## ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 29 Οκτωβρίου 2003 (♡♡♡)

**Όνομα:** **ΑΠΤ:**

**Πρόβλημα 1.**

(α) Διατυπώστε τον ορισμό του **στροβιλισμού** διανυσματικού πεδίου. **2μ.**

(β) Διατυπώστε τον ορισμό της **απόκλισης** διανυσματικού πεδίου. **2μ.**

(γ) Διατυπώστε το **θεώρημα Fubini**. **3μ.**

(δ) Έστω η καμπύλη

$$\boldsymbol{\sigma}(t) = (2t,\, t^2,\, \log t)\,,$$

ορισμένη για $t > 0$.

(i) Βρείτε το **μήκος τόξου** της $\boldsymbol{\sigma}$ ανάμεσα στα σημεία $(2,1,0)$ και $(4,4,\log 2)$. **4μ.**

(ii) Βρείτε το **μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα** της $\boldsymbol{\sigma}$ στο σημείο $(2,1,0)$. **4μ.**

---

(α) Έστω $\mathbf{F}{=}F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ένα $C^1$ διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Ο **στροβιλισμός** (vorticity) του $\mathbf{F}$ ορίζεται ως εξής:

$$curl\,\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ή

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(β) Έστω $\mathbf{F}{=}F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ένα $C^1$ διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Η **απόκλιση** (divergence) του $\mathbf{F}$ ορίζεται ως εξής:

$$div\,\mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}\,.$$

(γ) **Θεώρημα Fubini**

Έστω $f$ συνεχής συνάρτηση με πεδίο ορισμού το $R{=}[a,b] \times [c,d]$. Τότε ισχύει

$$\int_a^b \int_c^d f(x,y)\,dydx = \int_c^d \int_a^b f(x,y)\,dxdy = \int_R f(x,y)\,dA\,.$$

(δ) Βρίσκουμε πρώτα το $\boldsymbol{\sigma}'(t)$ και τη νόρμα του:

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = (2,\, 2t,\, \frac{1}{t})$$

και

$$||\boldsymbol{\sigma}'(t)|| = \sqrt{4 + 4t^2 + \frac{1}{t^2}} = \sqrt{\frac{4t^2 + 4t^4 + 1}{t^2}} = \frac{2t^2 + 1}{t} = 2t + \frac{1}{t}\,.$$

(i) Τα σημεία $(2,1,0)$ και $(4,4,\log 2)$ αντιστοιχούν στις τιμές $t{=}1$ και $t{=}2$:

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) = \int_1^2 ||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt = \int_1^2 \left(2t + \frac{1}{t}\right)\,dt = \left[t^2 + \log t\right]_1^2 = 3 + \log 2\,.$$

(ii) Για $t{=}1$

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) = (2,2,1) \quad \text{και} \quad ||\boldsymbol{\sigma}'(t)|| = 3\,.$$

Έτσι για το μοναδιαίο εφαπτόμενο διάνυσμα στο $(2,1,0)$ έχουμε

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\boldsymbol{\sigma}'(t)}{||\boldsymbol{\sigma}'(t)||} = \left(\frac{2}{3},\,\frac{2}{3},\,\frac{1}{3}\right)\,.$$

**Πρόβλημα 2.**

Αν $\mathbf{r}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ είναι το **διάνυσμα θέσης** $r=||\mathbf{r}||$ και $\mathbf{a}=a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k}$, δείξτε τα εξής:

(α) $\nabla\cdot\mathbf{r}=3$ **3μ.**

(β) $\nabla\times\mathbf{r}=\mathbf{0}$ **3μ.**

(γ) $\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r})=\mathbf{a}$ **3μ.**

(δ) $\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r})=0$ **3μ.**

(ε) $\nabla\cdot(r^n\mathbf{r})=(n+3)r^n$, με $n\in\mathbf{N}$ **3μ.**

---

(α)

$$\nabla\cdot\mathbf{r} \;=\; \frac{\partial x}{\partial x}+\frac{\partial y}{\partial y}+\frac{\partial z}{\partial z} \;=\; 1+1+1 \;=\; 3$$

(β)

$$\nabla\times\mathbf{r} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} \;=\; \left(\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial y}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial x}{\partial z}-\frac{\partial z}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial y}{\partial x}-\frac{\partial x}{\partial y}\right)\mathbf{k} \;=\; \mathbf{0}$$

(γ) $\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}=a_1x+a_2y+a_3z$ και έτσι

$$\nabla(\mathbf{a}\cdot\mathbf{r}) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(a_1x+a_2y+a_3z)\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}(a_1x+a_2y+a_3z)\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}(a_1x+a_2y+a_3z)\mathbf{k} \;=\; a_1\mathbf{i}+a_2\mathbf{j}+a_3\mathbf{k} \;=\; \mathbf{a}$$

(δ)

$$\mathbf{a}\times\mathbf{r} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ x & y & z \end{vmatrix} \;=\; (a_2z-a_3y)\,\mathbf{i}+(a_3x-a_1z)\,\mathbf{j}+(a_1y-a_2x)\,\mathbf{k}$$

και έτσι

$$\nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{r}) \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(a_2z-a_3y)+\frac{\partial}{\partial y}(a_3x-a_1z)+\frac{\partial}{\partial z}(a_1y-a_2x) \;=\; 0\,.$$

(ε) Από τον ορισμό της νόρμας

$$r \;=\; \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

και έτσι

$$r^n \;=\; (x^2+y^2+z^2)^{n/2}\,.$$

Βρίσκουμε πρώτα τις πρώτες μερικές παραγώγους του $r^n$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial r^n}{\partial x} &= \frac{n}{2}\,(x^2+y^2+z^2)^{n/2-1}\,2x \;=\; n\,x\,r^{n-2} \\ \frac{\partial r^n}{\partial y} &= n\,y\,r^{n-2} \\ \frac{\partial r^n}{\partial z} &= n\,z\,r^{n-2} \end{aligned}$$

Επειδή

$$r^n\mathbf{r} \;=\; r^nx\mathbf{i}+r^ny\mathbf{j}+r^nz\mathbf{k}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \nabla\cdot(r^n\mathbf{r}) &= \frac{\partial(r^nx)}{\partial x}+\frac{\partial(r^ny)}{\partial y}+\frac{\partial(r^nz)}{\partial z} \\ &= \frac{\partial r^n}{\partial x}x+r^n+\frac{\partial r^n}{\partial y}y+r^n+\frac{\partial r^n}{\partial z}z+r^n \\ &= 3r^n+n\,r^{n-2}\,(x^2+y^2+z^2) \;=\; (3+n)\,r^n \end{aligned}$$

**Πρόβλημα 3.**

(α) Δείξτε ότι

$$4e^5 \le \int_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2}\, dA \le 4e^{25}$$

**15μ.**

(β) Αν η $F$ είναι συνεχής στο $[0,\infty)$ δείξτε ότι

$$\int_0^x \left[\int_0^t F(u)du\right] dt \;=\; \int_0^x (x-u)\,F(u)du$$

**15μ.**

---

(α) Είναι φανερό ότι στο $[1,3]\times[2,4]$ η

$$f(x,y) \;=\; e^{x^2+y^2}$$

παίρνει την ελάχιστή της τιμή στο $(1,2)$ και την μέγιστή της στο $(3,4)$. Άρα

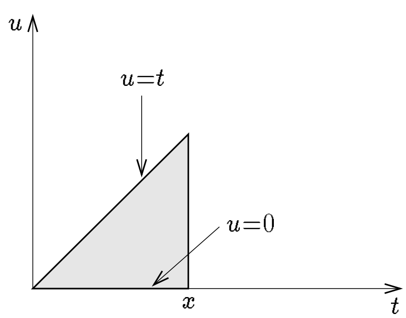
$$e^5 \le e^{x^2+y^2} \le e^{25} \quad\Longrightarrow\quad \int_{[1,3]\times[2,4]} e^5\, dA \le \int_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2}\, dA \le \int_{[1,3]\times[2,4]} e^{25}\, dA \quad\Longrightarrow$$

$$4e^5 \le \int_{[1,3]\times[2,4]} e^{x^2+y^2}\, dA \le 4e^{25}$$

αφού

$$A([1,3]\times[2,4]) \;=\; \int_{[1,3]\times[2,4]} dA \;=\; 4\,.$$

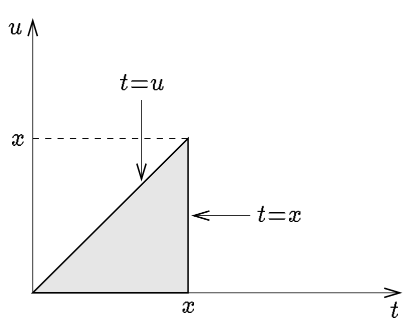
(β)




Το δοσμένο ολοκλήρωμα,

$$I \;=\; \int_0^x \left[\int_0^t F(u)du\right] dt\,,$$

είναι ολοκλήρωμα πάνω σε χωρίο τύπου 1 όπως φαίνεται στο σχήμα.




Αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης θεωρούμε το χωρίο ως χωρίο τύπου 2 και έχουμε

$$I = \int_0^x \left[\int_u^x F(u)dt\right] du = \int_0^x \left[F(u)t\right]_u^x du \quad\Longrightarrow$$

$$\int_0^x \left[\int_0^t F(u)du\right] dt \;=\; \int_0^x (x-u)\,F(u)du$$

**Πρόβλημα 4.**
Να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα

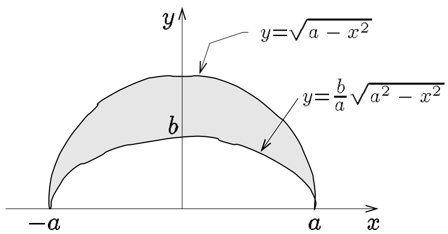
$$I = \int_D x^2 y \, dxdy$$

όπου

$$D = \left\{ (x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2 \,, \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \geq 1 \,, \ y > 0 \,, \ a > b > 0 \right\}$$

**40μ.**

---




Το χωρίο $D$ είναι το χωρίο που περιέχεται μεταξύ της έλλειψης

$$\Psi_1(x) = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$$

και του κύκλου

$$\Psi_2(x) = \sqrt{a^2 - x^2}$$

με $-a \leq x \leq a$. Έχουμε λοιπόν ένα χωρίο τύπου 1.

$$\begin{aligned}
I &= \int_D x^2 y \, dxdy = \int_{-a}^{a} \int_{\Psi_1(x)}^{\Psi_2(x)} x^2 y \, dy \, dx \\
&= \int_{-a}^{a} \left[ \frac{x^2 y^2}{2} \right]_{\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}}^{\sqrt{a^2-x^2}} dx = \int_{-a}^{a} \left[ \frac{x^2 \left(a^2 - x^2\right)}{2} - \frac{b^2 x^2 \left(a^2 - x^2\right)}{2a^2} \right] dx \\
&= \frac{1}{2a^2}(a^2 - b^2) \int_{-a}^{a} x^2 (a^2 - x^2) \, dx = \frac{1}{2a^2}(a^2 - b^2) \left[ a^2 \frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{5} \right]_{-a}^{a} \\
&= \frac{2}{15} \, a^3 (a^2 - b^2)
\end{aligned}$$