ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 6 Οκτωβρίου 2004 (♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:
(α) **Γράφημα** συνάρτησης $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$. **5μ.**
(β) **Παραγωγίσιμη** συνάρτηση $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. **5μ.**
(γ) C^1 **συνάρτηση** $f : U \subset \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$. **5μ.**

(α) Ορίζουμε ως **γράφημα** της $f : U \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ το υποσύνολο του $\mathbf{R}^{n+1}$ που αποτελείται από όλα τα σημεία

$$(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n))$$

στον $\mathbf{R}^{n+1}$ με $(x_1, \cdots, x_n)$ στο U. Συμβολικά,

$$\Gamma_f = \left\{(x_1, \cdots, x_n, f(x_1, \cdots, x_n)) \in \mathbf{R}^{n+1} \mid (x_1, \cdots, x_n) \in U\right\}$$

(β) Λέμε ότι η $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ είναι **παραγωγίσιμη** στο (x_0, y_0) αν υπάρχουν οι πρώτες μερικές της παράγωγοι, $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ και $\dfrac{\partial f}{\partial y}$, στο (x_0, y_0) και

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} \frac{f(x,y) - f(x_0,y_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0)\right](x - x_0) - \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0)\right](y - y_0)}{||(x,y) - (x_0,y_0)||} = 0\,.$$

(γ) Λέμε ότι η συνάρτηση f ειναι της κλάσης C^1 αν οι πρώτες μερικές παράγωγοί της υπάρχουν και είναι συνεχείς.

Πρόβλημα 2.

(α) Βρείτε την εξίσωση του επιπέδου που έχει κάθετο το διάνυσμα

$$\mathbf{v} = (1,\ 2,\ 3)$$

και περνά από το σημείο $(1, -2, 0)$. **15μ.**

(β) Βρείτε το εμβαδόν του παραλληλογράμμου που σχηματίζεται από τα διανύσματα

$$\mathbf{a} = (1,\ -2,\ 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{b} = (-1,\ 2,\ 2)$$

10μ.

(α)

Από τον τύπο

$$A\,(x - x_0) + B\,(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$$

έχουμε

$$1\,(x-1) + 2\,(y+2) + 3(z-0) = 0 \quad \Longrightarrow \quad x + 2y + 3z + 3 = 0\,.$$

(β)

1ος τρόπος

Για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισχύει:

$$E = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}||\,. \tag{i}$$

Βρίσκουμε λοιπόν το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & -2 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \end{vmatrix} = -4\,\mathbf{i} - 2\mathbf{j}\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε

$$E = ||\mathbf{a} \times \mathbf{b}|| = \sqrt{16+4} = 2\sqrt{5}\,.$$

2ος τρόπος

Για το εμβαδόν του παραλληλογράμμου ισχύει επίσης:

$$E = ||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||\,\sin\theta\,, \tag{ii}$$

όπου θ η γωνία μεταξύ των $\mathbf{a}$ και $\mathbf{b}$ για την οποία ισχύει:

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}{||\mathbf{a}||\,||\mathbf{b}||}\,.$$

Έχουμε τώρα:

$$||\mathbf{a}|| = \sqrt{1+4+0} = \sqrt{5}$$

$$||\mathbf{b}|| = \sqrt{1+4+4} = 3$$

$$\cos\theta = \frac{-5}{3\sqrt{5}} = -\frac{\sqrt{5}}{3} \quad \Longrightarrow \quad \sin\theta = \sqrt{1-\frac{5}{9}} = \frac{2}{3}$$

Αντικαθιστώντας στην (ii) παίρνουμε

$$E = \sqrt{5}\,3\,\frac{2}{3} = 2\sqrt{5}\,.$$

Πρόβλημα 3.

(α) Βρείτε τον **πίνακα των μερικών παραγώγων** της συνάρτησης $\mathbf{f} : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ με τύπο:

$$\mathbf{f}(x, y, z) = \left(x + y^2\, e^{z^3},\ xy^2 z^3\right) .$$

20μ.

(β) Βρείτε την **κλίση** της συνάρτησης

$$f(x, y, z) = x^4 + xze^y$$

στο σημείο $(1,\ 0,\ -3)$. **15μ.**

(α)

$$D\mathbf{f} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x} & \dfrac{\partial f_1}{\partial y} & \dfrac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x} & \dfrac{\partial f_2}{\partial y} & \dfrac{\partial f_2}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2y\, e^{z^3} & 3z^2 y^2\, e^{z^3} \\ \\ y^2 z^3 & 2xyz^3 & 3xy^2 z^2 \end{bmatrix}$$

(β)

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}\right) = \left(4x^3 + ze^y,\ xze^y,\ xe^y\right) .$$

Άρα

$$\nabla f|_{(1,0,-3)} = (1,\ -3,\ 1) .$$

<u>Πρόβλημα 4.</u>
Αν

$$x = e^{\rho} \cos\phi \quad \text{και} \quad y = e^{\rho} \sin\phi$$

δείξτε ότι για την $f(x, y)$ ισχύουν οι

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{και} \quad \frac{\partial f}{\partial \phi} = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\frac{\partial f}{\partial y}$$

25μ.

Από τον κανόνα της αλυσίδας (2η ειδική περίπτωση) έχουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \rho} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \rho} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(e^{\rho}\,\cos\phi) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(e^{\rho}\,\sin\phi) = x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y}$$

Ομοίως βρίσκουμε

$$\frac{\partial f}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial \phi} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial \phi} = \frac{\partial f}{\partial x}\,(-e^{\rho}\,\sin\phi) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(e^{\rho}\,\cos\phi) = \frac{\partial f}{\partial x}\,(-y) + \frac{\partial f}{\partial y}\,(x) = -y\,\frac{\partial f}{\partial x} + x\,\frac{\partial f}{\partial y}$$