Εισαγωγή.

$\mathbb{R}^n$: ευκλείδιος χώρος

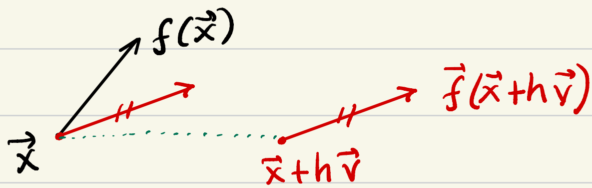
Έστω $\vec{f}(x_1,\dots,x_n): \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ διανυσματική συνάρτηση

π.χ. η ταχύτητα του ανέμου στο $\vec{x}$.

Μπορούμε να ορίσουμε την παράγωγο διαν. συναρτήσεων ως:

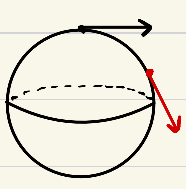
$$D_{\vec v}\vec f\Big|_{\vec x} = \lim_{h\to 0}\frac{\vec f(\vec x+h\vec v)-\vec f(\vec x)}{h}$$

Η διαφορά στον αριθμητή έχει νόημα, έστω κι αν τα διανύσματα βρίσκονται σε διαφορετικά σημεία!



Το $\vec f(\vec x+h\vec v)$ στο $\vec x+h\vec v$ "ταυτίζεται" (μέσω παράλληλης μετατόπισης) με ένα παράλληλο διαν. στο $\vec x$ για να πάρουμε τη διαφορά.

Γενίκευση του χώρου: Επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$: $S\subset\mathbb{R}^3$



- Περιγράφονται τοπικά με χάρτες

$\vec x: U\subset\mathbb{R}^2 \to V\cap S$ τ.ω. U, V ανοικτά

$\vec x$: διαφορίσιμος ομοιομορφισμός (παραμέτρηση)

και $d\vec x_q: \mathbb{R}^2 \to T_{\vec x(q)}S\subset\mathbb{R}^3$ 1-1

• Μπορεί να καλυφθεί με τέτοιους χάρτες (άτλαντας)

• Η μετάβαση από μια παραμέτριση σε άλλη $x_\beta^{-1} \circ x_\alpha$ είναι διαφορομορφισμός (στο κοινό π.ο.).

• Από την εποχή του Gauss υπήρχε η ανάγκη να δωθούν πιο γενικά σύνολα που δεν είναι απλά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.
→ <u>πολλαπλότητες</u>.

• <u>Γεωμετρία</u>: Μέτρηση αποστάσεων σε αυτούς μέσω μετρικής - δηλαδή <u>εσωτερικού γινομένου</u> - τ.ω. να βρίσκουμε μήκος καμπυλών $L(\gamma) = \int \langle \gamma', \gamma' \rangle^{1/2} dt$.

Ορισμός παραγώγου τ.ω. να "σέβεται" αυτές τις δομές.

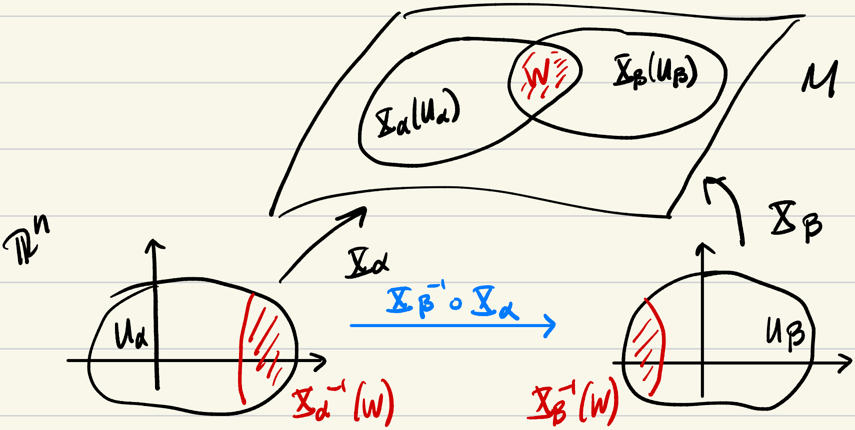
- Για καμπύλες $\gamma(t)$, χρειαζόμαστε $\gamma'(t)$ και εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων: $\langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle$.
- Για επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$: $\langle \, , \, \rangle$: το επαγόμενο από το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο/νόρμα.

Κεφ. 1 Διαφορίσιμες Πολλαπλότητες:

<u>Ορισμός.</u> Μια <u>διαφορίσιμη πολλαπλότητα</u> διάστασης n είναι ένα σύνολο M μαζί με μια συλλογή από χάρτες $X_\alpha : U_\alpha \subset \mathbb{R}^n \to M$ οι οποίοι είναι 1-1, με $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ ανοικτά τ.ω.

1. $\bigcup_\alpha X_\alpha(U_\alpha) = M$.
2. Για κάθε ζεύγος α, β με $X_\alpha(U_\alpha) \cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ τα σύνολα $X_\alpha^{-1}(W)$ και $X_\beta^{-1}(W)$ είναι ανοικτά στον $\mathbb{R}^n$ και οι απεικονίσεις $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha : X_\alpha^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n \to X_\beta^{-1}(W) \subset \mathbb{R}^n$ είναι διαφορίσιμες. ($\equiv C^\infty$ λείες)
3. Η συλλογή $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ είναι μέγιστη ως προς τις συνθήκες 1, 2.

Το ζεύγος (U_α, X_α) ονομάζεται παραμέτρηση ή σύστημα συντεταγμένων για τα σημεία $p \in X_\alpha(U_\alpha)$, και $X_\alpha(U_\alpha)$ γειτονιά του p.



<u>Παρατηρήσεις:</u> • $X_\beta^{-1} \circ X_\alpha$ είναι διαφορομορφισμός αφού το 2 πρέπει να ισχύει και για $X_\alpha^{-1} \circ X_\beta$. Όταν ισχύει το 2, οι X_α, X_β ονομάζονται συμβατές (compatible).

• Η συλλογή $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ ονομάζεται άτλαντας και η ιδιότητα 3 είναι για τεχνικούς λόγους. (υπάρχει η επέκταση τω. να είναι μέγιστη).

• Μια διαφορική δομή προσδίδει στην M και τοπολογία αν ορίσουμε ως ανοικτό υποσύνολο A κάθε υποσύνολο $A \subset M$ με την ιδιότητα $X_\alpha^{-1}(A \cap X_\alpha(U_\alpha))$ να είναι ανοικτό στον $\mathbb{R}^n$ $\forall \alpha$.

Παίρνουμε δηλαδή τις ιδιότητες: τυχαία ένωση ανοικτών είναι ανοικτό και πεπερασμένη τομή ανοικτών είναι ανοικτό.

Επίσης $X_\alpha(U_\alpha)$ ανοικτά και X_α συνεχής.

<u>Παραδείγματα:</u> ① $\mathbb{R}^n$ $X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $X = Id$. C^∞ πολλαπλότητα.
-και ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

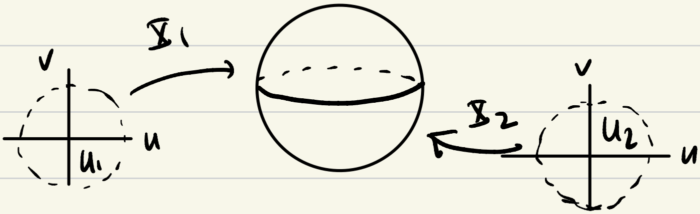
② Οι διαφορίσιμες επιφάνειες στον $\mathbb{R}^3$: S^2, T^2, ...

③ $S^2 = \{\vec{x}\in\mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\|=1\}$.

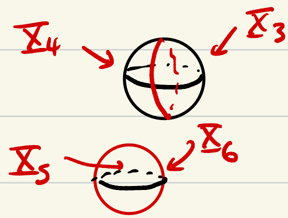
Ⓐ Πρώτη διαφορική δομή:

$\mathbf{x}_1(u,v) = (u,v,\sqrt{1-u^2-v^2})$ για $U_1=\{(u,v)\mid u^2+v^2<1\}$

$\mathbf{x}_2(u,v)=(u,v,-\sqrt{1-u^2-v^2})$ $\quad U_2=U_1$



- Δεν καλύπτουν



$\mathbf{x}_{3,4}(u,v) = (u, \pm\sqrt{1-u^2-v^2}, v)$ $\quad U_{3,4}=U_1$

$\mathbf{x}_{5,6}(u,v)=(\pm\sqrt{1-u^2-v^2}, u,v)$ $\quad U_{5,6}=U_1$

U_1 ανοικτό $U_1\subset\mathbb{R}^2$: S^2 διάστασης 2

Κάθε $\mathbf{x}_i$ είναι 1-1 $\quad \mathbf{x}_1(u_1,v_1)=\mathbf{x}_1(u_2,v_2)\Rightarrow(u_1,v_1)=(u_2,v_2)$

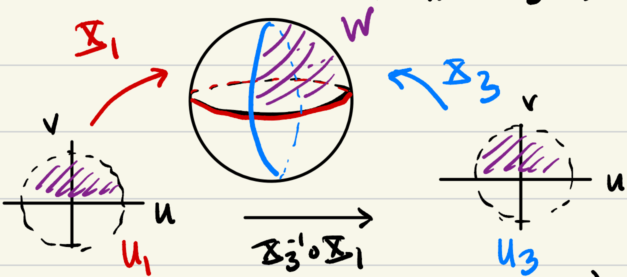
$\mathbf{x}_i^{-1}$ ορίζεται π.χ. $\mathbf{x}_1^{-1}=\pi|_{S^2}$ όπου $\pi(x,y,z)=(x,y)$.

$\{(U_i,\mathbf{x}_i)\}$ καλύπτει.

(Η τοπολογία που δίνουν στην S^2 είναι η επαγόμενη από $\mathbb{R}^3$)

Συμβατότητα $\quad \mathbf{x}_i(U_1)\cap \mathbf{x}_j(U_1)\neq \emptyset$ για 12 διαφορετικούς συνδυασμούς $\quad$ 1-3,4,5,6 , 2-3,4,5,6, 3-5,6, 4-5,6.

Ενδεικτικά: $W=\mathbf{x}_1(U_1)\cap \mathbf{x}_3(A)=\{(x,y,z)\mid x^2+y^2+z^2=1,\ y,z>0\}$



$\mathbf{x}_1^{-1}(W)=\{(u,v)\in A\mid v>0\}$

$\mathbf{x}_3^{-1}(W)=\{(u,v)\in A\mid v>0\}$

ανοικτά $\subset \mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x}_3^{-1}\circ\mathbf{x}_1(u,v)=\mathbf{x}_3^{-1}\left(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)=\left(u,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)=\left(\Phi_1(u,v),\Phi_2(u,v)\right)=\Phi(u,v)$$

ν.δ.ο 1-1: $\Phi(u_1,v_1)=\Phi(u_2,v_2)$

$\Rightarrow u_1=u_2$ και $v_1^2=v_2^2\Rightarrow v_1=v_2$ αφού $v_1,v_2>0$.

επί: Έστω $(w,z)\in U_3$ με $z>0$ ν.δ.ο. $\exists (u,v)$ με $v>0$ τ.ω.

$\Phi(u,v)=(w,z)\Leftrightarrow\left(u,\sqrt{1-u^2-v^2}\right)=(w,z)$: παίρνουμε $u=w$

και $z=\sqrt{1-u^2-v^2}\Rightarrow v^2=1-z^2-\underbrace{u^2}_{w}\Rightarrow v=\pm\sqrt{1-z^2-w^2}$

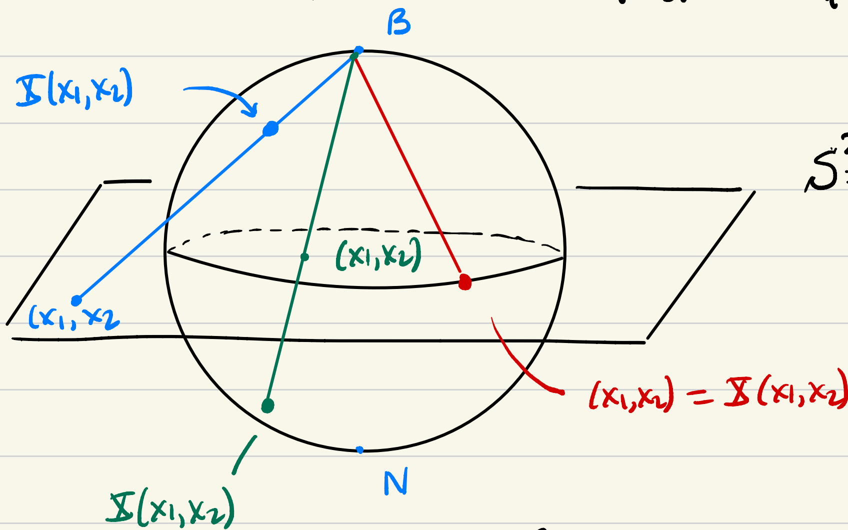
Άρα επιλέγουμε $v=\sqrt{1-z^2-w^2}>0$

Διαφορίσιμη ✓ αφού $u^2+v^2\neq 1$.

Παρατήρηση $\quad \det[D\Phi]\neq 0$: τοπικός διαφορομορφισμός.

-αλλά το Θ. Αντίστροφης δεν αρκεί για ν.δ.ο. διαφορομορφισμός στο π.ο.

Ⓑ 2ο μοντέλο / διαφορική δομή : Στερεογραφική προβολή.



$S^2 = \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^3 \mid \|\vec{x}\| = 1 \}$

$$\Sigma(x_1,x_2) = \Big(\underbrace{\frac{2x_1}{1+x_1^2+x_2^2}}_{a}, \underbrace{\frac{2x_2}{1+x_1^2+x_2^2}}_{b}, \underbrace{\frac{-1+x_1^2+x_2^2}{1+x_1^2+x_2^2}}_{c} \Big)$$

- $a^2+b^2+c^2 = 1 \quad \therefore \quad \Sigma : \mathbb{R}^2 \to S^2$

  Όταν $x_1^2+x_2^2 \to +\infty \qquad \Sigma(x_1,x_2) \to (0,0,1) = B$

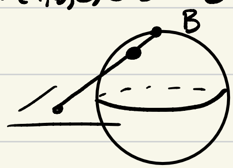
  $\Sigma(0,0) = (0,0,-1) = N.$

  Όταν $x_1^2+x_2^2 = 1 \qquad \Sigma(x_1,x_2) = (x_1,x_2,0)$

  ">1" $\to c > 0$ "<1" $\to c<0$

Μπορούμε να δείξουμε ότι για $(a,b,c) \in S^2 : a^2+b^2+c^2=1$ και $c \neq 1$: $\Sigma^{-1}(a,b,c) = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}\right)$ δηλαδή $\forall (a,b,c) \in S^2 \setminus B$

(Άσκηση $\Sigma \circ \Sigma^{-1} = Id|_{S^2 \setminus B} \qquad \Sigma^{-1} \circ \Sigma = Id|_{\mathbb{R}^2}$)



$\ell(t) = (0,0,1) + t[(a,b,c) - (0,0,1)]$: ευθεία

$\ell(t)$ περνά από επίπεδο $\Leftrightarrow \ell(t) = (x_1,x_2,0) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow t = \frac{-1}{1-c}$ και $(x_1,x_2) = \left(\frac{a}{1-c}, \frac{b}{1-c}\right)$

$\therefore \Phi$ 1-1 αφού Φ^{-1} ορίζεται

Παρόμοια $\Psi(y_1,y_2) = \left(\dfrac{2y_1}{1+y_1^2+y_2^2}, \dfrac{2y_2}{1+y_1^2+y_2^2}, \dfrac{1-y_1^2-y_2^2}{1+y_1^2+y_2^2}\right)$
είναι 1-1 από $\mathbb{R}^2$ στο $S^2 \setminus N$.

Άσκηση. Βρείτε $\Psi^{-1} \to \Psi$ 1-1 και επί
και $\Psi^{-1} \circ \Phi$, $\Phi^{-1} \circ \Psi$ διαφορομορφισμοί στην αντίστοιχη προεικόνα του $W = S^2 \setminus \{B, N\}$.

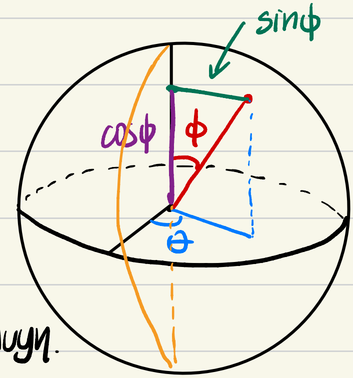
Παρατήρηση: Η S^2 μπορεί να καλυφθεί με 2 χάρτες.
- ο μικρότερος αριθμός, αφού $\nexists$ διαφορομορφισμός από τον $\mathbb{R}^2$ στην S^2 ($\mathbb{R}^2$ μη συμπαγής και S^2 συμπαγής)

Άσκηση: Ν.δ.ο. S^1 είναι διαφορίσιμη πολλά με διαφορική δομή που να δίνεται από 2 στερεογραφικές προβολές.

Ⓓ Σφαιρικές συντεταγμένες.

$\Phi(\theta,\phi) = (\sin\phi\cos\theta, \sin\phi\sin\theta, \cos\phi)$

$\theta \in (0, 2\pi)$, $\phi \in (0,\pi)$

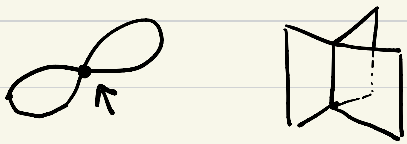


καλύπτει την S^2 εκτός από ημικύκλιο με $x>0$, $y=0$. Χρειάζονται 2 για κάλυψη.

④ Ο ορισμός αποκλείει σύνολα που περιέχουν "τμήμα του συνόρου" π.χ. $A \subset \mathbb{R}^n$ με $\mathrm{int}(A) \neq \emptyset$ και $\partial A \cap A \neq \emptyset$.

Επίσης σύνολα που δεν "μοιάζουν" τοπικά (δεν είναι ομοιομορφικά) με ανοικτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$

π.χ.



(φ: ομοιομορφισμός αν $\exists\, \phi^{-1}$ και ϕ, ϕ^{-1} συνεχείς).

⑤ Πραγματικός προβολικός χώρος $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ (real projective space).

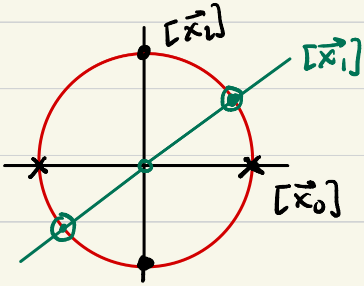
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \equiv \mathbb{RP}(n) := \{ \vec{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{\vec{0}\} \mid \vec{x} \sim \lambda \vec{x} \text{ για } \lambda \in \mathbb{R}\setminus\{0\} \}$$
$$\equiv \{ \vec{x} \in S^n \mid \vec{x} \sim -\vec{x} \}$$

$\sim$: σχέση ισοδυναμίας που σπάζει τον χώρο σε κλάσεις ισοδυναμίας

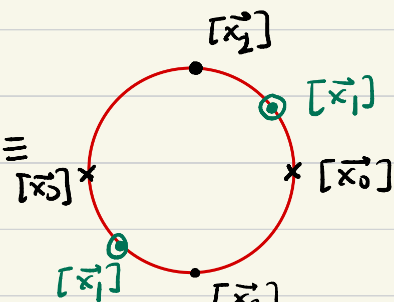
Στην ίδια κλάση με το $\vec{x}$ ανήκουν όλα τα σημεία της ευθείας που περνά από το $\vec{x}$ και το $\vec{0}$, εκτός το $\vec{0}$.

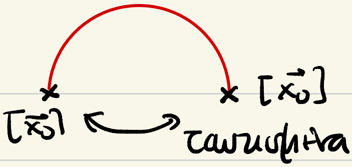
Αν περιορίσουμε στη σφαίρα ταυτίζονται τα αντίποδα σημεία.

$\mathbb{P}^1$

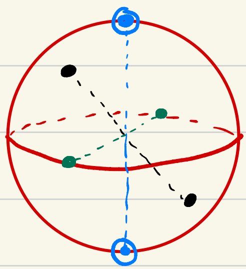
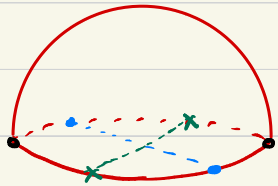


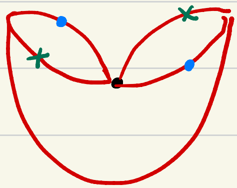
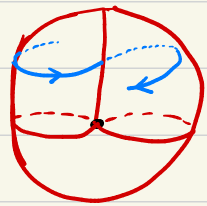
$\equiv$



$\equiv$ 

- ομοιόμορφική με S^1
1-διάστατη πολ/τα.

$\mathbb{P}^2$  $\equiv$ 

$\cong$
ομοιομορφικό
με  $\cong$ 

Μια μη-προσανατολισμένη επιφάνεια όπως την μπουκάλα του Klein.
2-διάστατος χώρος.

Διαφορική Δομή: Τα σημεία του $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ συμβολίζονται με
$[x_1, \dots, x_{n+1}]$ $(= [\lambda x_1, \dots, \lambda x_{n+1}]$ για $\lambda \neq 0)$

Αν $x_i \neq 0$ τότε $[x_1, \dots, x_n] = \left[\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right]$

Ορίζουμε $V_i = \{[x_1, \dots, x_{n+1}] \mid x_i \neq 0\}$ για $i = 1, \dots, n+1$
και χάρτη $\Phi_i : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$

$$(y_1, \dots, y_n) \longmapsto [y_1, \dots, y_{i-1}, 1, y_i, \dots, y_n]$$

Θ.δ.ο. $\{(\mathbb{R}^n, \Phi_i)\}_i$ είναι διαφορική δομή

- Καλύπτουν, αφού τουλάχιστον μια συντεταγμένη μη-μηδενική ✓
- 1-1 π.χ. $\Phi_1(\vec{y}) = \Phi_1(\vec{z}) \Leftrightarrow (1, y_1, \ldots, y_n) = (\lambda, \lambda z_1, \ldots, \lambda z_n)$ για $\lambda \neq 0$

  $\Leftrightarrow \lambda = 1$ και $y_i = z_i \ \forall i$

- Συμβατοί:

$$\Phi_i(\mathbb{R}^n) \cap \Phi_j(\mathbb{R}^n) = V_i \cap V_j = \{[x_1, \ldots, x_{n+1}] \mid x_i, x_j \neq 0\} = W$$

Τότε $\Phi_i^{-1}(W) = \Phi_i^{-1}\left\{\left[\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, 1, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right] \mid x_i, x_j \neq 0\right\}$

$$= \left\{\left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right) \mid x_i, x_j \neq 0, \ x_k \in \mathbb{R}\right\}$$

$$= \{(y_1, \ldots, y_n) \mid y_j \neq 0 \text{ αν } j<i \ (\text{ή } y_{j-1} \neq 0 \text{ αν } j>i)\}$$

ανάλογα αν $j<i$ ή $j>i$

$\therefore \Phi_i^{-1}(W)$ υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τ.ω. είτε η συντεταγμένη $x_j \neq 0$ είτε η $x_{j-1} \neq 0$ - αφαιρούμε επίπεδο.

$\therefore$ ανοικτό

Υποθέτουμε χ.β.τ.γ. $j>i$ και $(y_1, \ldots, y_n) \in \Phi_i^{-1}(W)$, άρα $y_{j-1} \neq 0$.

Τότε $\Phi_j^{-1} \circ \Phi_i(y_1, \ldots, y_n) = \Phi_j^{-1}([y_1, \ldots, y_{i-1}, 1, y_i, \ldots, y_n])$

$$= \left(\frac{y_1}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{y_{i-1}}{y_{j-1}}, \frac{1}{y_{j-1}}, \frac{y_i}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{y_{j-2}}{y_{j-1}}, \frac{y_j}{y_{j-1}}, \ldots, \frac{y_n}{y_{j-1}}\right)$$

↑ όπου θέση j το $y_{j-1} \neq 0$.

η οποία είναι διαφορίσιμη ως προς κάθε y_k αφού $y_{j-1} \neq 0$

Παρόμοια για $i<j$

$\therefore$ Συμβατοί $\therefore$ Διαφ. πολ/τα.

(L1-L2 τέλος).

Ασκήσεις • Να αποδειχθεί λεπτομερώς ότι $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ είναι διαφ. πολλ/τα.

3 γνωστές καλύψεις 

• Αν M_1^n, M_2^m διαφ. πολλ/τες ν.δ.ο. $M_1 \times M_2$ διαφ. πολλ/τα.

$\{X_\alpha, U_\alpha\}_\alpha$ για M_1 $\{Y_\beta, U_\alpha\}_\beta$ για M_2 ν.δ.ο. $\{Z_{\alpha,\beta}, U_\alpha \times U_\beta\}_{\alpha,\beta}$

με $Z_{\alpha\beta}(\vec{x},\vec{y}) = (X_\alpha(\vec{x}), X_\beta(\vec{y}))$ αντίστοιχα.

⑥ $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$: $m\times n$ πίνακες. Χάρτης $(X, \mathbb{R}^{m\cdot n})$

$$X(x_1, x_2, \ldots, x_{mn}) = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 & \cdots & x_n \\ x_{n+1} & x_{n+2} & \cdots & x_{2n} \\ \vdots & & & \\ x_{(m-1)n+1} & x_{(m-1)n+2} & \cdots & x_{mn} \end{bmatrix}$$

Είναι μια C^∞ πολλ/τα, διαφορομορφική με $\mathbb{R}^{m\cdot n}$

Καλύπτεται από 1 χάρτη συντεταγμένων.

⑦ $GL(n) := \{ A \in \mathcal{M}_{n\cdot n}(\mathbb{R}) \mid \det A \neq 0 \}$.

det: Μια συνεχής συνάρτηση από το $\mathcal{M}_{n\cdot n}$ στο $\mathbb{R}$ αφού πολυωνυμική ως προς τις συντεταγμένες του χώρου.

$A = \{y \in \mathbb{R} \mid y \neq 0\}$ ανοικτό, άρα $GL(n) = \det^{-1}(A)$ ανοικτό.

Έστω X όπως στο Παρ. ⑥. Τότε $\tilde{X} = X|_{X^{-1}(GL(n))}$ είναι χάρτης συντεταγμένων της $GL(n)$, που την καλύπτει.

⑧ $O(n) = \{ A \in GL(n) \mid AA^T = I \}$

Μπορούμε ν.δ.ο. είναι πολ/τα διάστασης $n(n-1)/2$

π.χ. $O(2) = \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \middle| \, \theta \in \mathbb{R} \right\}}_{I} \cup \underbrace{\left\{ \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{bmatrix} \middle| \, \theta \in \mathbb{R} \right\}}_{II}$

I: περιστροφή κατά γωνία θ γύρω από το $\vec{O}$ στον $\mathbb{R}^2$

II: ανάκλαση ως προς ευθεία γωνίας $\theta/2$

$O(2)$: δεν είναι συνεκτικό υποσύνολο του $GL(2)$. ($\det>0$ ή $\det<0$)

Κάλυψη με 4 χάρτες: $\theta \in (0, 2\pi)$ ή $\theta \in (-\pi, \pi)$ 2 χάρτες για κάθε συνεκτικό υποσύνολο.

Έχει διάσταση 1.