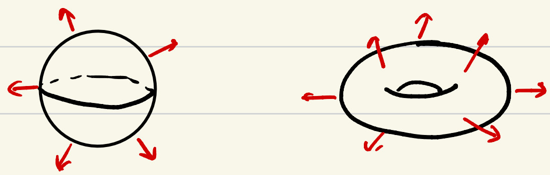
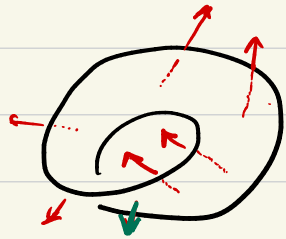
Προσανατολισμός πολλαπλοτήτων.

Για επιφάνειες $M^2 \subset \mathbb{R}^3$, η M είναι προσανατολισμένη αν υπάρχει μη-μηδενικό κάθετο διανυσματικό πεδίο $\vec{N}(p) \perp T_pM$ $\forall p \in M$.



Στην ταινία Moëbius (και το μπουκάλι του Klein) δεν υπάρχει



Σε γενική πολλ/τες δεν υπάρχει το κάθετο διαν. πεδίο πάντοτε.
Έχουμε όμως έναν ισοδύναμο ορισμό:

Ορισμός. Έστω M διαφορίσιμη πολλ/τα. Η M είναι προσανατολισμένη (προσανατολιζόμενη) αν επιδέχεται διαφορική δομή $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ τ.ω. $\forall \alpha,\beta$ με $X_\alpha(U_\alpha)\cap X_\beta(U_\beta) = W \neq \emptyset$ το διαφορικό της απεικόνισης $X_\beta^{-1}\circ X_\alpha$ να έχει θετική ορίζουσα. Δηλαδή

$$\det[D(X_\beta^{-1}\circ X_\alpha)] = \det\left[\frac{\partial y_j^\beta}{\partial x_i^\alpha}\right] > 0.$$

<u>Παράδειγμα</u>: Αν η M μπορεί να καλυφθεί με δύο γειτονιές U_1, U_2 έτσι ώστε $U_1 \cap U_2$ συνεκτικό υποσύνολο της M, τότε η M είναι προσανατολισμένη.

· Στο $U_1 \cap U_2$ $\det\left[\frac{\partial y_j^\beta}{\partial x_i^\alpha}\right] \neq 0$ αφού διαφ. πολλ/τα, και μπορούμε να κάνουμε αυτή την ορίζουσα θετική (αν δεν είναι ήδη) με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητών. π.χ. αλλάζοντας τη σειρά των μεταβλητών στην παραμέτριση

π.χ. αντί $\phi(r,\theta) = (\phi_1, \phi_2)$ ορίζουμε $\phi(\theta, r) = (\phi_1, \phi_2)$ → αλλάζουν θέση οι στήλες.

<u>Παρ.</u> S^n είναι προσανατολισμένη $\forall n$

$\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ προσανατολισμένη ανν n: περιττός.

Διανυσματικά πεδία και διαφορικές εξισώσεις σε πολλές.

Ορισμός Ένα <u>διανυσματικό πεδίο</u> (δ.π.) στην M, είναι μια απεικόνιση
$V: M \to TM$ τ.ω. $V(p) \in T_pM \ \forall p$.

Το δ.π. V ονομάζεται διαφορίσιμο αν η απεικόνιση V είναι διαφορίσιμη

- Αν $X: U \subset \mathbb{R}^n \to M$ παραμέτριση, τότε $\forall p \in U$
$$V(p) = \sum_{i=1}^{n} V_i(p) \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}, \quad \text{όπου} \quad V_i : U \to \mathbb{R}.$$

V διαφορίσιμο αν V_i διαφορίσιμες ως προς τις συντεταγμένες X,
($\Leftrightarrow$ ως προς κάθε παραμέτριση).

π.χ. $\mathbb{R}^n$: $V(x) = \sum_{i=1}^{n} V_i(x_1, \dots, x_n) \frac{\partial}{\partial x_i}$

S^2 : $V(x) = V_1(u,v) \frac{\partial}{\partial u} + V_2(u,v) \frac{\partial}{\partial v}$: σε καρτεσιανές

$= W_1(\theta,\phi) \frac{\partial}{\partial \theta} + W_2(\theta,\phi) \frac{\partial}{\partial \phi}$: σε σφαιρικές

- V_i διαφ. ως προς u,v $\Leftrightarrow$ W_i διαφ ως προς θ,ϕ στο κοινό π.ο.

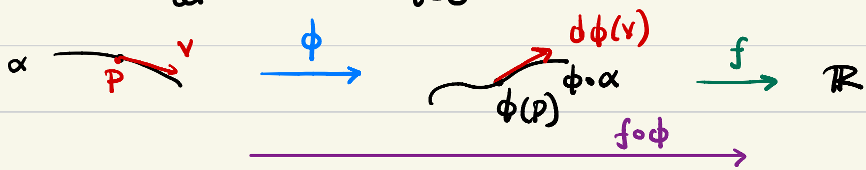
Εναλλακτικός ορισμός: Ένα δ.π. είναι ένας τελεστής $V: \mathcal{D} \to \mathcal{F}$
από το σύνολο των διαφορίσιμων συναρτήσεων $\mathcal{D}$ στην M, στο
σύνολο συναρτήσεων $\mathcal{F}$ στην M. με
$$(Vf)(p) = \sum_{i=1}^{n} V_i(p) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$
όπου η f είναι γραμμένη ως προς την παραμέτριση X.

- Ακριβώς όπως τα εφ. διαν. ταυτίζονται με κατευθυνόμενες παραγώγους.
- Μ.ν.δ.ο. Vf: δεν εξαρτάται από τον χάρτη συντεταγμένων

  V διαφορίσιμο αν $Vf \in \mathcal{D}$ $\forall f \in \mathcal{D}$.

<u>Παρατήρηση</u>: Έστω $\phi: M \to N$ διαφορομορφισμός, $v \in T_pM$ και f διαφορίσιμη σε γειτονιά του $\phi(p)$. Έστω $\alpha: (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$ διαφ. καμπύλη με $\alpha(0) = p$, $\alpha'(0) = v$. Τότε $d\phi(v) \in T_{\phi(p)}N$ και

$$(d\phi(v) f)(\phi(p)) = \frac{d}{dt}(f \circ \phi \circ \alpha)\Big|_{t=0} = v(f\circ\phi)(p)$$



Δηλαδή: $(d\phi(v) f)(\phi(p)) = v(f \circ \phi)(p)$

<u>Ορισμός</u>: Έστω ϕ μια διαφ. απεικόνιση ανάμεσα στις διαφ. πολ/τες M_1, M_2, $\phi: M_1^n \to M_2^m$.

Αν f μια διαφ. συνάρτηση στην M_2 τότε ορίζουμε $\phi^*(f) = f\circ\phi$ το "pull-back" της f η οποία είναι μια διαφ. απεικόνιση στην M_1 τ.ω. $\phi^*(f)(p) = f\circ\phi(p)$ $M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

Αν V λείο δ.π. στην M_1, ορίζουμε $\phi_*(V) = d\phi(V)$, το "push-forward" του V, που είναι ένα διαφ. δ.π. στην M_2 τ.ω.

$$\phi_*(V)(f)\big|_{\phi(p)} = V(f\circ\phi)(p) \quad \forall f \text{ διαφ. στην } M_2.$$

και $\phi_*(V_p)(f)\big|_{\phi(p)} = V_p(f\circ\phi)(p) = (d\phi(V_p) f)(\phi(p))$

$\phi_*: T_pM_1 \to T_{\phi(p)}M_2$ $\qquad M_1 \xrightarrow{\phi} M_2 \xrightarrow{f} \mathbb{R}$

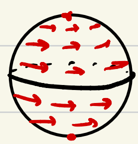
$\qquad\qquad v_p \qquad d\phi(v_p) = \phi_*(v_p)$

ϕ^* παίρνει συναρτήσεις στην M_2 σε συναρτήσεις στην M_1 - ομομορφισμός
ϕ_* παίρνει δ.π. στην M_1 σε δ.π. στην M_2 μέσω του διαφορικού της ϕ. $\phi_*(v_p) \in T_{\phi(p)}M_2$, αφού παραγωγίζει συναρτήσεις στην M_2.

<u>Ασκήσεις</u>: ① Αν $h = \phi \circ \psi$ $\quad \psi: M_1 \to M_2$, $\phi: M_2 \to M_3$ διαφ.
Να βρεθούν h_*, h^* ως προς ϕ, ψ.

② <u>Πρόταση</u>: Έστω $\phi: M \to N$ διαφορομορφισμός της M επί ανοικτού συνόλου της N. Τότε $\phi_*: T_pM \to T_{\phi(p)}N$ είναι ένας επί ισομορφισμός. $\qquad (\phi_*(v + \lambda w) = \phi_*(v) + \lambda \phi_*(w))$.

• <u>Πληροφοριακά</u>: (i) Στη σφαίρα S^2 δεν υπάρχει συνεχές δ.π. το οποίο να είναι παντού μη-μηδενικό. Δεν μπορείς να "κτενίσεις" τη σφαίρα χωρίς στροβίλους



(ii) Στην S^3 υπάρχουν ακριβώς 3 μη-μηδενικά δ.π. τα οποία είναι ορθοκανονικά στον $\mathbb{R}^4$ ως προς το ευκλείδιο εσωτερικό γινόμενο. Για $(x_1, x_2, x_3, x_4) \in S^3 \subset \mathbb{R}^4$

$$V_1 = -x_2\partial_1 + x_1\partial_2 + x_4\partial_3 - x_3\partial_4$$
$$V_2 = -x_3\partial_1 - x_4\partial_2 + x_1\partial_3 + x_2\partial_4$$
$$V_3 = -x_4\partial_1 + x_3\partial_2 - x_2\partial_3 + x_1\partial_4$$

Έστω f μια διαφορίσιμη συνάρτηση $f: M \to \mathbb{R}$
και X, Y διαν. πεδία στην M.
Ορίζουμε $V \cdot W(f) = V(W(f))$ και $WV(f) = W(V(f))$
Γενικά τα VW, WV δεν είναι διανυσματικά πεδία, αφού εμφανίζουν παραγώγους $2^{ης}$ τάξης, και γενικά $VW - WV \neq 0$.
Έχουμε όμως το ακόλουθο αποτέλεσμα:

<u>Λήμμα</u>: Έστω V, W διαφορίσιμα δ.π. σε διαφ. πολλαπλότητα M.
Τότε υπάρχει μοναδικό δ.π. Z τ.ω. $\forall f \in \mathcal{D}$ $Z(f) = (VW - W \cdot V)(f)$.

<u>Απόδειξη</u> Σε γειτονιά $(U, \bar{x})$ του $p \in M$, $V = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $W = \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{\partial}{\partial x_j}$
Για $f \in \mathcal{D}$

$$VW(f) = V\left(\sum_{j=1}^{n} W_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial}{\partial x_i}\left(W_j \frac{\partial f}{\partial x_j}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(V_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i} \cdot \frac{\partial f}{\partial x_j} + V_i W_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \right)$$

Παρόμοια:

$$WV(f) = W\left(\sum_{i=1}^{n} V_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) = \sum_{j=1}^{n} W_j \frac{\partial}{\partial x_j}\left(V_i \frac{\partial f}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \left(W_j \frac{\partial V_i}{\partial x_j} \frac{\partial f}{\partial x_i} + W_j V_i \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} \right)$$

Σε συντεταγμένες, $f(x_1, .., x_n) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ άρα $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ $\forall i, j$.

Άρα $$(VW-WV)(f) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left[V_i \frac{\partial W_j}{\partial x_i}\frac{\partial f}{\partial x_j} - W_j \overbrace{\frac{\partial V_i}{\partial x_j}\frac{\partial f}{\partial x_i}}^{i\leftrightarrow j}\right] =$$

$$= \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n}\left[V_i\frac{\partial W_j}{\partial x_i} - W_i\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right]\frac{\partial f}{\partial x_j} = \sum_{j=1}^{n}\left[\underbrace{\sum_{i=1}^{n}\left(V_i\frac{\partial W_j}{\partial x_i} - W_i\frac{\partial V_j}{\partial x_i}\right)}_{Z_j}\right]\frac{\partial f}{\partial x_j}$$

Το Z_j είναι διαφ. συνάρτηση για V, W διαφ.
και άρα $(VW-WV)(f) = Z(f)$ με $Z = \sum_{j=1}^{n} Z_j \frac{\partial}{\partial x_j}$
Άρα σε κάθε γειτονιά (X_α, U_α) παίρνουμε μοναδικό Z_α,
και άρα αν $X_\alpha(U_\alpha)\cap X_\beta(U_\beta)\neq\emptyset$ $Z_\alpha = Z_\beta$, άρα το Z επεκτείνεται σε όλη την M.

<u>Παράδειγμα.</u> Για $V = x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}$ $\quad W = y^2\frac{\partial}{\partial x} - xz\frac{\partial}{\partial y}$ στον $\mathbb{R}^3$

$$VW - WV = x\frac{\partial}{\partial x}\left(y^2\frac{\partial}{\partial x} - xz\frac{\partial}{\partial y}\right) + y\frac{\partial}{\partial z}\left(y^2\frac{\partial}{\partial x} - xz\frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$- y^2\frac{\partial}{\partial x}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) + xz\frac{\partial}{\partial y}\left(x\frac{\partial}{\partial x} + y\frac{\partial}{\partial z}\right) =$$

$$= x\left[0 + \cancel{y^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}} - z\frac{\partial}{\partial y} - \cancel{xz\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}}\right] + y\left[0 + \cancel{y^2\frac{\partial^2}{\partial z\partial x}} - x\frac{\partial}{\partial y} - \cancel{xz\frac{\partial^2}{\partial z\partial y}}\right]$$

$$- y^2\left[\frac{\partial}{\partial x} + \cancel{x\frac{\partial^2}{\partial x^2}} + 0 + \cancel{y\frac{\partial^2}{\partial x\partial z}}\right] + xz\left[0 + \cancel{x\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}} + \frac{\partial}{\partial z} + \cancel{y\frac{\partial^2}{\partial y\partial z}}\right]$$

$$= -y^2\frac{\partial}{\partial x} + \left[-xz - xy\right]\frac{\partial}{\partial y} + xz\frac{\partial}{\partial z}$$

<u>Ορισμός</u>: (i) Για διαφ. δ.π. V, W στην M ορίζουμε την <u>αγκύλη Lie</u> των V, W ως: $[V,W] = VW - WV$

(ii) Το σύνολο των διαφ. δ.π. στην M ορίζεται ως $\mathfrak{X}(M)$.

<u>Πρόταση</u> Έστω $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}$ και $a, b, c \in \mathbb{R}$. Τότε

(i) $[X,Y] = -[Y,X]$ - αντισυμμετρική ιδιότητα

(ii) $[aX+bY, Z] = a[X,Z] + b[Y,Z]$ - γραμμική στην $1^η$ θέση και από (i) άρα και στην $2^η$

(iii) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$ - ταυτότητα Jacobi

(iv) $[fX, gY] = f \cdot g[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$

$\mathfrak{X}(M)$ με την πράξη $[\,,\,]$ ονομάζεται άλγεβρα Lie λόγω των ιδιοτήτων (i)-(iii) (όχι (iv))

<u>Απόδειξη</u> (i), (ii) ✓

(iii) $AM = [XY - YX, Z] + [YZ - ZY, X] + [ZX - XZ, Y] =$

$= \cancel{XYZ} - \cancel{YXZ} - \cancel{ZXY} + \cancel{ZYX} + \cancel{YZX} - \cancel{ZYX} - \cancel{XYZ} + \cancel{XZY}$
$+ \cancel{ZXY} - \cancel{XZY} - \cancel{YZX} + \cancel{YXZ} = 0$

(iv) $[fX, gY] = fX(gY) - gY(fX) =$

$= fX(g)Y + fgXY - gY(f)X - gfYX = fg[X,Y] + fX(g)Y - gY(f)X$. □

<u>Παρατήρηση</u> • Αν X, Y δ.π. τα οποία είναι γραμμικοί συνδυασμοί των $\{\partial/\partial x_i\}$ με σταθερούς συντελεστές, δηλαδή $X = \sum_i b_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, $Y = \sum_j c_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ με $b_i, c_i \in \mathbb{R}$, τότε $[X, Y] = 0$.

• Επίσης $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \quad \forall i, j$ αφού

$$\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right](f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = 0$$

Διαφορικές Εξισώσεις σε πολλές

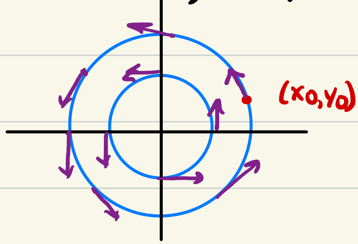
Στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε το εξής Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας:

Έστω $V(\vec{x}) = \left(v_1(\vec{x}), \dots, v_n(\vec{x})\right)$ C^∞ διαν. πεδίο, ανεξάρτητο από τον χρόνο t. Τότε $\forall p \in \mathbb{R}^n$ $\exists\, U \ni p$, $\delta > 0$ και διαφ. συνάρτηση $\vec{\psi}(t) = (\psi_1(t), \dots, \psi_n(t))$ τ.ω.
$$\frac{d\vec{\psi}}{dt} = \begin{bmatrix} \psi_1' \\ \vdots \\ \psi_n' \end{bmatrix} = V(\vec{\psi}(t)) = \begin{bmatrix} v_1(\vec{\psi}(t)) \\ \vdots \\ v_n(\vec{\psi}(t)) \end{bmatrix}$$
για $t \in (-\delta, \delta)$ με $\vec{\psi}(0) = p$. Η $\vec{\psi}$ είναι μοναδική.

π.χ. • $n = 1$ Αν $V(x) = x$, τότε $\exists!\, \psi(t)$ με $\frac{d\psi}{dt} = \psi(t)$ και $\psi(0) = x_0$: $\psi(t) = x_0 e^t$ για $t \in \mathbb{R}$

$\left(V(x) = x \frac{\partial}{\partial x}\right)$

• $n = 2$: Αν $V(x_1, x_2) = (-x_2, x_1) = -x_2 \frac{\partial}{\partial x_1} + x_1 \frac{\partial}{\partial x_2}$ τότε
$\psi(t) = (x_0 \cos t - y_0 \sin t,\ x_0 \sin t + y_0 \cos t) = (\psi_1(t), \psi_2(t))$ ικανοποιεί
$$\psi'(t) = (-x_0 \sin t - y_0 \cos t,\ x_0 \cos t - y_0 \sin t) = (-\psi_2(t), \psi_1(t)) = V(\vec{\psi}(t))$$
και $\psi(0) = (x_0, y_0)$.



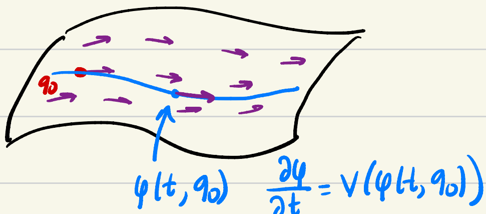
Γενικά: $\varphi(t, x_0) = \psi_{x_0}(t)$ η λύση που αντιστοιχεί στην αρχική συνθήκη $\psi_{x_0}(0) = x_0$ $\quad \frac{\partial \varphi}{\partial t} = \psi_{x_0}'(t)$

Παρόμοια για δ.π. V σε πολλαπλές έχουμε θεώρημα τοπικής ύπαρξης και μοναδικότητας. Οι λύσεις ονομάζονται ροές. (η ροή ρευστού με ταχύτητα σε κάθε σημείο p αυτή του δ.π.)

<u>Θεώρημα</u>: Έστω V διαφ. δ.π. σε διαφ. πολλαπλότητα M και $p \in M$. Τότε υπάρχει γειτονιά $U \subset M$ του p, $\delta > 0$ και διαφ. συνάρτηση $\varphi(t,q)$ $\varphi : (-\delta,\delta) \times U \to M$ τ.ω. η καμπύλη $\psi_{q_0}(t) : t \longmapsto \varphi(t,q_0) \in M$ για $t \in (-\delta,\delta)$, $q \in U$ είναι μοναδική καμπύλη που ικανοποιεί

$$\psi_{q_0}'(t) = \frac{\partial \varphi}{\partial t} = V(\varphi(t,q_0)) \quad \text{και} \quad \psi_{q_0}(0) = \varphi(0,q_0) = q_0.$$

$\varphi(t,q_0)$ εξαρτάται από το αρχικό σημείο q_0, και $\varphi(t,q_0) \in M$ καμπύλη στην M με ταχύτητα (ως προς t) αυτήν του δ.π. στο αντίστοιχο σημείο



Η λύση $\varphi(t,p)$ είναι C^∞ ως προς t και ως προς p.

Παρ. 1 Για $V(x,y) = (x, xy^2)$ να βρεθεί η $\varphi(t, x_0, y_0)$.

• Ως προς συντεταγμένες x, y άρα η λύση ισχύει σε μια γειτονιά της $\mathbb{R}^2$.

Επίλυση: $\left.\begin{array}{l} x' = x \\ y' = xy^2 \end{array}\right\}$

$$x' = x \Rightarrow x'/x = 1 \Rightarrow \int_{x_0}^{x} \frac{dx}{x} = \int_0^t dt \Rightarrow x = x_0 e^t$$

$$y'/y^2 = x = x_0 e^t \Rightarrow \int_{y_0}^{y} \frac{dy}{y^2} = \int_0^t x_0 e^t \, dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{y} + \frac{1}{y_0} = x_0 e^t - x_0 \Rightarrow y = \frac{y_0}{x_0 y_0 - x_0 y_0 e^t + 1}$$

$$\therefore \varphi(t, x_0, y_0) = \left(x_0 e^t,\ x_0 (x_0 y_0 - x_0 y_0 e^t + 1)^{-1}\right)$$

- Έστω $\varphi_t = \varphi(t,p) : U \to M$, $p \mapsto \varphi(t,p)$. Για t σταθερό, απεικόνιση από το $U \subset M$ στην M.

Η φ_t ονομάζεται η τοπική ροή που ορίζει το V ($\varphi' = V(\varphi)$)

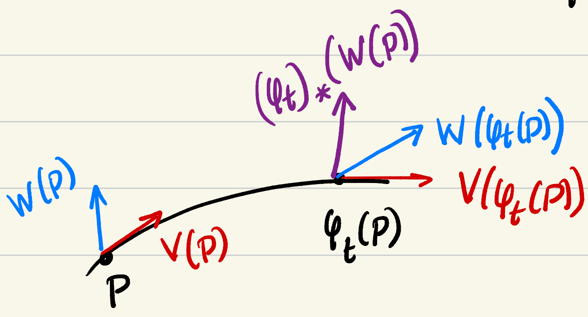
Τότε $d\varphi_t : T_pM \to T_{\varphi_t(p)}M$ για $p \in U$

<u>Πρόταση</u> Έστω V, W διαφ. δ.π. στην M, $p \in M$ και φ_t η τοπική ροή του V σε μια γειτονιά $U \ni p$. Τότε

$$[V,W](p) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{t}\left[W - (d\varphi_t)(W)\right](\varphi_t(p)).$$

$W(\varphi_t(p))$: το δ.π. W στο $\varphi_t(p)$.

$(d\varphi_t)(W)\Big|_{\varphi_t(p)} = (\varphi_t)_*(W)\Big|_{\varphi_t(p)}$: παίρνει το $W(p)$ μέσω της ροής φ_t σε διάνυσμα στο $\varphi_t(p)$



<u>Απόδειξη</u> (Μόνο πληροφοριακά)

Ισχύει ανν $AM = \Delta M$ σε κάθε $f \in \mathcal{D}$

$$\Leftrightarrow \left([V,W](f)\right)(p) = \lim_{t \to 0} \frac{Wf - (d\varphi_t(W))(f)}{t}(\varphi_t(p))$$

$$\left(d\varphi_t(W)\right)(f)\Big|_{\varphi_t(p)} = W(f\circ\varphi_t)(p)$$

$$f\circ\varphi_t(p) = f(p) + [\underbrace{f\circ\varphi_t(p) - f(p)}_{\Delta f}]$$

$\varphi_0(p) = \varphi(0,p) = p \quad \forall p\in U \qquad \therefore\ \Delta f = 0$ όταν $t=0$.

f διαφ. άρα από Θ. Taylor: $\Delta f = 0 + t\cdot g(t,p)$ στην U

όπου $g(t,p) = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(\varphi_t(p)) - f(p)\right]$

Άρα $g(0,p) = \frac{\partial}{\partial t}\left[f(\varphi_t(p)) - f(p)\right]\Big|_{t=0} = (Vf)(p)$ (*)

από τον ορισμό των φ_t.

$$\therefore\ W(f\circ\varphi_t)(p) = W(f(p) + t\cdot g(t,p)) = W(f(p)) + t\,W(g(t,p))$$

$$\therefore\ \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\left[(Wf)(\varphi_t(p)) - W(f\circ\varphi_t)(p)\right] =$$

$$= \lim_{t\to 0}\left[\frac{1}{t}\left[(Wf)(\varphi_t(p)) - (Wf)(p)\right] - W(\underbrace{g(t,p)}_{g(0,p)=(Vf)(p)})\right] =$$

όπως (*)

$$= V(Wf)(p) - W(Vf)(p) = [V,W](f)\Big|_p$$

□