ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 15 Οκτωβρίου 2004 (♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.
Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Κατά κατεύθυνση παράγωγος**. **3μ.**
(β) **Διανυσματικό πεδίο**. **3μ.**
(γ) **Μήκος τόξου**. **3μ.**
(δ) **Στροβιλισμός**. **3μ.**
(ε) **Αρμονική συνάρτηση**. **3μ.**

(α) Η **κατά κατεύθυνση παράγωγος** της $f : U \subset \mathbf{R}^3 \longrightarrow \mathbf{R}$ στο $\mathbf{x}$ στην κατεύθυνση ενός δοσμένου διανύσματος $\mathbf{v}$ ορίζεται από την

$$\left.\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})\right|_{t=0}$$

(β) **Διανυσματικό πεδίο** (vector field) στον $\mathbf{R}^n$ είναι μια απεικόνιση της μορφής $\mathbf{F} : A \subset \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$.

(γ) Το **μήκος** μιας C^1 καμπύλης $\boldsymbol{\sigma} : [a,b] \to \mathbf{R}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \int_a^b \, ||\boldsymbol{\sigma}'(t)|| \, dt \,.$$

(δ) Έστω $\mathbf{F}{=}F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ ένα C^1 διανυσματικό πεδίο στον $\mathbf{R}^3$. Ο **στροβιλισμός** (vorticity) του $\mathbf{F}$ ορίζεται ως εξής:

$$curl\,\mathbf{F} \;=\; \nabla \times \mathbf{F} \;=\; \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} \,+\, \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} \,+\, \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

ή

$$\nabla \times \mathbf{F} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

(ε) Μια C^2 συνάρτηση f καλείται **αρμονική** (harmonic) αν ικανοποιεί την εξίσωση Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \,+\, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \,+\, \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \;=\; 0$$

ή

$$\nabla^2 f \;=\; 0\,.$$

Πρόβλημα 2.

(α) Έστω η συνάρτηση

$$f(x, y, z) \;=\; 3e^{-x^2} \;+\; e^{-3y^2} \;+\; xyz^2\,.$$

Υπολογίστε τον **ρυθμό μεταβολής** της f στη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{v}$=$(1, -1, 1)$ στο σημείο $(0, 1, 0)$. **10μ.**

(β) Να δειχθεί η πρόταση: Για κάθε C^2 συνάρτηση f ισχύει $\nabla \times (\nabla f)$=$\mathbf{0}$. **5μ.**

(γ) Να δειχθεί η πρόταση: Για κάθε C^2 διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ ισχύει $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F})$=0. **5μ.**

(α) Χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x} \;+\; t\mathbf{v})\bigg|_{(0,1,1)} \;=\; \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}\,.$$

χρησιμοποιώντας αντί του $\mathbf{v}$ το αντίστοιχο κανονικοποιημένο διάνυσμα:

$$\mathbf{v} \;=\; \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\, -\frac{1}{\sqrt{3}},\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\,.$$

Επειδή

$$\nabla f \;=\; \left(-6xe^{-x^2} + yz^2,\; -6ye^{-3y^2} + xz^2,\; 2xyz\right)\,,$$

στο $(0, 1, 0)$ είναι

$$\nabla f \;=\; (0,\; -6e^{-3}, 0)\,.$$

Άρα

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}|_{(0,1,0)} \;=\; (0,\; -6e^{-3}, 0) \cdot \left(\frac{1}{\sqrt{3}},\, -\frac{1}{\sqrt{3}},\, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \;=\; \frac{6e^{-3}}{\sqrt{3}} \;=\; 2\sqrt{3}\, e^{-3}\,.$$

(β) Αφού

$$\nabla f \;=\; \left(\frac{\partial f}{\partial x},\, \frac{\partial f}{\partial y},\, \frac{\partial f}{\partial z}\right)\,,$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla \times \nabla f \;&=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} \\
&=\; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}\right)\mathbf{i} \;+\; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}\right)\mathbf{j} \;+\; \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}\right)\mathbf{k} \;=\; \mathbf{0}
\end{aligned}$$

λόγω της ισότητας των μεικτών παραγώγων.

(γ) Επειδή

$$\nabla \times \mathbf{F} \;=\; \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i} \;+\; \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j} \;+\; \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) \;&=\; \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right) \;+\; \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right) \;+\; \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) \\
&=\; \frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} \;-\; \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \;+\; \frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} \;-\; \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} \;+\; \frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} \;-\; \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \;=\; 0
\end{aligned}$$

λόγω της ισότητας των μεικτών παραγώγων.

Πρόβλημα 3.
Δίνεται η καμπύλη

$$\boldsymbol{\sigma}(t) \;=\; \left(\frac{1}{2}t^2,\; -\frac{2\sqrt{2}}{3}t^{3/2},\; t\right)\;, \qquad t \in [0,2]$$

(α) Βρείτε τα **άκρα** της καμπύλης. **2μ.**
(β) Βρείτε το διάνυσμα της **ταχύτητας** $\mathbf{u}(t)$ και το διάνυσμα της **επιτάχυνσης** $\mathbf{a}(t)$. **8μ.**
(γ) Υπολογίστε το **μήκος** της καμπύλης. **10μ.**

(α) Βρίσκουμε τα $\boldsymbol{\sigma}(0)$ και $\boldsymbol{\sigma}(2)$:

$$\boldsymbol{\sigma}(0) \;=\; (0,\;0,\;0)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(2) \;=\; \left(2,\; -\frac{8}{3},\; 2\right)$$

(β) Για την ταχύτητα και την επιτάχυνση έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathbf{u}(t) &= \boldsymbol{\sigma}'(t) \;=\; (t,\; -\sqrt{2}\,\sqrt{t},\; 1) \\ \mathbf{a}(t) &= \mathbf{u}'(t) \;=\; \left(1,\; -\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{t}},\; 0\right) \end{aligned}$$

(γ) Επειδή

$$||\boldsymbol{\sigma}'(t)|| \;=\; ||\mathbf{v}(t)|| \;=\; \sqrt{t^2 \,+\, 2t \,+\, 1} \;=\; t \,+\, 1$$

έχουμε για το μήκος τόξου από το t=0 στο t=2:

$$\ell(\boldsymbol{\sigma}) \;=\; \int_0^2 ||\boldsymbol{\sigma}'(t)||\,dt \;=\; \int_0^2 (t+1)\,dt \;=\; \left[\frac{t^2}{2} \,+\, t\right]_0^2 \;=\; 4$$

Πρόβλημα 4.
Έστω τα πεδία

$$f(x,y,z) \;=\; x^2 y \qquad \text{και} \qquad \mathbf{F}(x,y,z) \;=\; 2xz^2\,\mathbf{i} + \mathbf{j} + y^3 zx\,\mathbf{k}\,.$$

Υπολογίστε τα πιο κάτω:

(α) ∇f **4μ.**

(β) $\nabla \times \mathbf{F}$ **4μ.**

(γ) $\nabla \cdot \mathbf{F}$ **4μ.**

(δ) $\mathbf{F} \cdot \nabla f$ **4μ.**

(ε) $\mathbf{F} \times \nabla f$ **4μ.**

(α)

$$\nabla f \;=\; (2xy,\; x^2,\; 0)$$

(β)

$$\nabla \times \mathbf{F} \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & 1 & y^3 zx \end{vmatrix} \;=\; 3y^2 zx\,\mathbf{i} \;+\; (4xz - y^3 z)\,\mathbf{j}$$

(γ)

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \;=\; \frac{\partial}{\partial x}(2xz^2) \;+\; \frac{\partial}{\partial y}(1) \;+\; \frac{\partial}{\partial z}(y^3 zx) \;=\; 2z^2 \;+\; y^3 x$$

(δ)

$$\mathbf{F} \cdot \nabla f \;=\; \left(2xz^2,\; 1,\; y^3 zx\right) \cdot (2xy,\; x^2,\; 0) \;=\; 4x^2 y z^2 \;+\; x^2$$

(ε)

$$\mathbf{F} \times \nabla f \;=\; \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2xz^2 & 1 & y^3 zx \\ 2xy & x^2 & 0 \end{vmatrix} \;=\; -x^3 y^3 z\,\mathbf{i} \;+\; 2x^2 y^4 z\,\mathbf{j} \;+\; 2x\,(x^2 z^2 - y)\,\mathbf{k}$$

Πρόβλημα 5.
(α) Να δειχθεί η ταυτότητα

$$\nabla \cdot (f\mathbf{F}) \;=\; \mathbf{F} \cdot \nabla f \;+\; f\,\nabla \cdot \mathbf{F}$$

όπου το f είναι C^1 βαθμωτό πεδίο και το $\mathbf{F}$ είναι C^1 διανυσματικό πεδίο. **10μ.**
(β) Η **δύναμη** που ασκείται στη μονάδα μάζας στο πεδίο της γήινης βαρύτητας σε σημείο με διάνυσμα θέσης

$$\mathbf{r} \;=\; x\,\mathbf{i} \;+\; y\,\mathbf{j} \;+\; z\,\mathbf{k}$$

ως προς το κέντρο της Γης δίνεται από την

$$\mathbf{F} \;=\; -\frac{GM}{r^3}\,\mathbf{r}$$

όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, M η μάζα της Γης και

$$r \;=\; ||\mathbf{r}||$$

Δείξτε ότι το διανυσματικό πεδίο $\mathbf{F}$ είναι **ασυμπίεστο**. **15μ.**

(α) Θέτοντας

$$\mathbf{F} \;=\; F_1\mathbf{i} \;+\; F_2\mathbf{j} \;+\; F_3\mathbf{k}$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (fF) &= \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) \;+\; \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) \;+\; \frac{\partial}{\partial z}(fF_3) \\
&= \frac{\partial f}{\partial x}F_1 \;+\; f\frac{\partial F_1}{\partial x} \;+\; \frac{\partial f}{\partial y}F_2 \;+\; f\frac{\partial F_2}{\partial y} \;+\; \frac{\partial f}{\partial z}F_3 \;+\; f\frac{\partial F_3}{\partial z} \\
&= \left(F_1\frac{\partial f}{\partial x} \;+\; F_2\frac{\partial f}{\partial y} \;+\; F_3\frac{\partial f}{\partial z}\right) \;+\; f\,\left(\frac{\partial F_1}{\partial x} \;+\; \frac{\partial F_2}{\partial y} \;+\; \frac{\partial F_3}{\partial z}\right) \\
&= \mathbf{F} \cdot \nabla f \;+\; f\,\nabla \cdot \mathbf{F}
\end{aligned}$$

(β) Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα που αποδείξαμε στο (α) έχουμε:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \;=\; \mathbf{r} \cdot \nabla \left(-\frac{GM}{r^3}\right) \;-\; \frac{GM}{r^3}\,\nabla \cdot \mathbf{r}\,. \tag{i}$$

Επειδή

$$r \;=\; ||\mathbf{r}|| \;=\; \sqrt{x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2}$$

έχουμε

$$\nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) = \left(-\frac{3}{r^4}\,\frac{x}{\sqrt{x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2}},\, -\frac{3}{r^4}\,\frac{y}{\sqrt{x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2}},\, -\frac{3}{r^4}\,\frac{z}{\sqrt{x^2 \;+\; y^2 \;+\; z^2}}\right) = -\frac{3}{r^5}(x,y,z) = -\frac{3\mathbf{r}}{r^5}$$

Επιπλέον

$$\nabla \cdot \mathbf{r} \;=\; 1 \;+\; 1 \;+\; 1 \;=\; 3\,.$$

Αντικαθιστώντας στην (i) παίρνουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{F} \;=\; -GM\,\mathbf{r} \cdot \nabla\left(\frac{1}{r^3}\right) - \frac{3GM}{r^3} \;=\; 3GM\,\frac{\mathbf{r}\cdot\mathbf{r}}{r^5} \;-\; \frac{3GM}{r^3} \;=\; \frac{3GMr^2}{r^5} \;-\; \frac{3GM}{r^3} \;=\; 0\,.$$

Άρα το $\mathbf{F}$ είναι **ασυμπίεστο**.