ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 6 Δεκεμβρίου 2002
($\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit\heartsuit$)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

$$\int_C (3x^2y\,-\,2y^2)\,dx\,+\,(x^3\,-\,4xy\,+\,6y^2)\,dy$$

όπου C **οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο**. **40μ.**

1ος τρόπος
Έστω C οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη στο επίπεδο και D το χωρίο που φράσσεται από αυτή. Από το Θεώρημα του Green ισχύει

$$\int_C P\,dx\,+\,Q\,dx\;=\;\int_D\left(\frac{\partial Q}{\partial x}\,-\,\frac{\partial P}{\partial y}\right)\,dxdy\,.$$

Για

$$P\;=\;3x^2y\,-\,2y^2\qquad\text{και}\qquad Q\;=\;x^3\,-\,4xy\,+\,6y^2$$

έχουμε

$$\frac{\partial P}{\partial y}\;=\;3x^2\,-\,4y\qquad\text{και}\qquad\frac{\partial Q}{\partial x}\;=\;3x^2\,-\,4y\,.$$

Άρα

$$\frac{\partial P}{\partial y}\;=\;\frac{\partial Q}{\partial x}\,.$$

Έτσι βρίσκουμε ότι για κάθε απλή κλειστή καμπύλη C στο επίπεδο ισχύει

$$\int_C (3x^2y\,-\,2y^2)\,dx\,+\,(x^3\,-\,4xy\,+\,6y^2)\,dy\;=\;\int_D 0\,dxdy\;=\;0$$

2ος τρόπος
Παρατηρούμε ότι το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F}\;=\;(3x^2y\,-\,2y^2)\,\mathbf{i}\,+\,(x^3\,-\,4xy\,+\,6y^2)\,\mathbf{j}$$

είναι *πεδίο κλίσεων* αφού

$$\mathbf{F}\;=\;\nabla f\,,$$

όπου

$$f\;=\;x^3y\,-\,2xy^2\,+\,2y^3\,.$$

Άρα το πεδίο $\mathbf{F}$ είναι **συντηρητικό**. Άρα για οποιαδήποτε απλή κλειστή καμπύλη C στο επίπεδο ισχύει

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s}\;=\;0\qquad\Longrightarrow\qquad\int_C (3x^2y\,-\,2y^2)\,dx\,+\,(x^3\,-\,4xy\,+\,6y^2)\,dy\;=\;0\,.$$

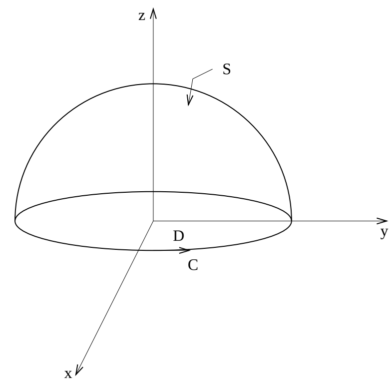
Πρόβλημα 2.
Να επαληθευθεί το **Θεώρημα του Stokes** για το διανυσματικό πεδίο

$$\mathbf{F} \;=\; (2x - y,\; -yz^2,\; -y^2 z)$$

και την επιφάνεια S του πάνω ημισφαιρίου της μοναδιαίας σφαίρας:

$$x^2 \,+\, y^2 \,+\, z^2 \;=\; 1, \qquad z \geq 0\,.$$

60μ.



Θα δείξουμε ότι

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_C \mathbf{F} \cdot ds\,,$$

όπου C το σύνορο της ημισφαιρικής επιφάνειας S, όπως φαίνεται στο σχήμα.

Επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\nabla \times \mathbf{F} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2x-y & -yz^2 & -y^2 z \end{vmatrix} \;=\; (-2yz + 2yz)\,\mathbf{i} \;-\; (0-0)\,\mathbf{j} \;+\; (0+1)\,\mathbf{k} \;=\; \mathbf{k}$$

Άρα

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_S \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D dxdy$$

όπου D της S στο επίπεδο xy είναι ο μοναδιαίος κύκλος. Άρα

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \;=\; A(D) \;=\; \pi\,.$$

Σημείωση: Αν δεν δούμε αμέσως ότι

$$\int_S \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D dxdy$$

μπορούμε να θυμηθούμε ότι, αν η S περιγράφεται από την $z{=}f(x,y)$ και το $\mathbf{F}{=}F_1\mathbf{i}{+}F_2\mathbf{j}{+}F_3\mathbf{k}$ είναι διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην S, ισχύει

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right) \,+\, F_2 \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right) \,+\, F_3 \right] dxdy\,. \tag{i}$$

Έτσι, αν $F_1{=}F_2{=}0$, ισχύει

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D F_3\, dxdy \qquad \Longrightarrow \qquad \int_S \mathbf{k} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D dxdy$$

Αν δεν θυμόμαστε την (i), τότε μια άλλη επιλογή θα είναι να εργαστούμε με τη γνωστή μας παραμετρικοποίηση της σφαιρικής επιφάνειας. Στην περίπτωση αυτή όμως θα απαιτηθούν περισσότεροι υπολογισμοί.

Επικαμπύλιο ολοκλήρωμα
Το σύνορο C της S είναι ο μοναδιαίος κύκλος στο επίπεδο xy. Μια παραμετρικοποίηση της C είναι η

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \;=\; (\cos t,\, \sin t,\, 0)\,, \qquad 0 \le t \le 2\pi\,.$$

Έτσι έχουμε

$$\begin{aligned}\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \;&=\; \int_0^{2\pi}[(2\cos t - \sin t)\,(-\sin t) + 0 + 0]\,dt \;=\; \int_0^{2\pi}(-\sin 2t \;+\; \sin^2 t)\,dt \\ &=\; \left[\frac{\cos 2t}{2}\right]_0^{2\pi} \;+\; \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 \;-\; \cos 2t)\,dt \;=\; 0 \;+\; \frac{1}{2}\,\left[t \;-\; \frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} \;=\; \pi\,.\end{aligned}$$

Άρα

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \;=\; \pi \;=\; \int_S \nabla\times\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}\,.$$

Έχουμε έτσι επαληθεύσει το Θεώρημα του Stokes.