; f(x_0,y_0)\,A(D)\,,$$

όπου $A(D)$ το εμβαδόν του D:

$$A(D) \;=\; \int_D dA\,.$$

(α) Διατυπώστε και <u>αποδείξτε</u> το **Θεώρημα Fubini** για διπλά ολοκληρώματα. **25μ.**
(β) Ποια είναι η πρακτική σημασία του Θεωρήματος; **5μ.**

(α) **Θεώρημα Fubini**
Έστω f συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το R=$[a,b]\times[c,d]$. Τότε ισχύει

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx \;=\; \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy \;=\; \int_R f(x,y)\,dA\,.$$

Απόδειξη
Θα δείξουμε μόνο τη μια ισότητα,

$$I \;=\; \int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx \;=\; \int_R f(x,y)\,dA\,,$$

αφού η άλλη αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο.

Έστω $c=y_0<y_1<\cdots<y_n=d$ μια κανονική διαμέριση του $[c,d]$. Έχουμε τότε:

$$I \;=\; \int_a^b \left[\int_c^d f(x,y)\,dy\right]\,dx \;=\; \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n-1}\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)\,dy\right]\,dx\,.$$

Επειδή η f είναι συνεχής, από την ολοκληρωτική εκδοχή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής, υπάρχει $Y_k(x)\in[y_k,y_{k+1}]$ τέτοιο ώστε

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x,y)\,dy \;=\; f(x,Y_k(x))\,(y_{k+1}-y_k)\,.$$

Άρα

$$I \;=\; \int_a^b \left[\sum_{k=0}^{n-1} f(x,Y_k(x))\,(y_{k+1}-y_k)\right]\,dx\,.$$

Εκφράζοντας το τελευταίο ολοκλήρωμα ως όριο αθροίσματος Riemann, έχουμε

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(P_j,Y_k(P_j))\,(y_{k+1}-y_k)\,(x_{j+1}-x_j)$$

όπου $a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b$ μια διαμέριση του $[a,b]$ και $P_j\in[x_j,x_{j+1}]$. Θέτοντας $\mathbf{c}_{jk}$=$(P_j,Y_k(P_j))\in R_{jk}$ όπου R_{jk}=$[x_j,x_{j+1}]\times[y_k,y_{k+1}]$, έχουμε

$$I \;=\; \lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk})\,(y_{k+1}-y_k)\,(x_{j+1}-x_j) \;=\; \int_R f(x,y)\,dA\,.$$

(β) Το Θεώρημα του Fubini μας επιτρέπει να αλλάξουμε τη σειρά ολοκλήρωσης. Αυτό, σε αρκετές περιπτώσεις, διευκολύνει τον υπολογισμό του ολοκληρώματος.

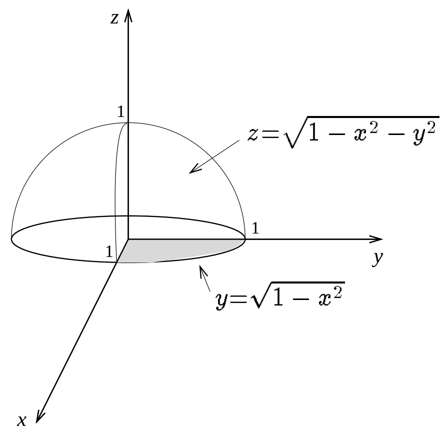
Υπολογίστε το τριπλό ολοκλήρωμα:

$$\iiint_S x\,y\,z\,dx\ dy\,dz\ ,$$

όπου S το χωρίο που ορίζεται από τις:

$$x \geq 0\ , \quad y \geq 0\ , \quad z \geq 0\ , \quad x^2+y^2+z^2 \leq 1\ .$$

25μ.



Το χωρίο S είναι τύπου 1 και ορίζεται από τις:

$$0 \leq x \leq 1$$
$$0 \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$$
$$0 \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

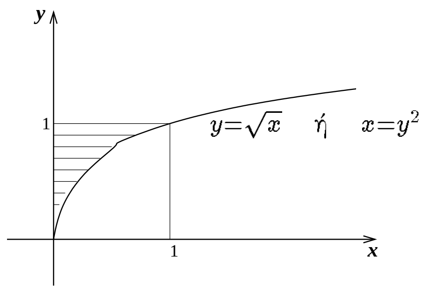
Έχουμε λοιπόν για το ολοκλήρωμά μας:

$$\begin{aligned}
I &= \iiint_S x\,y\,z\,dx\ dy\,dz \ = \ \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \int_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} x\,y\,z\,dz\,dy\,dx \\
&= \int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[x\,y\,\frac{z^2}{2}\right]_0^{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy\,dx \ = \ \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} x\,y\,(1-x^2-y^2)\,dy\,dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \left[(1-x^2)\,x\,y \ - \ x\,y^3\right] dy\,dx \ = \ \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-x^2)\,x\,\frac{y^2}{2} \ - \ x\,\frac{y^4}{4}\right]_0^{\sqrt{1-x^2}} dx \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[(1-x^2)\,x\,\frac{(1-x^2)}{2} \ - \ x\,\frac{(1-x^2)^2}{4}\right] dx \ = \ \frac{1}{8}\int_0^1 x\,(1-x^2)^2\,dx \\
&= -\frac{1}{16}\int_0^1 (1-x^2)^2\,d(1-x^2) \ = \ -\frac{1}{16}\left[\frac{(1-x^2)^3}{3}\right]_0^1 \ = \ \frac{1}{48}\ .
\end{aligned}$$

Υπολογίστε το διπλό ολοκλήρωμα:

$$\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\, dy\, dx\,.$$

30μ.



Το αρχικό χωρίο ολοκλήρωσης είναι τύπου 1:

$$0 \le x \le 1\,, \quad \sqrt{x} \le y \le 1\,.$$

Επειδή δεν είναι εύκολο να ολοκληρώσουμε, αλλάζουμε τη σειρά ολοκλήρωσης και θεωρούμε το χωρίο ως χωρίο τύπου 2:

$$0 \le y \le 1\,, \quad 0 \le x \le y^2\,.$$

Έχουμε λοιπόν για το ολοκλήρωμά μας:

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 \sqrt{1+y^3}\, dy\, dx \;=\; \int_0^1 \int_0^{y^2} \sqrt{1+y^3}\, dx\, dy \\
&= \int_0^1 \sqrt{1+y^3}\, [x]_0^{y^2}\, dy \;=\; \int_0^1 y^2 \sqrt{1+y^3}\, dy \\
&= \frac{1}{3}\int_0^1 \sqrt{1+y^3}\, d(1+y^3) \;=\; \frac{1}{3}\,\frac{2}{3}\, \left[(1+y^3)^{3/2}\right]_0^1 \;=\; \frac{2}{9}\, \left(2\sqrt{2}-1\right)
\end{aligned}$$