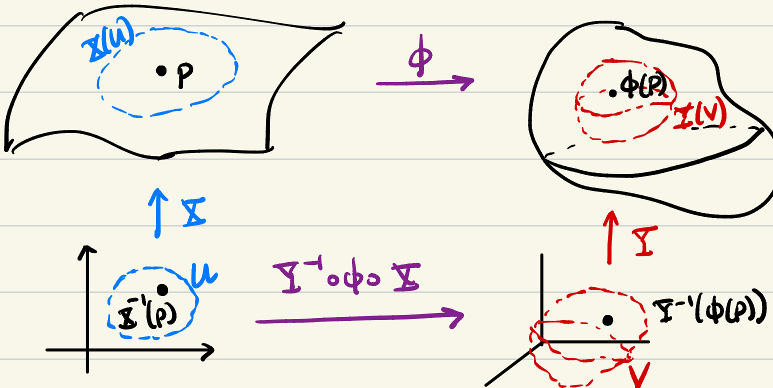
Απεικονίσεις Ανάμεσα σε 2 πολλ/τες.

Για $\vec{F}: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ C^∞ διαφορ. αν όλες οι μερικές παράγωγοι συνεχείς

Για $\phi: M_1^n \to M_2^m$ κοιτάζουμε τις παραγώγους στις συντεταγμένες στους $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ μέσω των χαρτών όπου μπορούμε να παραγωγίσουμε.

– Η ίδια ιδέα όπως στη διαφορική γεωμετρία.

Ορισμός (Διαφορίσιμη Απεικόνιση) Έστω M_1^n, M_2^m διαφ. πολλ/τες. Μια απεικόνιση $\phi: M_1^n \to M_2^m$ είναι διαφορίσιμη στο $p \in M_1$ αν για κάθε παραμέτρηση $\mathbf{Y}: V \subset \mathbb{R}^m \to M_2$ στο $\phi(p)$ υπάρχει μια παραμέτρηση $\mathbf{X}: U \subset \mathbb{R}^n \to M_1$ στο p (αν ισχύει $\forall$ παραμέτρηση στο p από ορισμό πολλ/τας λόγω συμβατότητας) τ.ω. $\phi(\mathbf{X}(U)) \subset \mathbf{Y}(V)$ και η απεικόνιση $\mathbf{Y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{X}: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ να είναι διαφορίσιμη στο $\mathbf{X}^{-1}(p)$. (C^∞ λεία).

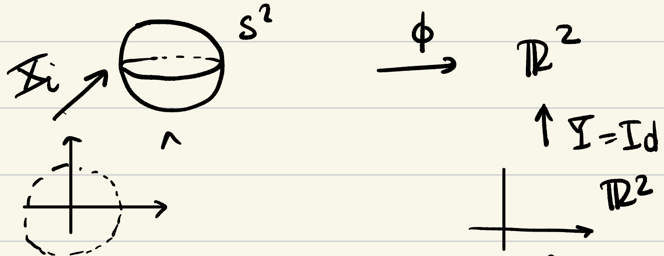


Η ϕ είναι διαφορίσιμη σε ένα ανοικτό υποσύνολο της M_1, αν είναι διαφορίσιμη σε κάθε σημείο του.

Η ϕ ταυτίζεται συνήθως με $X^{-1}\circ\phi\circ X$ ώστε
να γράφουμε $\phi(x_1,\dots,x_n) = (\phi_1(x_1,\dots,x_n), \dots, \phi_m(x_1,\dots,x_n))$
$= (y_1,\dots,y_m)$

$\vec{x} = (x_1,\dots,x_n)\in U$ $\quad$ $\vec{y} = (y_1,\dots,y_m)\in V$

<u>Παραδείγματα</u> ① Έστω $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ με $f(x,y,z)=(x,y)$.
Ορίζουμε $\phi: S^2\subset\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ως $\phi = f|_{S^2}$ ο περιορισμός της f στην σφαίρα.
Σε συντεταγμένες για την σφαίρα και τον $\mathbb{R}^2$:



X_i: χάρτες.

π.χ. για $X_1(u,v) = (u,v,\sqrt{1-u^2+v^2})$, $U=\{(u,v)\mid u^2+v^2<1\}$.
Τότε $X^{-1}\circ\phi\circ X_1(u,v) \equiv \phi(u,v) = X^{-1}\circ f(u,v,\sqrt{1-u^2-v^2}) =$
$= X^{-1}(u,v) = (u,v)$.
Παρόμοια $X^{-1}\circ\phi\circ X_2(u,v) = (u,v)$. } διαφορίσιμη στο U
$\therefore$ ϕ διαφορίσιμη στην $S^2\setminus\{\text{ισημερινό}\}$.

Αν χρησιμοποιούμε την $X_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u, v)$
$\phi(u,v) = X^{-1}\circ\phi\circ X_5(u,v) = (\sqrt{1-u^2-v^2}, u)$: Διαφ. στο U.
Παρόμοια $\forall i$ $\therefore$ ϕ διαφορίσιμη στην S^2. (όμως όχι 1-1).

② Έστω $f(x_1,x_2,x_3) = \left(\frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_2^2}{x_1^2+x_3^2} \right)$

$f: U \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με U τ.ω. οι παρονομαστές $\neq 0$.

Παρατηρούμε ότι $\forall \lambda \neq 0$ $f(\lambda \vec{x}) = f(\vec{x})$.

Ορίζουμε λοιπόν $\phi: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}^2$

$$[x_1, x_2, x_3] \longmapsto \left(\frac{x_3^2}{x_1^2+x_2^2}, \frac{x_2^2}{x_1^2+x_3^2} \right)$$

ν.δ.ο. ϕ διαφ. στο $[2,0,4] = p$.

$p = [2,0,4] = [1,0,2]$. Χάρτης: $\Sigma(u,v) = [1,u,v]$ $U = \mathbb{R}^2$

Τότε $p = \Sigma(u_0,v_0)$ με $(u_0,v_0) = (0,2)$.

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) & \xrightarrow{\phi} & \mathbb{R}^2 \\ \uparrow \Sigma & & \uparrow Id = \Upsilon \\ \mathbb{R}^2 & & \mathbb{R}^2 \end{array}$$

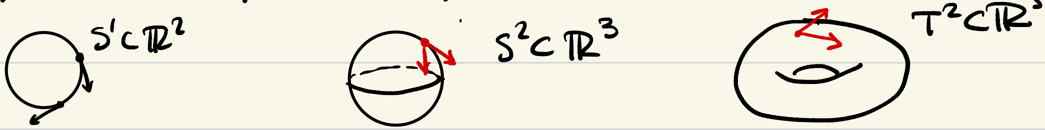
$$\Upsilon^{-1} \circ \phi \circ \Sigma(u,v) = \Upsilon^{-1} \circ \phi([1,u,v]) = \left(\frac{v^2}{1+u^2}, \frac{u^2}{1+v^2} \right)$$

Στο $(u_0,v_0) = (0,2)$ η $\Upsilon^{-1} \circ \phi \circ \Sigma$ είναι C^∞ αφού ο παρονομαστής $\neq 0$.

$$d\phi(u,v) = \begin{bmatrix} \partial\phi_1/\partial u & \partial\phi_1/\partial v \\ \partial\phi_2/\partial u & \partial\phi_2/\partial v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2uv^2/(1+u^2)^2 & 2v/(1+u^2) \\ 2u/(1+v^2) & -2u^2v/(1+v^2)^2 \end{bmatrix}$$

$$d\phi(0,2) = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Εφαπτόμενα Διανύσματα : Ορίζονται έτσι κι αν δεν βλέπουμε την πολλ'τα ως υποσύνολο κάποιου $\mathbb{R}^m$



• Υπενθύμιση : Στη διαφορική γεωμετρία είχαμε χάρτες $X(u,v) = (x(u,v), y(u,v), z(u,v))$ για μια επιφάνεια S

Τα $\{X_u, X_v\}$ $X_u = (x_u, y_u, z_u)$ $X_v = (x_v, y_v, z_v)$ έδιναν βάση για όλα τα εφαπτόμενα διανύσματα σε κάποιο $p = X(u_0, v_0)$

T_pS : το εφ. επίπεδο $\equiv$ οι γραμμικοί συνδυασμοί των X_u, X_v

$\equiv$ οι ταχύτητες όλων των καμπυλών που περνούν από το p.

X_u: μεταβολή (ταχύτητα) της. $X(t, v_0) = \alpha_{v_0}(t)$

X_v: -"- -"- $X(u_0, t) = \alpha_{u_0}(t)$.

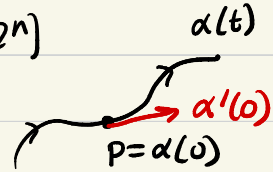
• Με αυτά παίρναμε την $I^η$ θεμελιώδη μορφή (μετρική) και την $II^η$ θεμελιώδη μορφή που έδινε καμπυλότητα κ.τ.λ.

<u>Ειδική Περίπτωση:</u> $\mathbb{R}^n = M$

Καμπύλες από σημείο p: $\vec{\alpha}(t) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))$ $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$

$$\vec{\alpha}(0) = p.$$

Τότε $\vec{\alpha}'(0) = (\alpha_1'(0), \dots, \alpha_n'(0)) = \vec{v} \in T_p M$ $(\in \mathbb{R}^n)$



Για $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ περιορίζουμε την f στην α:

$f(\alpha(t))$.

Τότε $\displaystyle \frac{d}{dt}(f(\alpha(t)))\Big|_{t=0} = \nabla f(\alpha(0)) \cdot \alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot \alpha_i'(0)$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) \cdot v_i = \nabla f(p) \cdot \vec{v} = D_v f(p)$$

: η κατευθυνόμενη παράγωγος της f στην κατεύθυνση v.

$$D_v f(p) = \nabla f(p) \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0}.$$

<u>Παρατήρηση:</u> $D_v f(p)$: εξαρτάται <u>μόνο</u> από $\vec{v}$ και <u>όχι</u> από την $\alpha(t)$, αρκεί $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = \vec{v}$.

Δηλαδή αν $\beta(t)$ καμπύλη με $\beta(0) = p$ και $\beta'(0) = v$

τότε $\displaystyle \frac{d}{dt}(f \circ \beta)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}(f \circ \alpha)\Big|_{t=0} = D_v f(p).$

- Αυτή είναι η κύρια ιδιότητα που θέλουμε να κρατήσουμε για τις κατευθυνόμενη παραγώγους συναρτήσεων σε πολλές

Έστω M μια διαφορίσιμη πολ/τα:

<u>Ορισμός:</u> Το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων στο σημείο p της M συμβολίζεται με $\mathcal{D} = T_p^0(M)$

• Υπενθύμιση

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ U\subset\mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathbf{X}"] \arrow[ur] \arrow[r, "f\circ\mathbf{X}"'] & \mathbb{R} \arrow[u, "Id"'] \end{tikzcd}$$

Διαφορίσιμη συνάρτηση $f\circ\mathbf{X}: U\subset\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι διαφορίσιμη

<u>Ορισμός:</u> Μια διαφορίσιμη συνάρτηση $\alpha: I\subset\mathbb{R} \to M$ με $I=(-\varepsilon,\varepsilon)$ ονομάζεται διαφορίσιμη καμπύλη στην πολ/τα M.

Η α είναι διαφορίσιμη στο $t\in I$ (από ορισμό διαφ. απεικόνισης) αν η $\mathbf{X}^{-1}\circ\alpha$ είναι διαφορίσιμη στο t

$$\begin{tikzcd} I\subset\mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr] & M \\ I\subset\mathbb{R} \arrow[u, "Id"] \arrow[r, "\mathbf{X}^{-1}\circ\alpha"'] & U\subset\mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathbf{X}"'] \end{tikzcd}$$

<u>Παρατήρηση:</u> $f\circ\alpha(t): I\subset\mathbb{R} \to \mathbb{R}$

$\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t)$ έχει νόημα όταν και οι δύο διαφορίσιμες:

$$\begin{tikzcd} I\subset\mathbb{R} \arrow[r, "\alpha"] \arrow[dr, "\mathbf{X}^{-1}\circ\alpha"'] & M \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ & U\subset\mathbb{R}^n \arrow[u, "\mathbf{X}"'] \arrow[ur, "f\circ\mathbf{X}"'] & \end{tikzcd}$$

$$\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)(t) = [D(f\circ\mathbf{X})]_{\alpha(t)} \cdot [D(\mathbf{X}^{-1}\circ\alpha)]_t$$

Άρα αν $p=\alpha(0)$ και $\mathbf{X}$ παραμέτρηση στο p:

$f\circ\mathbf{X}(x_1,\dots,x_n)$ $(\equiv f(x_1,\dots,x_n))$

και $\mathbf{X}^{-1}(\alpha(t)) = (x_1(t),\dots,x_n(t))$

Τότε $\frac{d}{dt}(f\circ\alpha)\Big|_{t=0} = \frac{d}{dt}\left(f\circ X\circ X^{-1}\circ\alpha\right)\Big|_{t=0} =$

$$= \frac{d}{dt}\left(f(x_1(t),\dots,x_n(t))\right)\Big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{n} x_i'(0)\,\frac{\partial f}{\partial x_i}\Big|_{X^{-1}(p)} = \sum_{i=1}^{n}\left(x_i'(0)\frac{\partial}{\partial x_i}\right)f$$

<u>Ορισμός.</u> Έστω M μια διαφ. πολ/τα και $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ μια διαφ. καμπύλη με $\alpha(0)=p\in M$.

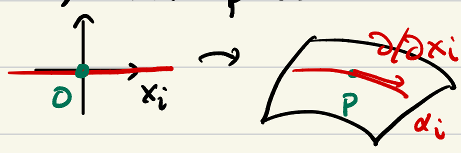
Το <u>εφαπτόμενο διάνυσμα</u> στην α στο $t=0$ που συμβολίζεται με $\alpha'(0)$ ορίζεται ως ο τελεστής $\alpha'(0): \mathcal{D}\to\mathbb{R}$ τ.ω.

$$\alpha'(0)f = \frac{d(f\circ\alpha)}{dt}\Big|_{t=0} \quad \text{για } f\in\mathcal{D}.$$

Ένα <u>εφαπτόμενο διάνυσμα στο p</u> είναι οποιοδήποτε εφαπτόμενο διάνυσμα στο $t=0$ μιας διαφορίσιμης καμπύλης $\alpha:(-\varepsilon,\varepsilon)\to M$ με $\alpha(0)=p$.

Το σύνολο των εφαπτόμενων διανυσμάτων στο p συμβολίζεται με T_pM.

Έστω $\alpha_i(t)\equiv X^{-1}\circ\alpha_i(t) = (0,\dots,\overset{i}{t},\dots 0)$ και p τ.ω. $p=X(0)$ (για απλοποίηση). Τότε η



Τότε $\alpha_i'(0)f = \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0 f$

Δηλαδή $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_0$ δίνει την μεταβολή μόνο στην κατεύθυνση x_i.

Από τα πιο πάνω φαίνεται ότι το εφαπτόμενο διάνυσμα στην α στο p εξαρτάται μόνο από την παράγωγο της α σε κάποιο σύστημα συντεταγμένων, και οποιοδήποτε $\alpha'(0) \in T_pM$ γράφεται ως:

$$\alpha'(0) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i'(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \leftarrow X^{-1}(p) \qquad (*)$$

Από $(*)$: T_pM είναι διανυσματικός χώρος διάστασης n.

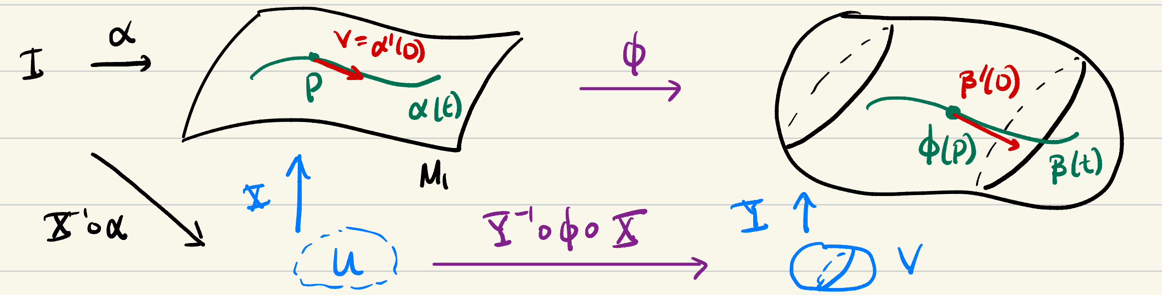
Μια παραμέτριση X δίνει και μια βάση $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}_{X^{-1}(p)}$ για το T_pM

Το T_pM ονομάζεται εφαπτόμενος χώρος της M στο p.

Διαφορικό απεικόνισης:

Ορισμός Έστω M_1^n, M_2^m διαφ. πολλ/τες και $\phi : M_1 \to M_2$ διαφ. απεικόνιση. Για κάθε $v \in T_pM_1$ επιλέγουμε διαφ. καμπύλη $\alpha : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M_1$ με $\alpha(0) = p$ και $\alpha'(0) = v$. Έστω $\beta(t) = \phi(\alpha(t))$ καμπύλη στην M_2.

Το διαφόρικο της ϕ στο p ορίζεται ως η απεικόνιση $d\phi_p : T_pM_1 \longrightarrow T_{\phi(p)}M_2$ που δίνεται από $d\phi_p(v) = \beta'(0)$.



<u>Πρόταση</u> Έστω M_1, M_2, ϕ όπως πιο πάνω. Η απεικόνιση $d\phi_p$ είναι γραμμική και δεν εξαρτάται από την καμπύλη α, αλλά μόνο από το v.

<u>Απόδειξη</u> Έστω $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ παραμετρίσεις των M_1, M_2 αντίστοιχα στα p, $\phi(p)$ αντίστοιχα.

$$\mathbf{X}^{-1}(\alpha(t)) = (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)) \in U$$

και
$$\mathbf{Y}^{-1}(\beta(t)) = (\beta_1(t), \dots, \beta_m(t)) =$$
$$= \mathbf{Y}^{-1}(\phi(\alpha(t))) = \mathbf{Y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{X} \circ \mathbf{X}^{-1}(\alpha(t)) =$$
$$= \underbrace{\mathbf{Y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{X}}\, (\underbrace{\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t)})$$

Σε συντεταγμένες: $\mathbf{Y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{X}(x_1, \dots, x_n) = (y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$

$$\therefore \frac{d}{dt}(\mathbf{Y}^{-1} \circ \beta(t))\Big|_{t=0} = (\beta_1'(0), \dots, \beta_m'(0)) = \underbrace{[D(\mathbf{Y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{X})]}_{m \times n}{}_{\phi(p)} \begin{bmatrix} \alpha_1'(0) \\ \vdots \\ \alpha_n'(0) \end{bmatrix}$$

$$= \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_i} \alpha_i'(0), \dots, \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial y_m}{\partial x_i} \alpha_i'(0) \right)$$

$$\therefore \beta'(0) = d\phi_p(v) = [D(\mathbf{Y}^{-1} \circ \phi \circ \mathbf{X})]_{\phi(p)} [\alpha'(0)].$$

$\therefore$ $d\phi_p$ γραμμική που εξαρτάται μόνο από το $v = \alpha'(0)$. $\square$

$d\phi_p(v)$ συμβολίζεται και ως $\phi_*(v)$

Παραδείγματα.

① Έστω $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ με $\phi(x,y,z) = (x^2+y^2,\ z-x^2) = (u,w)$

Έστω $v = (v_1, v_2, v_3) \in T_p\mathbb{R}^3$ $\quad v = v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \cdot \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$

$$d\phi_p(v) = \phi_*(v) = [D\Phi][v]$$

$\Phi = \Psi^{-1} \circ \phi \circ X$, $\Psi = Id|_{\mathbb{R}^2}$ $X = Id|_{\mathbb{R}^3}$, $[D\Phi] = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{bmatrix}$

$$\therefore d\phi_p(v) = \begin{bmatrix} 2x & 2y & 0 \\ -2x & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

$$= (2x v_1 + 2y v_2)\frac{\partial}{\partial u} + (-2x v_1 + v_3)\frac{\partial}{\partial w}$$

• Η $d\phi$ δεν είναι απαραίτητα 1-1 ούτε επί.

② $\phi: \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

$$[x,y,z] \longmapsto \left[\frac{x^2+y^2}{x^2+z^2}, \frac{y^2-z^2}{x^2+y^2}, \frac{2xy}{x^2+z^2}\right]$$

• Καλά ορισμένη αφού $\phi([\lambda \vec{x}]) = \phi([\vec{x}])$

Να υπολογιστεί $d\phi_p(w)$ ως προς κάποιους χάρτες συντεταγμένων στο $p = [0,1,1]$ για $w \in T_p(\mathbb{P}^2(\mathbb{R}))$

$\phi([0,1,1]) = [1,0,0]$, άρα παίρνουμε

$X_2(u,v) = [u,1,v]$ για p με $p = [0,1,1] = X_2(0,1)$

και $\mathbb{X}_1(r,s)=[1,0,0]$ για $\phi(p)$ με $\phi(p)=[1,0,0]=\mathbb{X}_1(0,0)$.

$$\begin{tikzcd} \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \arrow[r, "\phi"] & \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \\ (u,v) \arrow[u, "\mathbb{X}_2"] \arrow[r, "\Phi"] & (r,s) \arrow[u, "\mathbb{X}_1"'] \end{tikzcd} \qquad \Phi = \mathbb{X}_1^{-1}\circ\phi\circ\mathbb{X}_2$$

$$\therefore \Phi(u,v) = \mathbb{X}_1^{-1}\circ\phi\circ\mathbb{X}_2(u,v) = \mathbb{X}_1^{-1}\circ\phi\left([u,1,v]\right) =$$

$$= \mathbb{X}_1^{-1}\left(\left[\frac{u^2+1}{\underbrace{u^2+v^2}_{\neq 0 \text{ κοντά στο } (u_0,v_0)=(0,1)}}, \frac{1-v^2}{u^2+1}, \frac{2u}{u^2+v^2}\right]\right) \qquad (u_0,v_0)=(0,1).$$

$$= \mathbb{X}_1^{-1}\left(\left[1, \frac{(1-v^2)(u^2+v^2)}{(1+u^2)^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right]\right) = \left(\frac{(1-v^2)(u^2+v^2)}{(1+u^2)^2}, \frac{2u}{1+u^2}\right)$$

$$\therefore d\phi_p(w) = d\phi_p\left(a\frac{\partial}{\partial v} + b\frac{\partial}{\partial u}\right) = [D\Phi]_p \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} \dfrac{(1-v^2)\left[2u(1+u^2) - (u^2+v^2)\cdot 2u\right]}{(1+u^2)^3} & \dfrac{-2v(u^2+v^2)+(1-v^2)2v}{(1+u^2)^2} \\[2ex] \dfrac{2}{1+u^2} - \dfrac{2u\cdot 2u}{(1+u^2)^2} & 0 \end{bmatrix}_{(0,1)} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2a \end{bmatrix} = 2a\frac{\partial}{\partial s}$$

<u>Ορισμός</u> Έστω M_1, M_2 διαφ. πολ/τες. Μια απεικόνιση $\phi: M_1 \to M_2$ είναι <u>διαφορομορφισμός</u> αν είναι διαφορίσιμη, 1-1 και επί και η αντίστροφη ϕ^{-1} είναι διαφορίσιμη.
Η ϕ είναι <u>τοπικός διαφορομορφισμός</u> στο $p \in M_1$ αν υπάρχουν γειτονιές $U \ni p$ και $V \ni \phi(p)$ τ.ω. $\phi: U \to V$ να είναι διαφορομορφισμός.

<u>Παρατήρηση</u> Αν $\phi: M_1^n \to M_2^m$ είναι διαφορομορφισμός, τότε $d\phi_p : T_pM_1 \to T_{\phi(p)}T_2$ είναι ισομορφισμός, δηλαδή 1-1, επί και γραμμική. Άρα $n = m$.

<u>Θεώρημα</u>: Αν $\phi: M_1^n \to M_2^n$ είναι διαφορίσιμη απεικόνιση, και $d\phi_p: T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ είναι ισομορφισμός, τότε η ϕ είναι τοπικός διαφορομορφισμός στο p.

Απόδειξη: από το Θεώρημα αντιστρόφου συναρτήσεως στο $\mathbb{R}^n$.

<u>Ορισμός.</u> Η <u>διανυσματική δέσμη</u> μιας διαφ. πολλ/τας M ορίζεται ως $TM = \{(p,v) \mid p \in M \,,\, v \in T_pM\}$.

Η TM είναι επίσης διαφ. πολλ/τα διάστασης $2n$:

Αν $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}$ διαφορική δομή της M, τότε ορίζουμε

$$Y_\alpha : U_\alpha \times \mathbb{R}^n \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \longrightarrow TM$$

$$(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha, u_1, \dots, u_n) \longmapsto \left(X_\alpha(x_1^\alpha, \dots, x_n^\alpha), \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial}{\partial x_i^\alpha} \right)$$

(1) $\bigcup_\alpha Y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) = TM$

(2) Αν $(p,v) \in Y_\alpha(U_\alpha \times \mathbb{R}^n) \cap Y_\beta(U_\beta \times \mathbb{R}^n)$ τότε

$(p,v) = (X_\alpha(q_\alpha), dX_\alpha(v_\alpha)) = (X_\beta(q_\beta), dX_\beta(v_\beta))$ με $q_\alpha \in U_\alpha$, $q_\beta \in U_\beta$, $v_\alpha, v_\beta \in \mathbb{R}^n$.

$$\therefore \quad Y_\beta^{-1} \circ Y_\alpha(q_\alpha, v_\alpha) = Y_\beta^{-1}(X_\alpha(q_\alpha), dX_\alpha(v_\alpha)) =$$

$$= \Big(\underbrace{X_\beta^{-1} \circ X_\alpha}_{C^\infty}(q_\alpha), \big(\underbrace{d(X_\beta^{-1} \circ X_\alpha)}\big)(v_\alpha)\Big)$$

γραμμική απεικ. από το $\mathbb{R}^n$ στο $\mathbb{R}^n$ άρα C^∞ (παράγωγος ο ίδιος πίνακας)

$\therefore$ συμβατότητα χαρτών.

Είναι επίσης 1-1.

(3) Μέγιστος άτλαντας ✓.