ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 26 Νοεμβρίου 2003 (♡♡♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

(α) Να αποδειχθεί το Θεώρημα:
Αν η $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ είναι κλάσης C^1 και η $\boldsymbol{\sigma} : [a,b] \to \mathbf{R}^3$ είναι κατά τμήματα C^1 καμπύλη, τότε

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(b)) \;-\; f(\boldsymbol{\sigma}(a))$$

15μ.

(β) Αν

$$\mathbf{F} \;=\; 2xy^2\,\mathbf{i} \;+\; (2x^2y+z)\,\mathbf{j} \;+\; y\,\mathbf{k}$$

να υπολογιστεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot ds\,,$$

όπου $\boldsymbol{\sigma}$ οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη. **5μ.**

(α) Από τον κανόνα της αλυσίδας, για την παράγωγο της σύνθετης συνάρτησης

$$F(t) \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(t))$$

ισχύει

$$F'(t) \;=\; \nabla f(\boldsymbol{\sigma}(t)) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) \qquad \text{(i)}$$

Από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού ισχύει

$$\int_a^b F'(t)\,dt \;=\; F(b) \;-\; F(a) \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(b)) \;-\; f(\boldsymbol{\sigma}(a)) \qquad \text{(ii)}$$

Από τις (i) και (ii) προκύπτει αμέσως ότι

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot d\mathbf{s} \;=\; f(\boldsymbol{\sigma}(b)) \;-\; f(\boldsymbol{\sigma}(a))$$

(β) Σύμφωνα με το πιο πάνω θεώρημα, αν η καμπύλη $\boldsymbol{\sigma}$ είναι κλειστή,

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \nabla f \cdot ds \;=\; 0\,.$$

Επειδή

$$\mathbf{F} \;=\; \nabla f\,,$$

όπου

$$f(x,y,z) \;=\; x^2y^2 \;+\; yz\,,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F} \cdot ds \;=\; 0\,.$$

Πρόβλημα 2.

Έστω C η προσανατολισμένη καμπύλη η οποία προκύπτει από την τομή των επιφανειών $y=\sqrt{3/2}x^2$ και $z=x^3$ και έχει αρχή το σημείο $(0,0,0)$ και πέρας το $(1,\sqrt{3/2},1)$.

(α) Γράψτε μια παραμετρικοποίηση $\boldsymbol{\sigma}$ της C που διατηρεί τον προσανατολισμό. **5μ.**

(β) Βρείτε το μήκος της C. **5μ.**

(γ) Αν $f(x,y,z)=x^2+yz$, να βρεθεί το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα

$$\int_C f\,ds\,.$$

10μ.

(δ) Να υπολογιστεί το **έργο** που παράγει το πεδίο

$$\mathbf{F} \;=\; yz\mathbf{i} \;+\; xz\mathbf{j} \;+\; xy\mathbf{k}\,,$$

κατά τη μετατόπιση του υλικού σημείου από την αρχή στο πέρας της C. **10μ.**

(α) Η προσανατολισμένη καμπύλη C παραμετρικοποιείται ως εξής:

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \;=\; \left(t,\; \sqrt{\frac{3}{2}}t^2,\; t^3\right)\;, \quad 0 \le t \le 1\,,$$

οπότε

$$\boldsymbol{\sigma}'(t) \;=\; (1,\; \sqrt{6}t,\; 3t^2)$$

και

$$||\boldsymbol{\sigma}'(t)|| \;=\; \sqrt{1+6t^2+9t^4} \;=\; 1 \;+\; 3t^2$$

(β) Για το μήκος της C έχουμε:

$$\ell(C) \;=\; \int_{\boldsymbol{\sigma}} ds \;=\; \int_0^1 ||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt \;=\; \int_0^1 (1\;+\;3t^2)\,dt \;=\; 2$$

(γ) Έχουμε επικαμπύλιο ολοκλήρωμα α′ είδους:

$$\begin{aligned}
\int_C f\,ds \;&=\; \int_C (x^2+yz)\,ds \;=\;=\; \int_0^1 \left(t^2+\sqrt{\frac{3}{2}}t^5\right)\;||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt \\
&=\; \int_0^1 \left(t^2+\sqrt{\frac{3}{2}}t^5\right)\;(1\;+\;3t^2)\,dt \\
&=\; \int_0^1 \left(t^2\;+\;3t^4\;+\;\sqrt{\frac{3}{2}}t^5\;+\;3\sqrt{\frac{3}{2}}t^7\right)\;dt \\
&=\; \frac{1}{3}\;+\;\frac{3}{5}\;+\;\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{6}\;+\;3\sqrt{\frac{3}{2}}\frac{1}{8} \;=\; \frac{14}{15}\;+\;\frac{13}{24}\sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

(δ) Το ζητούμενο έργο δίνεται από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα β′ είδους :

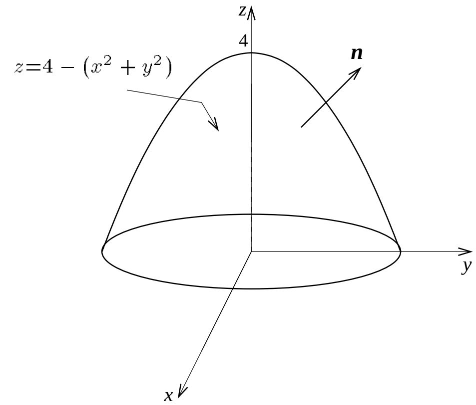
$$\begin{aligned}
W \;&=\; \int_{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{s} \;=\; \int_0^1 \mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t))\cdot\boldsymbol{\sigma}'(t)\,dt \\
&=\; \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}t^5,\; t^4,\; \sqrt{\frac{3}{2}}t^3\right)\cdot(1,\;\sqrt{6}t,\;3t^2)\,dt \\
&=\; \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}+3\sqrt{\frac{3}{2}}\right)\;t^5\,dt \;=\; \left(4\sqrt{\frac{3}{2}}+\sqrt{6}\right)\;\frac{1}{6} \;=\; \sqrt{\frac{3}{2}}
\end{aligned}$$

Πρόβλημα 3.

Έστω S η επιφάνεια παραβολοειδούς, η οποία ορίζεται από την

$$z = 4 - (x^2 + y^2) \quad \mu\varepsilon \quad 0 \le z \le 4 ,$$

και είναι **προσανατολισμένη** έτσι ώστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να δείχνει προς τα πάνω, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Δείξτε ότι η παραμετρικοποίηση

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = (u\,\cos v,\ u\,\sin v,\ 4-u^2) \quad \mu\varepsilon \quad 0 \le u \le 2\,, \quad 0 \le v \le 2\pi\,,$$

διατηρεί τον προσανατολισμό. **10μ.**

(β) Βρείτε την εξίσωση του **εφαπτόμενου επιπέδου** στο σημείο $(1,1,2)$. **10μ.**

(γ) Υπολογίστε το εμβαδόν $A(S)$ της S ως επιφανειακό ολοκλήρωμα. **10μ.**

(δ) Αν $f{=}x^2+y^2$ να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S f\, dS$$

10μ.

(ε) Να βρεθεί ο **ρυθμός ροής** του

$$\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

δια μέσου της S. **10μ.**

Βοηθητικά ολοκληρώματα:

$$\int u\,\sqrt{1+4u^2}\,du = \frac{1}{12}(1+4u^2)^{3/2}$$

$$\int u^3\,\sqrt{1+4u^2}\,du = \frac{1}{240}\left[3\,(1+4u^2)^{5/2} - 5\,(1+4u^2)^{3/2}\right]$$

(α) Πρέπει να δείξουμε ότι το κάθετο διάνυσμα $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ δείχνει προς τα πάνω, ότι δηλαδή έχει θετική $\mathbf{k}$ συνιστώσα. Βρίσκουμε λοιπόν το $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$:

$$\mathbf{T}_u = \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j} - 2u\mathbf{k} \quad \text{και} \quad \mathbf{T}_v = -u\,\sin v\,\mathbf{i} + u\,\cos v\,\mathbf{j}$$

Έτσι

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = u\cos^2 v\,\mathbf{k} + u\,\sin^2 v\,\mathbf{k} + 2u^2\,\sin v\,\mathbf{j} + 2u^2\,\cos v\,\mathbf{i} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 2u^2\cos v\,\mathbf{i} + 2u^2\sin v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}$$

Επειδή $u \ge 0$, το $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ δείχνει προς τα πάνω. Άρα η παραμετρικοποίηση διατηρεί τον προσανατολισμό.

(β) Παρατηρούμε ότι

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = u\,(2u\cos v\mathbf{i} + 2u\sin v\mathbf{j} + \mathbf{k}) = u\,(2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + \mathbf{k})\,.$$

Άρα ένα κάθετο διάνυσμα στο $(1,1,2)$ είναι το

$$\mathbf{n}' = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}\,.$$

Η εξίσωση του εφαπτόμενου επιπέδου δίνεται γενικά από την

$$n_1\,(x-x_0) + n_2\,(y-y_0) + n_3\,(z-z_0) = 0 \quad \Longrightarrow$$

$$2\,(x-1) + 2\,(y-1) + 1\,(z-2) = 0 \quad \Longrightarrow \quad 2x + 2y + z - 6 = 0\,.$$

(γ) Βρίσκουμε πρώτα τη νόρμα του $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$:

$$||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v|| = u\,\sqrt{4u^2\cos^2 v + 4u^2\sin^2 v + 1} = u\,\sqrt{1+4u^2}\,.$$

Για το εμβαδόν της επιφάνειας ισχύει:

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_{\mathbf{\Phi}} dS = \int_D ||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v||\,du dv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 u\,\sqrt{1+4u^2}\,du dv \\ &= 2\pi\,\left[\frac{1}{12}(1+4u^2)^{3/2}\right]_0^2 = \frac{\pi}{6}\,(17\sqrt{17} - 1) \end{aligned}$$

(δ)

$$\begin{aligned} \int_S f\,dS &= \int_D f(\mathbf{\Phi}(u,v))\,||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v||\,du dv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 u^2\,u\,\sqrt{1+4u^2}\,du dv \\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^2 u^3\,\sqrt{1+4u^2}\,du dv \\ &= 2\pi\,\left[\frac{1}{240}\left[3\,(1+4u^2)^{5/2} - 5\,(1+4u^2)^{3/2}\right]\right]_0^2 = \frac{\pi}{120}\,(782\sqrt{17} + 2) \end{aligned}$$

(ε) Ο ρυθμός ροής του $\mathbf{F}$ δια μέσου της S είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_D \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v))\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,du dv = \int_0^{2\pi}\int_0^2 \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v))\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,du dv\,.$$

Επειδή τώρα

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v)) = u\sin v\mathbf{i} - u\cos v\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) &= (u\sin v\mathbf{i} - u\cos v\mathbf{j} + 3\mathbf{k})\cdot(2u^2\cos v\,\mathbf{i} + 2u^2\sin v\,\mathbf{j} + u\mathbf{k}) \\ &= 2u^3\sin v\cos v - 2u^3\sin v\cos v + 3u = 3u \end{aligned}$$

Άρα λοιπόν

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \int_0^{2\pi}\int_0^2 3u\,du dv = 6\pi\,\left[\frac{u^2}{2}\right]_0^2 = 12\pi\,.$$