ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΟΣ ΛΟΓΙΣΜΟΣ (ΜΑΣ181) - 1 Δεκεμβρίου 2004
(♡♡♡♡♡)

Όνομα: **ΑΠΤ:**

Πρόβλημα 1.

Διατυπώστε τους ορισμούς των πιο κάτω:

(α) **Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης.** 3μ.

(β) **Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης.** 3μ.

(γ) **Προσανατολισμένη επιφάνεια.** 2μ.

(δ) **Ρυθμός ροής** διανυσματικού πεδίου. 2μ.

(α) **Επιφανειακό ολοκλήρωμα βαθμωτής συνάρτησης**

Έστω η παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbf{R}^3$ και f βαθμωτό πεδίο ορισμένο στην $S{=}\mathbf{\Phi}(D)$. Το **επιφανειακό ολοκλήρωμα του f πάνω στην $\mathbf{\Phi}$** ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\mathbf{\Phi}} f\, dS \;=\; \int_D f\, ||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v||\, dudv$$

(β) **Επιφανειακό ολοκλήρωμα διανυσματικής συνάρτησης**

Έστω η παραμετρικοποιημένη επιφάνεια $\mathbf{\Phi} : D \to \mathbf{R}^3$ και $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην $S{=}\mathbf{\Phi}(D)$. Το **επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ πάνω στην $\mathbf{\Phi}$** ορίζεται ως εξής:

$$\int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\, dudv$$

(γ) **Προσανατολισμένη επιφάνεια**

Προσανατολισμένη επιφάνεια καλούμε μια δίπλευρη επιφάνεια S στην οποία έχουμε ορίσει τη μια πλευρά σαν **θετική** (ή **εξωτερική**) και την άλλη σαν **αρνητική** (ή **εσωτερική**) και έχουμε επιλέξει το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα $\mathbf{n}$ που δείχνει απομακρυνόμενο από τη θετική πλευρά της S.

(δ) **Ρυθμός ροής** διανυσματικού πεδίου

Έστω $\mathbf{F}$ διανυσματικό πεδίο ορισμένο στην προσανατολισμένη επιφάνεια S. Το επιφανειακό ολοκλήρωμα του $\mathbf{F}$ πάνω στην S,

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

καλείται **ρυθμός ροής του $\mathbf{F}$ διά μέσου της S.**

Πρόβλημα 2.
Να αποδειχθεί το θεώρημα:
Αν $\mathbf{F}$ είναι ένα συνεχές διανυσματικό πεδίο ορισμένο πάνω στην προσανατολισμένη επιφάνεια S, τότε

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

30μ.

Έστω $\mathbf{\Phi} : D \to S$ μια παραμετρικοποίηση της S που διατηρεί τον προσανατολισμό. Έχουμε τότε

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D \mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v)\,dudv$$

(χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος διανυσματικής συνάρτησης). Επειδή η $\mathbf{\Phi}$ διατηρεί τον προσανατολισμό

$$\mathbf{n} \;=\; \frac{\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v}{||\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v||}$$

και έτσι

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,||\mathbf{T}_u\times\mathbf{T}_v||\,dudv \;=\; \int_{\mathbf{\Phi}} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS \;=\; \int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

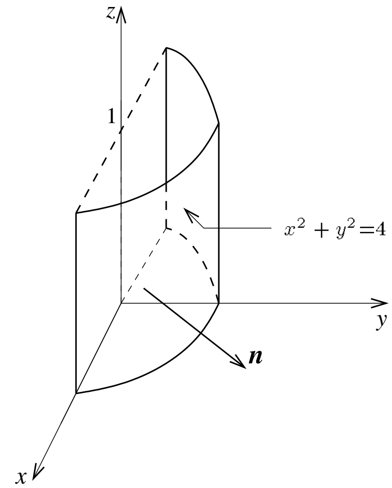
(χρησιμοποιήσαμε τον ορισμό του επιφανειακού ολοκληρώματος βαθμωτής συνάρτησης).

Πρόβλημα 3.

Έστω S η κυλινδρική επιφάνεια που ορίζεται από την

$$x^2 + y^2 = 4 \quad \text{με} \quad 0 \le z \le 1\,, \quad y \ge 0$$

και είναι **προσανατολισμένη** έτσι ώστε το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα να δείχνει προς τα έξω, όπως φαίνεται στο σχήμα.



(α) Δείξτε ότι η παραμετρικοποίηση

$$\mathbf{\Phi}(u,v) = (2\cos u,\, 2\sin u,\, v) \quad \text{με} \quad 0 \le u \le \pi\,, \quad 0 \le v \le 1\,,$$

διατηρεί τον προσανατολισμό. **10μ.**

(β) Αν $f = x^2 yz$ να υπολογιστεί το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S f\, dS$$

25μ.

(γ) Να βρεθεί ο **ρυθμός ροής** του

$$\mathbf{F} = 2y\,\mathbf{i} + (z+1)\,\mathbf{j} - x\,\mathbf{k}$$

διά μέσου της S. **25μ.**

(α) Πρέπει να δείξουμε ότι το $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ είναι ομόρροπο με το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα

$$\mathbf{n} = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2+y^2}} = (\cos u,\, \sin u,\, 0)$$

Επειδή

$$\mathbf{T}_u = (-2\sin u,\, 2\cos u,\, 0) \quad \text{και} \quad \mathbf{T}_v = (0,\, 0,\, 1)$$

βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -2\sin u\,\mathbf{i}\times\mathbf{k} + 2\cos u\,\mathbf{j}\times\mathbf{k} = 2\cos u\,\mathbf{i} + 2\sin u\,\mathbf{j} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = 2\,(\cos u,\, \sin u,\, 0) = 2\,\mathbf{n}\,.$$

Τα $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ και $\mathbf{n}$ είναι ομόρροπα. Άρα η παραμετρικοποίηση διατηρεί τον προσανατολισμό.

(β) Βρίσκουμε πρώτα τη νόρμα του $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$:

$$||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v|| = 2\sqrt{1+0} = 2$$

Για το επιφανειακό ολοκλήρωμα του f βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}\int_S f\, dS &= \int_D f(\mathbf{\Phi}(u,v))\, ||\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v||\, dudv = \int_0^\pi \int_0^1 [(4\cos^2 u)\,(2\sin u)\,v]\,2\,dvdu \\ &= 16\left[\int_0^\pi \cos^2 u\, \sin u\, du\right]\left[\int_0^1 v\, dv\right] = 8\left[-\frac{\cos^3 u}{3}\right]_0^\pi = \frac{16}{3}\end{aligned}$$

(γ) Ο ρυθμός ροής του $\mathbf{F}$ διά μέσου της S είναι το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} \;=\; \int_D \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v))\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,dudv \;=\; \int_0^{\pi}\int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v))\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)\,dudv\,.$$

Επειδή τώρα

$$\mathbf{F}(\mathbf{\Phi}(u,v)) \;=\; 4\sin u\,\mathbf{i} \;+\; (v+1)\,\mathbf{j} \;-\; 2\cos u\,\mathbf{k}$$

βρίσκουμε ότι

$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \;=\; 8\sin u\,\cos u \;+\; 2\,(v+1)\,\sin u$$

Άρα λοιπόν

$$\begin{aligned}\int_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} &= 2\int_0^{\pi}\int_0^1 \left[4\sin u\,\cos u \;+\; (v+1)\,\sin u\right]\,dvdu \\ &= 2\left\{\left[-\cos 2u\right]_0^{\pi} \;+\; \left[\frac{v^2}{2} \;+\; v\right]_0^1 \left[-\cos u\right]_0^{\pi}\right\} \;=\; 2\left(0 \;+\; \frac{3}{2}\,2\right) \;=\; 6\,.\end{aligned}$$