Ομοπαραλληλικοί Σύνδεσμοι (Συνοχές). Affine Connections:

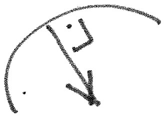
- Γεωδαισιακές - θέλουμε να είναι καμπύλες που ελαχιστοποιούν την απόσταση μεταξύ δύο σημείων. (τουλάχιστον τοπικά π.χ. S^2)
    - ευκλείδιο χώρο: ευθείες
    - S^2: κύκλοι μέγιστης διαμέτρου.

- Ένας ορισμός που κάνει τον υπολογισμό τους δύσκολο πρακτικά.

Αναλυτική περιγραφή:

$(\mathbb{R}^n, g = \Sigma(dx^i)^2)$: - μια ισοταχής καμπύλη (μέτρο ταχ = σταθ.) είναι ευθεία ανν η επιτάχυνσή της είναι μηδέν.

- σταθερό μέτρο ταχύτητας με επιτάχυνση $\Rightarrow$
    - επιτάχυνση $\perp$ στην καμπύλη



$\Rightarrow$ αλλάζει τη διεύθυνση και όχι τη νόρμα της ταχύτητας

Τι είναι η επιτάχυνση;

$M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ ισομετρικά εμβυθισμένες στον $\mathbb{R}^{n+m}$.

π.χ. $S^1 \subset \mathbb{R}^2$

$\gamma(t) = (\cos t, \sin t)$ καμπύλη στον S^1

$\gamma'(t) = (-\sin t, \cos t) \in T_{\gamma(t)} S^1 \ \forall t.$

$(\vec{\gamma}'(t) \perp \vec{\gamma}(t))$

Ενώ $\frac{d}{dt}(\gamma'(t)) = (-\cos t, -\sin t) \notin T_{\gamma(t)} S^1$

Γενικά για $M^n \hookrightarrow \mathbb{R}^{n+m}$ αν $\gamma(t) \in M^n$ τότε $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M^n$

αλλά $\frac{d}{dt}(\gamma'(t)) = \gamma''(t) \notin T_{\gamma(t)} M$.

Στον S^1: η προβολή του $\gamma''(t)$ στο $T_{\gamma(t)}M$ είναι 0.

- Οι κάτοικοι του S^1 βλέπουν/νιώθουν μηδενική επιτάχυνση

- Δεν έχουν περιθώρια σημειώσεις μέτρησης της απόστασης μεταξύ 2 σημείων στο χώρο τους.

- Αν $V(t)$ διαν. πεδίο στη $\gamma(t)$ με $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ με $M \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$

Υπολογίζουμε $\frac{dV}{dt} \in T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^{n+m}$

Θέτουμε $\frac{DV}{dt} \equiv$ προβολή του $\frac{dV}{dt}$ στο $T_{\gamma(t)} M$.

είναι η συναλλοίωτη παράγωγος ~~του~~ του V.

- Υπάρχουν πολλοί τρόποι να οριστεί η παράγωγος διανυσματικού πεδίου στη M.

- Στο $\mathbb{R}^m$: $\frac{DV}{dt} = \lim_{h \to 0} \frac{V(\gamma(t+h)) - V(\gamma(t))}{h}$. $V(\gamma(t+h)) \in T_{\gamma(t+h)} \mathbb{R}^m$

που ταυτίζεται εύκολα μέσω μετάθεσης με διαν. στο $T_{\gamma(t)} \mathbb{R}^m$

- Στην M $T_{\gamma(t+h)} M$ & $T_{\gamma(t)} M$ δε συνδέονται

Δεν ορίζεται ποια είναι τα παράλληλα διανύσματα.

- Η επιλογή συνδέσμου καθορίζει τη συναλλοίωτη παράγωγο και αντίστροφα.

Θέλουμε λοιπόν η συναλλοίωτη παράγωγος, να έχει ορισμένες - ιδιότητες.

Γενικότερος ορισμός συνδέσμων (··όταν M πολλ/τα όχι απαραίτητα Riemann)

Ορισμός: Έστω $\mathfrak{X}(M)$ C^∞ δ.π. , $\mathcal{D}(M)$ C^∞ συναρτήσεις
Ένας ομοπαραλληλικός σύνδεσμος (affine connection) ∇
σε διαφ. πολλ/τα M είναι μια απεικόνιση

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$
$$(X,Y) \mapsto \nabla_X Y$$

τ.ω. (i) $\nabla_{fX+gY} Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$

(ii) $\nabla_X (aY+Z) = a\nabla_X Y + \nabla_X Z$

(iii) $\nabla_X (fY) = f\nabla_X Y + X(f)\cdot Y$

$$\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M), \ f,g \in \mathcal{D}(M), \ a \in \mathbb{R}$$

∇: nabla $\nabla_X Y$ η συναλλοίωτη παράγωγος του Y ως προς X.

Ιδιότητες: Λήμμα 1. $\nabla_X Y|_p$ εξαρτάται μόνο από την τιμή του X
στο p και τις τιμές του Y σε γειτονιά του p.
(* μόνο από τις τιμές του Y σε γ με $\gamma(0)=p$ & $\gamma'(0)=X(p)$).

Απόδειξη: (a) $\tilde{X}(p) = X(p)$

$$\nabla_{\tilde{X}} Y - \nabla_X Y = \nabla_{\tilde{X}-X} Y|_p \quad \text{με } (\tilde{X}-X)(p) = 0.$$

Έστω $\tilde{X}-X = \sum_{i=1}^{n} u_i \frac{\partial}{\partial x_i}$, τότε $u_i(p)=0 \ \forall i$

$$\therefore \nabla_{\tilde{X}-X} Y|_p = \nabla_{\sum u_i \frac{\partial}{\partial x_i}} Y|_p = \sum_{i=1}^{n} u_i \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y|_p = \sum_{i=1}^{n} u_i(p)\cdot \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} Y = 0$$

(b) $\tilde{Y} = Y$ σε μια γειτονιά U του p.

$\nabla_X(\tilde{Y} - Y)\big|_p \overset{?}{=} 0.$

Έστω ϕ τ.ω. $\phi(p) = 1$ σε μια ανοικτή γειτονιά $U_0 \subset U$ του p

& $\phi \equiv 0$ στο U^c.

$\therefore\ \phi(\tilde{Y} - Y) \equiv 0$ στη M.

$$\left.\begin{aligned} &\nabla_X(\phi(\tilde{Y}-Y)) = \nabla_X \cdot 0 = 0 \\ &\nabla_X(\phi(\tilde{Y}-Y))\big|_p \overset{(iii)}{=} X(\phi)\cdot(\tilde{Y}-Y)\big|_p + \phi \cdot \nabla_X(\tilde{Y}-Y)\big|_p = \nabla_X(\tilde{Y}-Y)\big|_p \end{aligned}\right\}.$$

$X(\phi)\big|_p = 0$ αφού $\phi \equiv 1$ στο U_0 σε γειτονιά του p.

$\phi(p) = 1$

- Αν $Y = \tilde{Y}$ στη γ. $\Rightarrow \tilde{Y} - Y = \sum f_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ με $f_i(\gamma(t)) = 0$

$f_i(\gamma(t)) = 0.$

$$\nabla_X \cdot (\tilde{Y} - Y)\big|_p = \nabla_{\dot{\gamma}(t)}\left(f_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum \dot{\gamma}(t)(f_i)\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p + \cancel{\sum f_i}^{\,0}\left(\nabla_{\dot{\gamma}(t)} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_p$$

$p,\ t=0$

$$= \sum \cancel{\frac{d}{dt}\left(f_i(\gamma(t))\right)}^{\,0}\Big|_{t=0} \left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_p$$ αφού $f_i(\gamma(t)) = 0$.

- $\nabla_{fX} = f\nabla_X$ και για (b). $\nabla_X fY = X(f)\cdot Y + f \cdot \nabla_X Y$.

• Σημείωση: Όμοιο με τις ιδιότητες για κατευθυνόμενες παραγώγους ~~για~~ σε συναρτήσεις.

Όμως ∇_X παραγωγίζει διαν. πεδία τω. $\nabla_X Y \in \mathfrak{X}(M)$.

Γενικά $\nabla_X Y \neq [X,Y]$ αφού $[X,Y]$ πρέπει να είναι αντισυμμετρικό, ενώ $\nabla_X Y \neq -\nabla_Y X$ γενικά.

Θα μπορούσε $\nabla_X Y := [X,Y]$ να δώσει σύνδεσμο;
Δηλαδή ισχύουν τα (i), (ii), (iii) για $[\,,\,]$;
- Άσκηση - Εργασία 3.

Υπολογισμός ομοπαραλληλικών συνδέσμων:

Σε γειτονιά συντεταγμένων με πλαίσιο συντεταγμένων $\{\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}\}$, είτε σε οποιοδήποτε άλλο τοπικό πλαίσιο $\{E_1, \dots, E_n\}$ (δηλαδή $\{E_i\}_{i=1}^n$ με $E_i \in \mathcal{X}(M)$ και $\{E_i\}_{i=1}^n$ βάση για το T_pM $\forall p \in U$) σε μια γειτονιά U της M.

$\forall X, Y \in \mathcal{X}(M)$ έχουμε $X = \sum_{i=1}^n X_i E_i$ $Y = \sum_{j=1}^n Y_j E_j$

Άρα $\nabla_X Y = \nabla_{(\sum_i X_i E_i)} (\sum_j Y_j E_j) = \sum_i X_i \nabla_{E_i} (\sum_j Y_j E_j) =$

$= \sum_i X_i \sum_j (E_i(Y_j) + \nabla_{E_i} E_j) = \sum_{i,j} (X_i E_i(Y_j) E_j + X_i Y_j \nabla_{E_i} E_j)$

Ορισμός: Για τοπικό πλαίσιο $\{E_1, \dots, E_n\}$ τα σύμβολα Christoffel ορίζονται ως οι n^3 συναρτήσεις με την ιδιότητα $\nabla_{E_i} E_j = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k E_k$.

• Η δράση του ∇ στη γειτονιά U καθορίζεται πλήρως από τα Γ_{ij}^k.

Λήμμα: $\nabla_X Y = \sum_k \left[X(Y_k) + \sum_{i,j} X_i Y_j \Gamma_{ij}^k \right] E_k$.

Πρόταση: Σε κάθε πολλ/τα ορίζεται ένας τουλάχιστον ομοπαραλληλικός σύνδεσμος.

Απόδειξη: Έστω $\{(U_\alpha, X_\alpha)\}_\alpha$ άτλαντας και $\{\varphi_\alpha\}_\alpha$ διαμέριση της μονάδας.
Σε κάθε χάρτη (U_α, X_α) επιλέγουμε n^3 λείες συναρτήσεις ${}^\alpha\Gamma_{ij}^{k}$ και ορίζουμε

$${}^\alpha\nabla_X Y := \sum_K \Big[X(Y_K) + \sum_{i,j} X_i Y_j \, {}^\alpha\Gamma_{ij}^{K}\Big] \frac{\partial}{\partial x_K}. \quad (*)$$

Τότε ${}^\alpha\nabla$ είναι ομοπαραλληλικός σύνδεσμος σε αυτή τη γειτονιά, και

$$\nabla := \sum_\alpha \varphi_\alpha \, {}^\alpha\nabla \quad \text{δίνει σύνδεσμο στην } M.$$

(φ_α τ.ω. $\varphi_\alpha(x)=0 \ \forall x\notin U_\alpha$ και $\sum_\alpha \varphi_\alpha(x) = 1 \ \forall x\in M$)

∇ ικανοποιεί (i), (ii) ✓

(iii) Leibniz: $\nabla_X(fY) = \sum_\alpha \varphi_\alpha \, {}^\alpha\nabla_X(fY) =$

$$= \underbrace{\sum_\alpha \varphi_\alpha}_{=1}\Big[X(f)Y + f\,{}^\alpha\nabla_X Y\Big] = X(f)Y + f\cdot \sum_\alpha \varphi_\alpha \, {}^\alpha\nabla_X Y =$$

$$= X(f)Y + f\nabla_X Y.$$

□

- Τα Γ_{ij}^{K} καθορίζουν μοναδικά το σύνδεσμο.
- Παρ: $\mathbb{R}^n$ $\nabla_X\Big(\sum_j Y_j \frac{\partial}{\partial x_j}\Big) = \sum_j X(Y_j)\frac{\partial}{\partial x_j}$ (με $\Gamma_{ij}^{K}=0 \ \forall i,j,k$) είναι ο ευκλείδιος σύνδεσμος.

Παρατήρηση: Αν ∇^1, ∇^2 συνδεσμοί, τότε $\frac{1}{2}\nabla^1$, $\nabla^1+\nabla^2$ γενικά δεν είναι σύνδεσμοι. -χάνεται η ιδιότητα (iii) - όμως $\alpha\nabla^1+\beta\nabla^2$ με $\alpha+\beta=1$ είναι σύνδεσμος.

Αν ∇^1, ∇^2 σύνδεσμοι με σύμβολα Christoffel ${}^1\Gamma_{ij}^k$, ${}^2\Gamma_{ij}^k$ αντίστοιχα, τότε ο ∇ με σύμβολα Christoffel $\alpha\,{}^1\Gamma_{ij}^k + \beta\cdot{}^2\Gamma_{ij}^k$ όπου $\alpha,\beta\in C^\infty(M)$ είναι σύνδεσμος. πρέπει να ικανοποιείται (*)

-Τι' αυτό ονομάζεται και αφφινικός

∇: επιτρέπει την παραγώγιση διαν. πεδίων σε μια καμπύλη. Αυτό φαίνεται από την ακόλουθη Πρόταση:

<u>Πρόταση:</u> Έστω M διαφ. πολλ/τα με συμπαραλληλικό σύνδεσμο ∇. Τότε για κάθε διαν. πεδίο $V(t)$ ορισμένο σε καμπύλη $\gamma(t)$ ορίζεται μοναδικά η συναλλοίωτη παράγωγος του V στη γ, $\frac{DV}{dt}$, η οποία να ικανοποιεί τις ακόλουθες ιδιότητες:

(a) $\frac{D}{dt}(aV+W) = a\frac{DV}{dt} + \frac{DW}{dt}$ όπου $a\in\mathbb{R}$, W διαν. πεδίο στη γ.

(b) $\frac{D}{dt}(fV) = \frac{df}{dt}V + f\cdot\frac{DV}{dt}$ όπου f συνάρτηση ορισμένη στη γ

(c) Αν το V προέρχεται από διαν. πεδίο $Y\in\mathfrak{X}(M)$, δηλαδή $V(t)=Y(\gamma(t))$ τότε $\frac{DV}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)}Y$.

Απόδειξη:

$$V(t)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}$$ σε μια γειτονιά συντεταγμένων.

Αν το $\frac{D}{dt}$ ορίζεται και ισχύουν (a), (b), (c), τότε

$$\frac{D}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}\right) \overset{(a),(b)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dv_i(t)}{dt}\cdot\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} + v_i(t)\,\frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_{\gamma(t)}\right]$$

$$\overset{(c)}{=} \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{dv_i}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} + v_i(t)\left(\nabla_{\gamma'(t)}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Big|_{\gamma(t)}\right]$$

Αφού $\gamma'(t)=\sum_{i=1}^{n}\gamma_i'(t)\,\frac{\partial}{\partial x_i}$ σε συντεταγμένες, τότε από γραμμικές ιδιότητες του ∇

$$\frac{DV}{dt}=\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{dv_i}{dt}\,\frac{\partial}{\partial x_i}+\sum_{j=1}^{n} v_i(t)\,\gamma_j'(t)\,\nabla_{\partial/\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\Bigg|_{\gamma(t)} \quad (*)$$

Άρα αν θέλουμε $\frac{D}{dt}$ τ.ω. να ικανοποιεί (a), (b), (c), τότε από (*) αυτό το $\frac{DV}{dt}$ ορίζεται μοναδικά για κάθε V στη γ.

Για την ύπαρξη λοιπόν του $\frac{DV}{dt}$ το ορίζουμε μέσω (*).

Τότε είναι ξεκάθαρο ότι η παράγωγος αυτή διασφαλίζει τα (a), (b), (c).

$\square$.

Ορισμός: Έστω M διαφ. πολλ/τα με ομοπαραλληλικό σύνδεσμο ∇.
Ένα διανυσματικό πεδίο V σε καμπύλη γ ονομάζεται <u>παράλληλο</u> αν $\frac{DV}{dt}=0$ $\forall t$.

(Δηλαδή μηδενική μεταβολή πάνω στη γ.)

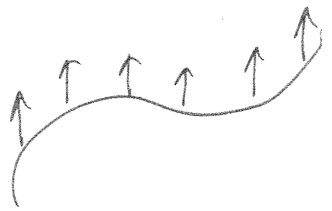
Θεώρημα στο $\mathbb{R}^n$: Έστω $\gamma(t)$ C^∞ καμπύλη στο $\mathbb{R}^n$, και V_0 διάνυσμα στο $\gamma(t_0)$.
Τότε υπάρχει μοναδικό παράλληλο διαν. πεδίο $V(t)$ στη γ με $V(t_0)=V_0$ (∇: σύνδεσμος με $\Gamma_{ij}^k=0$).

Απόδειξη: $V(t)=(V_1(t),\dots,V_n(t))$

$$\frac{DV}{dt}=(V_1'(t),\dots,V_n'(t))=0 \Rightarrow V_i(t)=c_i \quad \forall t$$

$\therefore c_i = V_i(t) = V_{0,i}$

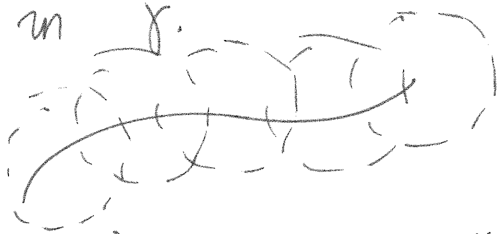
$\therefore V(t)=V_0 \quad \forall t$



Πρόταση: Έστω M διαφ. πολλ/τα με ομοπαραλληλικό σύνδεσμο ∇, $\gamma: I\to M$ διαφ. καμπύλη.
και $V_0\in T_{\gamma(t_0)}M$.
Τότε υπάρχει μοναδικό παράλληλο C^∞ διαν. πεδίο $V(t)$ στη γ με $V(t_0)=V_0$.
Το $V(t)$ ονομάζεται <u>παράλληλη μεταφορά</u> του V_0 στη γ.

• Μας δίνει το ανάλογο των παράλληλων διαν. πεδίων στο $\mathbb{R}^n$.

<u>Απόδειξη:</u> Σε μια γειτονιά U του $\gamma(t_0)$ έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα.
Μετά προχωράμε από γειτονιά σε γειτονιά μέχρι να καλύψουμε τη γ.



Στη γειτονιά U του $\gamma(t_0)$, θέλουμε $V(t)$ τ.ω. $V(t_0)=V_0$ και $\frac{DV}{dt} \equiv 0$.

Σε συντεταγμένες $V(t) = \sum_{i=1}^{n} V_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}$

και
$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\sum_i V_i(t) \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_i \left[V_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + V_i(t) \cdot \frac{D}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right]$$

$$= \sum_i V_i'(t) \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i V_i(t)\, \nabla_{\sum_{j=1}^{n} \gamma_j'(t) \frac{\partial}{\partial x_j}} \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} V_k'(t) \frac{\partial}{\partial x_k} + \sum_{i,j,k=1}^{n} V_i(t)\, \gamma_j'(t) \cdot \Gamma_{ij}^{k} \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \equiv 0$$

$$\Leftrightarrow V_k'(t) + \sum_{i,j=1}^{n} V_i(t)\, \gamma_j'(t)\, \Gamma_{ij}^{k} = 0. \quad \forall k.$$

με $V_k(t_0) = V_{0,k}$.

Σύστημα διαφ. εξισώσεων $1^{ης}$ τάξης για το $(V_1(t), \dots, V_n(t))$ με C^∞ συντελεστές $(\gamma_j'(t)\Gamma_{ij}^{k})$ το οποίο είναι γραμμικό,
δηλαδή $\vec{V}'(t) = A\vec{V}$ $\quad A: C^\infty$ $n \times n$ πίνακας.

Από θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας, έχουμε μοναδική λύση $\vec{V}(t)$ με $\vec{V}(t_0)=\vec{V}_0$ σε συντεταγμένες.
για όλα τα $t \in I$ στο $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον $\vec{V}(t)$ είναι C^∞.
Θέτουμε $V(t)=\sum_{i=1}^{n} v_i(t)\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)}$ C^∞ διαν. πεδίο.

□

<u>Παρατήρηση:</u> Για $\gamma: I \to M$ $t_0, t_1 \in I$, η παράλληλη μεταφορά ενός $V_0 \in T_{\gamma(t_0)}M$ δίνει ένα τελεστή

$$P^{\gamma}_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \longrightarrow T_{\gamma(t_1)}M \quad \text{με} \quad P^{\gamma}_{t_0,t_1}(V_0)=V(t_1)$$

όπου $V(t)$ η παράλληλη μεταφορά του V_0 στη γ.

$P^{\gamma}_{t_0,t_1}$ είναι ισομορφισμός, γιατί η διαφορική εξίσωση που λύνουμε είναι γραμμική και θα παίρνει γραμμικά ανεξάρτητα διαν. σε γραμμικά ανεξάρτητα. Και επίσης λόγω $\exists!$ λύσεων $(P^{\gamma}_{t_0,t_1})(\alpha w+v)=\alpha(P^{\gamma}_{t_0,t_1})(w)+(P^{\gamma}_{t_0,t_1})(v)$, άρα γραμμ. απεικόνιση.

<u>Πρόταση:</u> $$\frac{DV}{dt}(t_0)=\lim_{t\to t_0}\frac{(P^{\gamma}_{t_0,t})^{-1}(V(t))-V(t_0)}{t-t_0}$$
για κάθε C^∞ διαν. πεδίο στη γ.

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $\{E_{i,0}\}$ βάση για το $T_{\gamma(t_0)}M$.
και ορίζουμε $E_i(t)$ την παράλληλη μεταφορά του $E_{i,0}$ στη γ.
Τότε $\frac{DE_i(t)}{dt}=0$ και $\{E_i(t)\}$ δίνει βάση για το $T_{\gamma(t)}M$ αφού παίρνει ΓΑ σε ΓΑ διανύσματα.

Άρα γράφουμε $V(t) = \sum_{i=1}^{n} v_i(t) E_i(t) \quad \forall t$

Από τον ορισμό $P^{\gamma}_{t_0,t}$ έχουμε ότι $P^{\gamma}_{t_0,t}(E_{i,0}) = E_i(t)$.

Τότε $\frac{DV}{dt} = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t) E_i(t) + v_i(t) \underbrace{\frac{DE_i(t)}{dt}}_{0}\right) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t) E_i(t)$

και $\frac{DV}{dt}(t_0) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t_0) \cdot E_i(t_0) = \sum_{i=1}^{n} v_i'(t_0) E_{i,0}$.

Από τη γραμμικότητα του $P^{\gamma}_{t_0,t}$ ~~ισχ~~ και ότι 1-1 άρα ισομορφισμός, έχουμε ότι

$\left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}(V(t)) - V(t_0) = \left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t) E_i(t)\right) - V(t_0) =$

$= \sum_{i=1}^{n}\left[v_i(t) \cdot \underbrace{\left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}(E_i(t))}_{= E_{i,0}} - v_i(t_0) \cdot E_{i,0}\right] = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i(t) - v_i(t_0)\right) E_{i,0}$.

Άρα $\lim_{t \to t_0} \frac{\left(P^{\gamma}_{t_0,t}\right)^{-1}(V(t)) - V(t_0)}{t - t_0} = \lim_{t \to t_0} \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{v_i(t) - v_i(t_0)}{t - t_0}\right) E_{i,0} =$

$= \sum_{i=1}^{n} v_i'(t_0) \cdot E_{i,0} \equiv \frac{DV}{dt}(v_0)$

□

<u>Σημείωση</u>: Μέχρι στιγμής, για τον ορισμό $\frac{D}{dt}$ και ∇ δεν έχουμε χρησιμοποιήσει τη μετρική.

Θα θέλαμε ∇, $\frac{D}{dt}$ να "σέβονται" τη μετρική

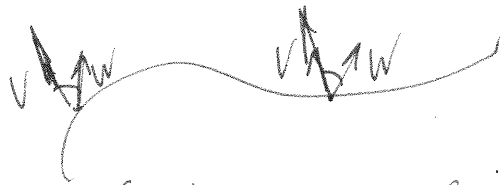
<u>Σύνδεσμοι Riemann</u>:

Έστω $V(t), W(t)$ παράλληλα διαν. πεδία στη γ $\left(\frac{DV}{dt} = \frac{DW}{dt} = 0\right)$.

Όταν M πολ/τα Riemann, τότε ορίζεται $\langle V(t), W(t)\rangle_{\gamma(t)}$

- Θα θέλαμε αυτό το εσωτερικό γινόμενο να παραμένει σταθερό όταν τα $V(t), W(t)$ είναι παράλληλα

-όπως στο $\mathbb{R}^n$



Αυτό συνεπάγεται και $\langle V(t), V(t)\rangle =$ σταθερό $\forall t$

άρα διατηρείται και η νόρμα παράλληλων διαν. πεδίων.

<u>Ορισμός</u>: Έστω (M,g) πολ/τα Riemann με ομοπαραλληλικό σύνδεσμο ∇.

Ο σύνδεσμος ∇ είναι <u>συμβατός</u> με τη μετρική $g = \langle\ ,\ \rangle$ αν για κάθε λεία καμπύλη γ και για κάθε ζεύγος παράλληλων διαν. πεδίων V, W στη γ ισχύει ότι $\langle V(t), W(t)\rangle_{\gamma(t)} =$ σταθερά $\forall t$.

<u>Πρόταση:</u> Έστω M πολλτα Riemann
Ένας σύνδεσμος ∇ στην M είναι συμβατός με τη μετρική της ανν για κάθε ζεύγος C^∞ διαν. πεδίων V, W σε διαφ. καμπύλη $\gamma: I \to M$ ισχύει ότι

$$\frac{d}{dt}(\langle V, W\rangle) = \langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle \quad \forall t \in I$$

<u>Απόδειξη:</u>
($\Leftarrow$) Αν ισχύει η πιο πάνω ισότητα και V, W παράλληλα στη γ τ.ω. $\frac{DV}{dt} = \frac{DW}{dt} = 0$, τότε

$$\frac{d}{dt}(\langle V, W\rangle) = 0 \quad \forall t \quad \Rightarrow \quad \langle V(t), W(t)\rangle = c \text{ σταθερά } \forall t.$$

Άρα ∇ συμβατός με τη μετρική.

($\Rightarrow$) Για $t_0 \in I$ έστω $\{E_{1,0}, \dots, E_{n,0}\}$ ο.κ. βάση για το $T_{\gamma(t_0)}M$.
Τότε για κάθε $E_{i,0}$ υπάρχει μοναδικό παράλληλο διαν. πεδίο $E_i(t)$ στη γ τ.ω. $E_i(t_0) = E_{i,0}$ και $\frac{DE_i}{dt} = 0$ στο I.
Αφού ∇ συμβατός σύνδεσμος, τότε

$$\langle E_i(t), E_j(t)\rangle = \langle E_i(t_0), E_j(t_0)\rangle = \delta_{ij} \quad \forall t \in I.$$

και άρα $\{E_1(t), \dots, E_n(t)\}$ ο.κ. βάση για το $T_{\gamma(t)}M$ $\forall t$.
Αν $V(t), W(t)$ C^∞ διαν. πεδία στη $\gamma(t)$, τότε
$V(t) = \sum_{i=1}^n v_i(t) E_i(t)$ και $W(t) = \sum_{j=1}^n w_j(t) E_j(t)$, με v_i, w_j C^∞ συναρτήσεις.

Άρα $\frac{d}{dt}\left(\langle V(t), W(t)\rangle\right) = \frac{d}{dt}\left(\sum_{i,j=1}^{n} \langle v_i(t) E_i(t), w_j(t) E_j(t)\rangle\right) =$

$= \frac{d}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t) w_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t) w_i(t) + v_i(t) w_i'(t)\right) = (*)$

Επίσης $\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i(t) E_i(t)\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t) E_i(t) + v_i(t) \frac{DE_i}{dt}\right) =$

$= \sum_{i=1}^{n} v_i'(t) E_i(t)$

και παρόμοια $\frac{DW}{dt} = \sum_{j=1}^{n} w_j'(t) E_j(t)$

Άρα $\langle \frac{DV}{dt}, W\rangle + \langle V, \frac{DW}{dt}\rangle = \sum_{i,j}\Big[\langle v_i'(t) E_i(t), w_j(t) E_j(t)\rangle$

$+ \langle v_i(t) E_i(t), w_j'(t) E_j(t)\rangle\Big] =$

$= \sum_{i=1}^{n}\left(v_i'(t) w_i(t) + v_i(t) w_i'(t)\right)$ αφού $\{E_i\}$ o.κ.

$= (*)$

$\square$.

Πόρισμα: Ένα συνδεσμός ∇ είναι συμβατός με τη μετρική μιας πολλ/τας Riemann ανν

$$X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M).$$

Απόδειξη: Στο σημείο p $X\langle Y,Z\rangle$, $\nabla_X Y$ και $\nabla_X Z$ εξαρτώνται μόνο από την τιμή του X στο p, $X(p)$ και τις τιμές των Y, Z σε καμπύλη $\gamma(t)$ με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=X(p)$.

Τότε $\quad X\langle Y,Z\rangle = \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle\Big|_{t=0}$

και $\quad \nabla_X Y = \frac{DY}{dt}, \quad \nabla_X Z = \frac{DZ}{dt}.$

Άρα $\quad X\langle Y,Z\rangle\Big|_p = \langle \nabla_X Y, Z\rangle\Big|_p + \langle \nabla_X Z, Y\rangle\Big|_p$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt}\langle Y, Z\rangle\Big|_{t=0} = \left\langle \frac{DY}{dt}, Z\right\rangle\Big|_{t=0} + \left\langle Y, \frac{DZ}{dt}\right\rangle\Big|_{t=0}$$

το οποίο ισχύει από την προηγούμενη πρόταση $\square$.

Πρόταση: Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:

(i) Ο συνδεσμός ∇ είναι συμβατός με τη μετρική

(ii) $\forall V, W$ C^∞ διαν. πεδία σε C^∞ καμπύλη γ

$$\frac{d}{dt}\langle V, W\rangle = \left\langle \frac{DV}{dt}, W\right\rangle + \left\langle V, \frac{DW}{dt}\right\rangle$$

(iii) $\forall V, W$ παράλληλα C^∞ διαν. πεδία σε C^∞ καμπύλη γ
$\langle V, W\rangle =$ σταθερά

(iv) $\forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M) \quad X\langle Y, Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle.$

(v) $\forall$ C^∞ καμπύλη γ η παράλληλη μεταφορά
$P^{\gamma}_{t_0,t_1} : T_{\gamma(t_0)}M \to T_{\gamma(t_1)}M$ είναι ισομετρία $\forall t_0, t_1$

* Άσκηση 632 - από την απόδειξη της πρότασης.

<u>Ορισμός:</u> Ένας σύνδεσμος ∇ σε C^∞ πολ/τα M ονομάζεται <u>συμμετρικός</u> αν

$$\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X,Y] \qquad \forall X,Y \in \mathfrak{X}(M).$$

<u>Παρατήρηση:</u> Σε χάρτη συντεταγμένων (U,X) $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right]=0$.

άρα $$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} = 0 \quad \forall i,j$$

$$\Leftrightarrow \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^{k} - \Gamma_{ji}^{k}\right) \frac{\partial}{\partial x_k} = 0 \quad \forall i,j$$

$$\Leftrightarrow \Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \quad \forall i,j,k.$$

∇ συμμετρικός ανν $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ij}^{k}$ $\forall i,j,k$

-συμμετρία για σύμβολα Christoffel στην κάτω θέση.

<u>Θεώρημα</u> (Θεμελιώδες Θεώρημα της Γεωμετρίας Riemann/ Θεώρημα Levi-Civita).

Έστω (M,g) πολ/τα Riemann.
Τότε υπάρχει ένας μοναδικός σύνδεσμος ∇ στην M
ο οποίος είναι (a) συμμετρικός και
(b) συμβατός με τη μετρική.

Ο σύνδεσμος αυτός ονομάζεται σύνδεσμος Levi-Civita.

<u>Απόδειξη:</u> Υποθέτουμε ότι υπάρχει για να τον υπολογίσουμε.

$$X\langle Y,Z\rangle = \langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle Y, \nabla_X Z\rangle$$

$$Y\langle Z,X\rangle = \langle \nabla_Y Z, X\rangle + \langle Z, \nabla_Y X\rangle$$

$$Z\langle X,Y\rangle = \langle \nabla_Z X, Y\rangle + \langle X, \nabla_Z Y\rangle$$

$$\therefore X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle =$$

$$= \langle \nabla_X Y + \nabla_Y X, Z\rangle + \langle \nabla_X Z - \nabla_Z X, Y\rangle + \langle \nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X\rangle =$$

$$= 2\langle \nabla_X Y, Z\rangle + \langle [Y,X], Z\rangle + \langle [X,Z], Y\rangle + \langle [Y,Z], X\rangle =$$

$$\Rightarrow \langle \nabla_X Y, Z\rangle = \frac{1}{2}\Big[X\langle Y,Z\rangle + Y\langle Z,X\rangle - Z\langle X,Y\rangle - \langle [Y,X], Z\rangle - \langle [X,Z], Y\rangle + \langle [Z,Y], X\rangle \Big] = (*)$$

Παρατηρούμε ότι το Δ.Μ $(*)$ εξαρτάται μόνο από τη μετρική αφού $[\,,\,]$ δίνεται από την πολ/τα.

Άρα αν ∇ υπάρχει τότε είναι μοναδικός γιατί $\langle \nabla^1_X Y, Z\rangle = \langle \nabla^2_X Y, Z\rangle$ $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ λόγω της ισότητας με $(*)$ πιο πάνω και των δύο.

Ταυτόχρονα αν ορίσουμε $\nabla_X Y$ τ.ω. $\langle \nabla_X Y, Z\rangle = (*)$ $\forall X,Y,Z \in \mathfrak{X}(M)$ τότε μπορούμε να δείξουμε ότι ∇ είναι σύνδεσμος (ικανοποιεί (i),(ii),(iii) του ορισμού συνδέσμου) και είναι συμμετρικός και συμβατός (632: Άσκηση).

$\square$

Υπολογισμός ∇ μέσω $(*)$ σε ~~χάρτη~~ συντεταγμένων $(U, \mathbf{X})$. Αρκεί να βρούμε τα Γ_{ij}^{k}.

Υπενθύμιση: $\left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] = 0 \quad \forall i,j$

Άρα από $(*)$:

$$\left\langle \nabla_{\partial/\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_l} \right\rangle = \sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m} \cdot g_{ml} =$$
$$= \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{il}) - \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij})\right]$$

Έστω $(g^{lk})_{lk}$ ο αντίστροφος πίνακας του $(g_{ij})_{ij}$

τ.ω. $\sum_{j=1}^{n} g_{ij}\, g^{jk} = \delta_i^k$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη με g^{lk} και προσθέτοντας ως προς l:

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{m=1}^{n} \Gamma_{ij}^{m} \underbrace{g_{ml} \cdot g^{lk}}_{\delta_{km}} = \sum_{l=1}^{n} g^{lk} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial x_i}(g_{jl}) + \frac{\partial}{\partial x_j}(g_{il}) - \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij})\right]$$

$$\Rightarrow \boxed{\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left[g_{jl,i} + g_{il,j} - g_{ij,l}\right]}$$

όπου $g_{ij,l} := \frac{\partial}{\partial x_l}(g_{ij})$.

Παρατηρούμε ότι $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k} \quad \forall i,j$.

- Στον ευκλείδιο χώρο $\Gamma_{ij}^{k} \equiv 0 \rightarrow$ επίπεδος.

Πόρισμα: Σε μια περιοχή συντεταγμένων μιας πολλαπλότητας Riemann όπου η μετρική γράφεται ως
$g = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}\, dx^i dx^j$ τα σύμβολα Christoffel του συνδέσμου Levi-Civita δίνονται από:

$$\Gamma_{ij}^{\ \ k} = \frac{1}{2} \sum_{l} g^{kl} \left(g_{il,j} + g_{jl,i} - g_{ij,l} \right)$$

Θεώρημα: Έστω $i: (M^n, g_M) \to (\tilde{M}^{n+m}, g_{\tilde{M}})$ μια ισομετρική εμβύθιση της M στην $\tilde{M}$ με $g_M = i^*(g_{\tilde{M}})$.
Για διαν. πεδία X, Y στην M που επεκτείνονται σε διαν. πεδία $\tilde{X}, \tilde{Y} \in \mathfrak{X}(\tilde{M})$ ορίζουμε
$\nabla_X Y :=$ προβολή του $\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y}$ στον εφαπτόμενο χώρο της M,
όπου $\tilde{\nabla}$ ο σύνδεσμος Levi-Civita της $\tilde{M}$.
Τότε ∇ είναι ο σύνδεσμος Levi-Civita της M.

Πόρισμα: Έστω $i: M^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$ με $g_M = i^* g_{\mathbb{R}^3}$
$\mathbb{R}^3$: ευκλείδιος χώρος.
Ένα διανυσματικό πεδίο $V(t) \in T_{\gamma(t)} M$ σε καμπύλη γ στην M ~~ειναι~~ είναι παράλληλο ανν.
$\frac{dV}{dt} \perp T_{\gamma(t)} M \subset \mathbb{R}^3$, όπου $\frac{dV}{dt}$ η συνήθης παράγωγος του $V(t): I \to \mathbb{R}^3$.

Παρ. Υπολογισμός Γ_{ij}^{k} για S^2 σε σφαιρικές συντεταγμένες (ϕ,θ) όπου $g = d\phi^2 + \sin^2\phi \cdot d\theta^2$

Έχουμε $\partial_1 = \frac{\partial}{\partial \phi}$ $\quad \partial_2 = \frac{\partial}{\partial \theta}$ $\quad g_{11} = 1$ $\quad g_{12} = g_{21} = 0$ $\quad g_{22} = \sin^2\phi$

$$g^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^{-2}\phi \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2} g^{11}\left[g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right] + \frac{1}{2} \cancel{g^{12}}\left[g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} \cancel{g^{21}}\left[g_{11,1} + g_{11,1} - g_{11,1}\right] + \frac{1}{2} g^{22}\left[g_{12,1} + g_{12,1} - g_{11,2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{21}^{1} = \frac{1}{2} \cdot g^{11}\left[g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}\right] + \frac{1}{2} \cancel{g^{12}}\left[g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right] = 0$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \Gamma_{21}^{2} = \frac{1}{2} \cancel{g^{21}}\left[g_{11,2} + g_{21,1} - g_{12,1}\right] + \frac{1}{2} g^{22}\left[g_{12,2} + g_{22,1} - g_{12,2}\right] =$$

$$= \frac{1}{2} \sin^{-2}\phi \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin^2\phi) = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$\Gamma_{22}^{1} = \frac{1}{2} g^{11}\left[g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}\right] + \frac{1}{2} \cancel{g^{12}}\left[g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right] =$$

$$= \frac{-1}{2} \cdot \frac{\partial}{\partial \phi}(\sin^2\phi) = -\sin\phi\cos\phi$$

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2} \cancel{g^{21}}\left[g_{21,2} + g_{21,2} - g_{22,1}\right] + \frac{1}{2} \cdot g^{22}\left[g_{22,2} + g_{22,2} - g_{22,2}\right] = 0$$

Για πιο απλό συμβολισμό $\partial\phi = \partial/\partial\phi$ $\quad \partial\theta = \partial/\partial\theta$.

$$\nabla_{\partial\phi}\partial\phi = \Gamma_{11}^{1}\partial\phi + \Gamma_{11}^{2}\partial\theta = 0$$

$$\nabla_{\partial\theta}\partial\phi = \nabla_{\partial\phi}\partial\theta = \Gamma_{12}^{1}\partial\phi + \Gamma_{12}^{2}\partial\theta = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\partial\theta$$

$$\nabla_{\partial\theta}\partial\theta = \Gamma_{22}^{1}\partial\phi + \Gamma_{22}^{2}\partial\theta = -\sin\phi\cdot\cos\phi\,\partial\phi.$$

Εναλλακτικά:

$$\langle\nabla_{\partial\phi}\partial\phi, \partial\theta\rangle = \partial\phi\langle\partial\phi,\partial\theta\rangle - \langle\partial\phi, \nabla_{\partial\phi}\partial\theta\rangle = -\langle\partial\phi, \nabla_{\partial\theta}\partial\phi\rangle =$$

$$= -\frac{1}{2}\partial\theta\langle\partial\phi,\partial\phi\rangle = 0$$

$$\langle\nabla_{\partial\phi}\partial\phi, \partial\phi\rangle = \frac{1}{2}\partial\phi\langle\partial\phi,\partial\phi\rangle = 0$$

$$\Rightarrow \nabla_{\partial\phi}\partial\phi = 0.$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\phi, \partial\phi\rangle = \frac{1}{2}\partial\theta\langle\partial\phi,\partial\phi\rangle = 0$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\phi, \partial\theta\rangle = \langle\nabla_{\partial\phi}\partial\theta, \partial\theta\rangle = \frac{1}{2}\partial\phi\langle\partial\theta,\partial\theta\rangle = \sin\phi\cdot\cos\phi.$$

$$\therefore \nabla_{\partial\theta}\partial\phi = \langle\nabla_{\partial\theta}\partial\phi, \partial\theta\rangle\cdot\frac{\partial\theta}{|\partial\theta|^2} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\partial\theta$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\theta, \partial\phi\rangle = -\langle\partial\theta, \nabla_{\partial\theta}\partial\phi\rangle = -\sin\phi\cos\phi.$$

$$\langle\nabla_{\partial\theta}\partial\theta, \partial\theta\rangle = \frac{1}{2}\partial\theta\langle\partial\theta,\partial\theta\rangle = 0$$

$$\therefore \nabla_{\partial\theta}\partial\theta = \langle\nabla_{\partial\theta}\partial\theta, \partial\phi\rangle\cdot\frac{1}{|\partial\phi|^2}\partial\phi = -\sin\phi\cos\phi\,\partial\phi.$$

Άσκηση: $S^2 \subset \mathbb{R}^3$

Έστω $\gamma(t)$ μεγάλος κύκλος με μέτρο ταχύτητας 1.

Δείξτε ότι $\gamma'(t)$ είναι παράλληλο διαν. πεδίο στη γ.

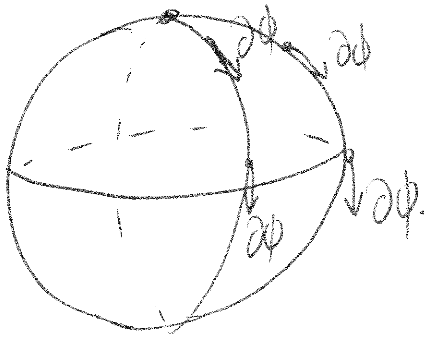
Δείξτε ότι δεν ισχύει για παράλληλους κύκλους

• Κατάλληλος χάρτης τ.ω. $\gamma(t)$ μεσημβρινός

Σε σφαιρική $\gamma(t) = (t+\varphi_0, \theta_0)$ $t \in I$

Τότε $\gamma'(t) = \frac{\partial}{\partial\varphi}$ και $\frac{D(\gamma'(t))}{dt} = \nabla_{\gamma'(t)} \gamma'(t) = \nabla_{\partial\varphi} \partial\varphi = 0.$

• Παράλληλη μεταφορά του $\partial\varphi$ σε μεγάλο κύκλο είναι το $\partial\varphi$.



Εξισώσεις για εύρεση παράλληλου διαν. πεδίου στην $S^2 \hookrightarrow \mathbb{R}^3$.

$$\frac{DV}{dt} = 0 \iff v_k'(t) + \sum_{i,j=1}^{2} \Gamma_{ij}^{k}\, \gamma_i'(t)\, v_j(t) = 0 \quad \forall k = 1,2$$

$$\text{με} \quad V(0) = v_{0,1}\frac{\partial}{\partial\phi} + v_{0,2}\frac{\partial}{\partial\theta}.$$

Στη γενική περίπτωση $\gamma(t)$ - δύσκολη η επίλυση.

Παραδείγματα: $\gamma(t) = (t+\phi_0, \theta_0)$

$$\gamma'(t) = (1,0) = \frac{\partial}{\partial\phi} \qquad \gamma_1' = 1, \quad \gamma_2' = 0.$$

$$\therefore\ v_1' + \sum_{j=1}^{2} \Gamma_{1j}^{1} v_j = 0 \Rightarrow v_1' = 0 \Rightarrow v_1(t) = v_{0,1}$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \Gamma_{12}^{1} = 0$$

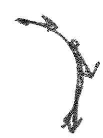
$$v_2' + \sum_{j=1}^{2} \Gamma_{1j}^{2} v_j = 0 \Rightarrow v_2' + \frac{\cos\phi}{\sin\phi}\Big|_{\gamma(t)} v_2 = 0$$

$$\Gamma_{11}^{2} = 0 \qquad \Gamma_{12}^{2} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2'}{v_2} = -\frac{\cos(t+\phi_0)}{\sin(t+\phi_0)} \Rightarrow \ln|v_2|\Big|_{v_{0,2}}^{v_2} = -\ln|\sin(t+\phi_0)|\Big|_{t=0}^{t}$$

$$\Rightarrow \frac{v_2}{v_{0,2}} = \frac{\sin\phi_0}{\sin(t+\phi_0)} \Rightarrow v_2 = v_{0,2}\frac{\sin(\phi_0)}{\sin(t+\phi_0)}.$$

Αν $v_{0,2} = 0 \Rightarrow V(t) = v_{0,1}\dfrac{\partial}{\partial\phi}$ → διατηρεί τα διαν. πεδία στην κατεύθυνση $\partial/\partial\phi$



Αν $v_{0,1} = 0 \Rightarrow V(t) = v_{0,2}\cdot\dfrac{\sin\phi_0}{\sin(t+\phi_0)}\dfrac{\partial}{\partial\theta}$

με $\|V(t)\| = |v_{0,2}\sin\phi_0| =$ σταθερά.

· Εξισώσεις για παράλληλη μεταφορά στη $\gamma(t) = (\phi_0, t+\theta_0)$ πιο πολύπλοκες:

$$\left.\begin{aligned} &v_1' - \sin\phi_0\cos\phi_0\, v_2 = 0 \\ &v_2' + \frac{\cos\phi_0}{\sin\phi_0} v_1 = 0 \end{aligned}\right\} \text{ κυκλική κίνηση } v_1, v_2.$$