Μετρική Riemann:

Μια πολ/τα έχει τοπολογικό και διαφορικό χαρακτήρα

Δεν έχει όμως μετρικό χαρακτήρα - π.χ. για ορισμό απόστασης ανάμεσα σε σημεία.

$\mathbb{R}^n$: $d(x,y) = \|x-y\|$

$= \inf\limits_{\gamma_{xy}} L(\gamma_{xy})$ όπου γ_{xy}: καμπύλη από το x στο y.
και $L(\gamma_{xy})$ το μήκος της.

$$L(\gamma) = \int_a^b \langle \gamma'(t), \gamma'(t) \rangle^{1/2} dt$$

γ': εφ. διάνυσμα - ορίζεται σε M

$\langle , \rangle$: εσ. γινόμενο ≡ μετρική σε M - πρέπει να οριστεί.

Επανάληψη:

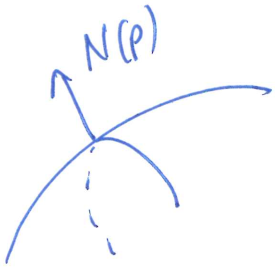
Σε επιφάνειες $M^2 \subset \mathbb{R}^3$ $\|x-y\|$ δεν έχει νόημα.

$d(x,y)$ μπορεί να οριστεί μόνο μέσω $\inf\limits_{\gamma_{xy}} L(\gamma_{xy})$.

Χρειάζεται λοιπόν εσωτερικό γινόμενο ανάμεσα σε διανύσματα στο T_pM: $1^{η}$ θεμελιώδης μορφή: $I_p(v,w) = \langle v,w \rangle_p$.
(επαγόμενη από $\mathbb{R}^3$).

I_p: δε διατηρείται από διαφορομορφισμούς αλλά από ισομετρίες.

Οδηγεί στον ορισμό άλλων ενδιαφερόντων εννοιών:



Έστω N μοναδιαίο κάθετο διαν. πεδίο με $N(p) \perp T_p M$ (έχει νόημα στο $\mathbb{R}^3$ σε γενική πολλ/τα όχι).

Δείξαμε ότι $dN_p : T_p M \to T_p M$ και ορίσαμε $II_p(v) = \langle dN_p(v), v \rangle_p$ τη 2η θεμελιώδη μορφή. II_p: είναι τετραγωνική μορφή έχει 2 ιδιοτιμές k_1, k_2: οι κύριες καμπυλότητες της M στο p.

$K = k_1 \cdot k_2$: η καμπυλότητα Gauss στο p.

Θεώρημα Gauss-Bonnet : $\int_M K \, dA = 2\pi \chi(M)$ για M προσανατολίσιμη, συμπαγή και $\chi(M) = 2 - 2g$.

g: γένος της M

$g=0$

$g=4$.

K: μας δίνει πόσο γρήγορα μεγαλώνει η M. σε εμβαδό.

$\langle \, , \rangle_p$: οδηγεί επίσης στο ορισμό των συμβόλων Christoffel και γεωδαισιακών - καμπύλες με επιτάχυνση κάθετη στο $T_p M$ οι οποίες τοπικά ελαχιστοποιούν την απόσταση.

• Παρόμοια ξεκινώντας από $\langle \, , \rangle_p$ θα δώσουμε τέτοιες έννοιες σε γενική πολλ/τα που θα συμπίπτουν με αυτές για $M^2 \subset \mathbb{R}^3$

<u>Ορισμός:</u> Μια <u>μετρική Riemann</u> σε διαφ. πολλ/τα M δίνει σε κάθε σημείο $p \in M$ ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\ ,\ \rangle_p$ στον εφαπτόμενο χώρο T_pM που να είναι διαφορίσιμο με την ακόλουθη έννοια:

Για χάρτη συντεταγμένων $(U, \mathbf{X})$ στο $p = \mathbf{X}(x_1, \dots, x_n)$ τότε $\langle \frac{\partial}{\partial x_i}(p), \frac{\partial}{\partial x_j}(p) \rangle_p = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$ είναι διαφορίσιμη στο U $\forall i, j$.

- Δεν εξαρτάται από τα χάρτη συντεταγμένων
- Εσ. γινόμενο: συμμετρικό, γραμμικό και στις δύο θέσεις και θετικά ορισμένο $\langle x, x \rangle \geq 0$ "$=$"0 ανν $x=0$.

<u>Παράδειγμα:</u> ① $\mathbb{R}^n$ $(x_1, \dots, x_n)$ συντεταγμένες.

$\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}_{i=1}^n$

Ορίζουμε $$\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p = \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j \end{cases}$$

Η ευκλείδια μετρική.

Αν $v = \sum v_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ τότε $\langle v, v \rangle = \sum_{i=1}^{n} v_i^2 \geq 0$ "$=$"$0 \Leftrightarrow v_i = 0$ $\forall i$.

② $(\mathbb{R}^2)^+ = \{(x,y) \mid y > 0\}$ πολλ/τα. $\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\}$

Ορίζουμε $\langle\ ,\ \rangle$ με $\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial x} \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = \frac{1}{y^2}$

$\langle \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y} \rangle = 0$

Υπερβολικό επίπεδο $K = -1$.

Εναλλακτική ορολογία:

Μια μετρική: $\langle\, ,\, \rangle : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ είναι ένας

διγραμμικός τελεστής.
ονομάζεται και τανυστής $\binom{2}{0}$.

$g(X,Y) := \langle X, Y \rangle$ για X,Y διαν.. πεδία.

Ο <u>συνεφαπτόμενος χώρος</u> T^*M ορίζεται ως ο δυϊκός χώρος του TM που δίνεται από:

$T^*M = \{ \omega : T_pM \to \mathbb{R} \mid$ τ.ω. για $\forall X \in T_pM$, $\omega(X) \in \mathbb{R} \}$.
και ω γραμμική.

Αν $\{ \frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \}$ αποτελεί βάση για το T_pM

τότε ορίζουμε $dx^j : T_p M \to \mathbb{R}$ τ.ω. $dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \delta^j_i$

όπου $\delta^j_i = \begin{cases} 0 & i \neq j \\ 1 & i = j. \end{cases}$ με την ιδιότητα να είναι γραμμικός τελεστής.

Το σύνολο $\{ dx^1, \dots, dx^n \}$ αποτελεί βάση για το T_p^*M και κάθε $\omega \in T^*M$ γράφεται ως

$\omega = \sum_{i=1}^{n} \omega_i dx^i$ είναι τανυστής τάξης $\binom{0}{1}$

Μπορούμε τότε να γράψουμε τη μετρική g στη μορφή:

$$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i \otimes dx^j \equiv \sum_{i=1}^{n} g_{ij}\, dx^i dx^j$$

η οποία ερμηνεύεται ως:

$$g\left(\frac{\partial}{\partial x_k}, \frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right) \cdot dx^j\left(\frac{\partial}{\partial x_\ell}\right) =$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, \delta^i_k \cdot \delta^j_\ell = g_{k\ell}.$$

Τότε αν $v = \sum v_k \frac{\partial}{\partial x_k}$ $w = \sum_l w_l \frac{\partial}{\partial x_l}$

$$g(v,w) = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} v_i w_j \quad \left(= \sum_{k,l=1}^{n} g_{kl} v_k w_l\right).$$

αφού $dx^i(v) \underset{\uparrow}{=} \sum_{k=1}^{n} v_k \, dx^i\left(\frac{\partial}{\partial x^k}\right) = v_i$

γραμμικότητα.

- Αφού η μετρική είναι συμμετρική, τότε $g_{ij} = g_{ji}$
- Στο $\mathbb{R}^n$: $g = \sum_{i,j=1}^{n} \delta_{ij} \, dx^i dx^j$
- Στο υπερβολικό επίπεδο $g = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$.

<u>Ορισμός</u>: Μια διαφ. πολλ/τα M στην οποία ορίζεται μετρική Riemann, g, ονομάζεται πολλ/τα Riemann (M, g).

- Για $X \in T_pM$ ορίζουμε $|X| = g(X,X)^{1/2}$ $\left(= \langle X, X\rangle^{1/2}\right)$

  και για $X, Y \in T_pM$ $\cos\theta = \frac{\langle X, Y\rangle}{|X|\,|Y|}$ όπου θ

  η γωνία μεταξύ τους.

  Αν $\langle X, Y\rangle = 0$ τα X, Y ονομάζονται κάθετα.

  Ένα σύνολο διανυσμάτων $E_1, \dots, E_k \in T_pM$ ονομάζονται ορθοκανονικά αν $\langle E_i, E_j\rangle = \delta_{ij}$

<u>Παρατήρηση:</u> Σε μια γειτονιά συντεταγμένων (U, X) της M^n μπορεί ~~[illegible]~~ πάντα να βρεθεί ένα ορθοκανονικό πλαίσιο διανυσματικών πεδίων $\{E_1, \ldots, E_n\}$ τα οποία να είναι C^∞. – με τη μέθοδο Gram Schmidt. $(\langle E_i, E_j \rangle_p = \delta_{ij} \quad \forall p \in X(U))$

Όμως τα $\{E_i\}_{i=1}^n$ δεν αντιστοιχούν απαραίτητα σε πλαίσιο συντεταγμένων – δηλαδή $E_i \neq \frac{\partial}{\partial x_i}$ γενικά.

Αν υπάρχει ορθοκανονικό πλαίσιο συντεταγμένων τότε η M έχει "επίπεδη" μετρική με $K \equiv 0$ π.χ. $\mathbb{R}^n$, κύλινδρος.

- Για πλαίσιο συντεταγμένων $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0$ ενώ $[E_i, E_j] \neq 0$ γενικά.

<u>Παράδειγμα:</u> $\mathbb{R}^n$: $g = \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\, dx^i dx^j = \sum_{i=1}^n dx^i dx^i$

$\mathbb{R}^2$: $g = dx^2 + dy^2$ ευκλείδεια μετρική.

Πώς γράφεται αυτή η μετρική σε πολικές συντεταγμένες;

$$\phi : U \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) \mid \underset{y=0}{x \geq 0}\} \qquad \text{όπου } U = (0, \infty) \times (0, 2\pi)$$

$$\phi(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right\}$ βάση για $T_p\mathbb{R}^2$ στο U.

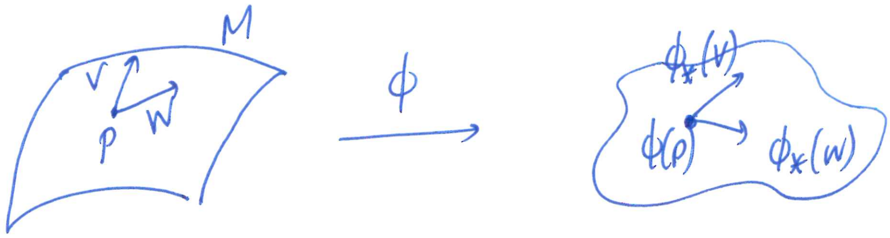
$\left\{\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right\}$ βάση για $T_{\phi(p)}\mathbb{R}^2$ στο π.τ.

Θέλουμε ο διαφορομορφισμός ϕ να είναι <u>ισομετρία</u> δηλαδή να διατηρεί τα μέτρα των διανυσμάτων.

<u>Ορισμός</u>: Ένας διαφορομορφισμός $\phi: M \to N$ ανάμεσα σε δύο πολλαπλότητες Riemann ονομάζεται <u>ισομετρία</u>, αν

$$g_M(v,w)_p = g_N(d\phi_p(v), d\phi_p(w))_{\phi(p)} \quad \forall p \in M \quad v,w \in T_pM$$

όπου g_M: η μετρική στην M και g_N η μετρική στην N



$d\phi$: διατηρεί γωνίες ανάμεσα σε διανύσματα και το μήκος τους. (τη νόρμα τους).

Στο πιο πάνω παράδειγμα $M = U$ ως προς (r,θ)
$N = \mathbb{R}^2$ ως προς (x,y)

$$g_N = dx^2 + dy^2 = dx\,dx + dy\,dy$$

να βρεθεί $g_M = g_{11}\,dr\,dr + \underbrace{g_{12}\,dr\,d\theta + g_{21}\,d\theta\,dr}_{=2g_{12}\,dr\,d\theta} + g_{22}\,d\theta^2$

τ.ω. ϕ ισομετρία.

$$d\phi: \quad [D\Phi] = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right) = [D\Phi]\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{bmatrix} = \cos\theta\frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$d\phi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right) = [D\Phi]\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-r\sin\theta\\ r\cos\theta\end{bmatrix} = -r\sin\theta\frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore\; g_M\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial r}\right) = g_{11} = g_N\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right)\right) =$$

$$= g_N\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial y},\; \cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y}\right) = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$g_M\left(\frac{\partial}{\partial r}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = g_{12} = g_N\left(d\phi\left(\frac{\partial}{\partial r}\right), d\phi\left(\frac{\partial}{\partial \theta}\right)\right) =$$

$$= g_N\left(\cos\theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin\theta \frac{\partial}{\partial y},\; -r\sin\theta \cdot \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\right) = 0$$

$$g_M\left(\frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial \theta}\right) = g_{22} = g_N\left(-r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y},\; -r\sin\theta \frac{\partial}{\partial x} + r\cos\theta \frac{\partial}{\partial y}\right) =$$

$$= r^2 \sin\theta^2 + r^2\cos^2\theta = r^2$$

$\therefore\; g_M = dr^2 + r^2 d\theta^2$: η μετρική σε πολικές.

$g_M = \phi^*(g_N)$: το pull back της ~~[illegible]~~ ευκλείδειας μετρικής σε πολικές συντεταγμένες.

- $\phi_*: v \in T_p M \to \phi_*(v) \in T_{\phi(p)} N$

  $\phi^*: dx^i \in T^*_{\phi(p)} N \to \phi^*(dx^i) \in T^*_p M.$

Υπολογισμός του g_M με εναλλακτικό τρόπο.

$$\phi^*(dx) := d(x\circ\phi(r,\theta)) = d(r\cos\theta) = \cos\theta dr - r\sin\theta d\theta$$

$$\phi^*(dy) := d(y\circ\phi(r,\theta)) = d(r\sin\theta) = \sin\theta dr + r\cos\theta d\theta.$$

$$\therefore \phi^*(g_N) = \phi^*(dx\,dx + dy\,dy) =$$

$$= \phi^*(dx)\,\phi^*(dx) + \phi^*(dy)\,\phi^*(dy) =$$

$$= (\cos\theta dr - r\sin\theta d\theta)^{\text{"}2\text{"}} + (\sin\theta dr + r\cos\theta d\theta)^{\text{"}2\text{"}}$$

$$= (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,dr^2 + r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta)\,d\theta^2$$

$$- 2r\cos\theta\sin\theta dr d\theta + 2\sin\theta \cdot r\cdot\cos\theta dr d\theta$$

$(dr\,d\theta = d\theta\,dr)$

$$= dr^2 + r^2 d\theta^2$$

Υποπολλαπλότητες:

Έστω (N, g_N) πολλ/τα Riemann.

Έστω $i: M^n \hookrightarrow N^{n+m}$ μια εμβυθισμένη πολλ/τα στην N (immersed) τ.ω. i διαφορίσιμη και $di_p: T_pM \to T_{i(p)}N$ 1-1.

Αν g_N η μετρική Riemann στην N, τότε η επαγόμενη μετρική στην M ορίζεται ως $g_M = i^* g_N$.

$(M^n, i^*(g_N))$ ονομάζεται <u>ισομετρική</u> εμβύθιση της M στην N

<u>Παραδείγματα:</u> (1)

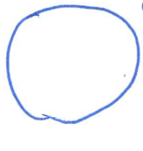
$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "i"] & N \\ \mathbb{R}^n \arrow[u, "X"] \arrow[r, "I"] & \mathbb{R}^{n+m} \arrow[u, "Y"] \end{tikzcd}$$

$I \equiv i$ σε συντεταγμένες.

$i: U \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n+m}$ $\quad i(u_1,\dots,u_n) = (x_1,\dots,x_{n+m})$ $\quad x_i = x_i(u_1,\dots,u_n)$.

Τότε το $dx^i dx^j$ της g_N γίνεται:

$$i^*(dx^i dx^j) = \sum_{k,l=1}^{n} \frac{\partial x_i}{\partial u_k} du^k \cdot \frac{\partial x_j}{\partial u_l} du^l \qquad \text{αφού } i^*(dx^i) = d(x^i(u_1,\dots,u_n))$$

(2)  $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

$$\begin{tikzcd} & S^1 \arrow[r, hook, "i"] & \mathbb{R}^2 \\ & (0,2\pi) \arrow[u, "X"] \arrow[ur, "I \equiv i"'] & \end{tikzcd}$$

$i: S^1 \hookrightarrow \mathbb{R}^2$

I ταυτίζεται με i

$i(t) = (R\cos t, R\sin t)$

$i^*(dx) = d(R\cos t) = -R\sin t \, dt$

$i^*(dy) = d(R\sin t) = R\cos t \, dt$

$\therefore \; i^*(dx^2 + dy^2) = R^2 dt^2$.

Αν $\gamma(t)$ ο κύκλος, $\gamma(t) = (R\cos t, R\sin t)$ στο $\mathbb{R}^2$, τότε $X^{-1} \circ \gamma(t) = t$ για $t \in (0, 2\pi)$

Σε συντεταγμένες, $\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial t}$ $\therefore \; \|\gamma'(t)\| = R$.

③ Σφαίρα $S^2_R \subset \mathbb{R}^3$ σε σφαιρικές συντ.

$$i(\theta,\phi) = (R\cos\theta\sin\phi,\ R\sin\theta\sin\phi,\ R\cos\phi)$$

$$i^*(dx) = -R\sin\theta\sin\phi\, d\theta + R\cos\theta\cos\phi\, d\phi$$

$$i^*(dy) = R\cos\theta\sin\phi\, d\theta + R\sin\theta\cos\phi\, d\phi$$

$$i^*(dz) = -R\sin\phi\, d\phi.$$

$$\therefore\ i^*(dx^2+dy^2+dz^2) = \ldots = R^2\sin^2\phi\, d\theta^2 + R^2 d\phi^2.$$

$\left\{\frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\phi}\right\}$ είναι κάθετα μεταξύ τους όχι όμως μοναδιαία

Αν $\gamma(t)$ παράλληλος κύκλος, $\gamma(t) = (t, \phi_0)$ σε συντεταγμένες, με $\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial\theta}$ $(=(1,0))$ για $t \in (0, 2\pi)$

$$\therefore\ L(\gamma) = \int_0^{2\pi} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2\pi} \left\langle \frac{\partial}{\partial\theta}, \frac{\partial}{\partial\theta} \right\rangle^{1/2} dt = \int_0^{2\pi} R\sin\phi_0\, dt$$

$$= 2\pi R\sin\phi_0$$

$R\sin\phi_0$ η ακτίνα του.

Γινόμενα πολλαπλοτήτων:

Εστω (M_1, g_1) (M_2, g_2) πολ/τες Riemann.

Στην πολ/τα γινόμενο $M_1 \times M_2$ παρατηρούμε ότι

$T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2 = T_{p_1} M_1 \oplus T_{p_2} M_2$ για $p = (p_1, p_2) \in M_1 \times M_2$

Δηλαδή αν $X \in T_p(M_1 \times M_2)$ τότε $X = X_1 + X_2$ με

$X_1 \in T_{p_1} M_1$ και $X_2 \in T_{p_2} M_2$.

Ορίζουμε τη μετρική g στην $M_1 \times M_2$ τ.ω.

$$g(X, Y) = g(X_1 + X_2, Y_1 + Y_2) = g_1(X_1, Y_1) + g_2(X_2, Y_2).$$

για $X_i, Y_i \in T_{p_i} M_i$.

- $(M_1 \times M_2, g)$ είναι πολ/τα Riemann. (g όντως είναι μετρική - έλεγχος)

Για παράδειγμα:
Αν $M_1 = \mathbb{R}^n = \{(x_1, \dots, x_n)\}$ με μετρική $g^1 = \sum_{i,j} g^1_{ij} dx^i dx^j$

και $M_2 = \mathbb{R}^m = \{(y_1, \dots, y_m)\}$ με μετρική $g^2 = \sum_{kl} g^2_{kl} dy^k dy^l$

Τότε $(M_1 \times M_2, g)$ όπου $g = \sum_{i,j} g^1_{ij} dx^i dx^j + \sum_{k,l} g^2_{kl} dy^k dy^l$

είναι πολ/τα Riemann.

- $M_1 \times M_2 = (x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_m)$ και

$$T_{(p_1,p_2)} M_1 \times M_2 = \left\{ \sum_i a_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_k b_k \frac{\partial}{\partial y_k} \;\middle|\; a_i, b_k \in \mathbb{R} \right\}$$

Παρ. Κύλινδρος $S^1 \times \mathbb{R}$ σε συντεταγμένες (θ, t)
$g^{S^1} = d\theta^2$ και $g^{\mathbb{R}} = dt^2$ τότε $(S^1 \times \mathbb{R}, g)$
με $g = d\theta^2 + dt^2$ είναι ο επίπεδος κύλινδρος $(K=0)$

Δομές που επιτρέπει η ύπαρξη μετρικής:

Μήκος καμπύλης.

Καμπύλη $\gamma : I \subset \mathbb{R} \to M$ παραμετρισμένη καμπύλη.

Εφαπτόμενο διανυσματικό πεδίο στη $\gamma(t)$ όταν είναι διαφορίσιμη:

$$V = \frac{d\gamma}{dt} = d\gamma\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

Σε συντεταγμένες: $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$

$$\frac{d\gamma}{dt} \left(= \gamma'(t)\right) = (d\gamma)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right) = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

Το μήκος της καμπύλης $\gamma(t)$ με $t \in [a,b]$:

$$L_a^b(\gamma) = \int_a^b \left\langle \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right\rangle^{1/2} dt.$$

- Δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες.

Θεώρημα: Κάθε διαφορίσιμη πολλαπλότητα επιδέχεται μια μετρική Riemann

- Ορίζουμε μετρική σε κάθε χάρτη συντεταγμένων και μετά σε όλη την πολλαπλότητα μέσω συναρτήσεων διαμέρισης της μονάδας: $\{(X_\alpha, U_\alpha)\}_\alpha$ άτλαντας.

$\exists\, \varphi_\alpha$ με $spt(\varphi_\alpha) \subset U_\alpha$ ($\Leftrightarrow \varphi_\alpha(x) = 0 \ \forall x \notin U_\alpha$) και $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1$ $\forall x \in M$.

Όγκος πολλαπλότητας - ορισμός στοιχείου όγκου:

Στο $\mathbb{R}^n$ $\quad Vol(A) = \int_{\mathbb{R}^n} 1_A \underbrace{dx^1 \dots dx^n}_{dv}$ $\quad$ όπου $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$ ο.κ. βάση.

Στην M^n: Έστω $\{e_1, \dots, e_n\}$ ορθοκανονικά διανύσματα στο T_pM.

τ.ω. $\langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Αν (U, X) είναι χάρτης συντεταγμένων με βάση $\left\{\frac{\partial}{\partial x_i}\right\}_{i=1}^n$

για το T_pM, τότε $\quad g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j \quad$ με $g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle$

και υπάρχει πίνακας $A = (a_{ij})_{ij}$ τ.ω. (αλλαγής βάσης)

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k$$

Άρα: $\quad g_{ij} = \left\langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle = \left\langle \sum_{k=1}^n a_{ik} e_k, \sum_{l=1}^n a_{jl} e_l \right\rangle =$

$$= \sum_{k,l=1}^n a_{ik}\, a_{jl} \cdot \delta_{kl} = \sum_{k=1}^n a_{ik}\, a_{jk}.$$

Στο T_pM το παραλληλεπίπεδο με πλευρές $\left\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right\}$

έχει όγκο $\quad Vol_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \det(a_{ij})\, \underbrace{Vol(e_1, \dots, e_n)}_{1}$

Παρατηρούμε ότι

$$\det(g_{ij}) = \det\left(\sum_{k=1}^n a_{ik} a_{jk}\right) = \det(A A^T) = (\det A)^2 = \det(a_{ij})^2$$

$$\therefore Vol_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) = \sqrt{\det(g_{ij})}$$

<u>Ορισμός</u>: Το στοιχείο όγκου μιας πολλ/τας Riemann ορίζεται ως $dv = \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n$ σε μια γειτονιά συντεταγμένων (U, X).

Αν $A \subset X(U) \subset M$, τότε ορίζουμε

$$Vol_n(A) = \int_{X^{-1}(A)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n.$$

Για $A \subset M$, τότε ο ορισμός γίνεται μέσω διαμέρισης της μονάδας, με υπολογισμό όγκου σε κάθε χάρτη και πρόσθεσης.

- $Vol_n(A)$ δεν εξαρτάται από τις συντεταγμένες:

Αν $A \subset X(U) \cap Y(V)$, τότε

$g = \sum_{i,j} g_{ij}\, dx^i dx^j$ με $g_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle$ ως προς X

και $g = \sum_{i,j} h_{ij}\, dy^i dy^j$ με $h_{ij} = \langle \frac{\partial}{\partial y_i}, \frac{\partial}{\partial y_j} \rangle$ ως προς Y.

Από θεώρημα αλλαγής συντεταγμένων,

$$\begin{tikzcd} & M & \\ U \arrow[ur, "X"] \arrow[rr, "Y^{-1}\circ X"] & & V \arrow[ul, "Y"'] \end{tikzcd}$$

$$\int_{X^{-1}(A)} \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n =$$

$$= \int_{Y^{-1}(A)} \sqrt{\det(g_{ij})} \cdot \underbrace{\det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)}_{D(Y^{-1}\circ X)} dy^1 \dots dy^n$$

Όμως $\sqrt{\det(g_{ij})} \cdot \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) = \mathrm{Vol}_n\left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\right) \cdot \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right)$

$$= \underbrace{\mathrm{Vol}_n\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) \det\left(\frac{\partial y_i}{\partial x_j}\right)} \cdot \det\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}\right) =$$

$$= \mathrm{Vol}_n\left(\frac{\partial}{\partial y_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial y_n}\right) = \sqrt{\det(h_{ij})}$$

$$\therefore \Delta.M. = \int_{Y^{-1}(A)} \sqrt{\det(h_{ij})}\, dy^1 \dots dy^n$$

<u>Παραδείγματα</u>: ① $\mathbb{R}^n$ $\quad g = \delta_{ij}\, dx^i dx^j \quad \sqrt{\det(g_{ij})}\, dx^1 \dots dx^n$

② $\mathbb{R}^2$ σε πολικές

$g = dr^2 + r^2 d\theta^2 \qquad dv = r\, dr\, d\theta$

③ $S^2_R \qquad g = d\phi^2 + R^2 \cdot \sin^2\phi \cdot d\theta^2$ σε σφαιρικές

$dv = R \sin\phi\, d\theta\, d\phi.$

④ Υπερβολικός χώρος $\mathbb{H}^n$

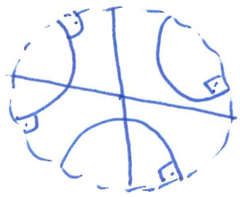
2 μοντέλα: <u>Θεώρημα</u>: Οι εξής πολλαπλότητες είναι ισομετρικές:

(i) Μπάλα Poincaré $B^n = \{(u_1, \dots, u_n) \mid \|\vec{u}\| < 1\}$

(ανοικτή μπάλα στο $\mathbb{R}^n$) με μετρική

$$h^1 = 4 \cdot \frac{\sum_{i=1}^{n} (du^i)^2}{(1 - \|\vec{u}\|^2)^2}$$

($h^1 \to \infty$ όταν $\|\vec{u}\| \to 1$)

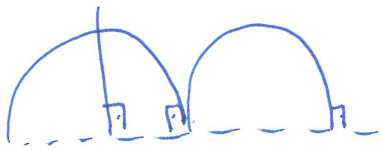


$n=2$
γεωδαισιακές ημικύκλια $\perp$ στο ∂B.

(ii) Ημιεπίπεδο Poincaré $U^n = \{(x_1, \dots, x_{n-1}, y) \mid y > 0\} \subset \mathbb{R}^n$.

$$h^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (dx^i)^2 + dy^2}{y^2}.$$

($h^2 \to \infty$ όταν $y \to 0$)



$n=2$
γεωδαισιακές ευθείες και ημικύκλια $\perp$ στο $y=0$.