## Γεωδαισιακές:

<u>Ορισμός:</u> Μια παραμετρισμένη καμπύλη $\gamma: I \to M$ ονομάζεται <u>γεωδαισιακή</u> αν $\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right)=0 \quad \forall t \in I.$

Ο περιορισμός της $\gamma$ σε $[a,b] \subset I$ ονομάζεται <u>γεωδαισιακό τόξο</u> που ενώνει τα $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$.

<u>Παρατήρηση:</u> $\frac{d}{dt}\left(\left\langle\frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle\right) = 2\left(\left\langle\frac{D}{dt}\left(\frac{d\gamma}{dt}\right), \frac{d\gamma}{dt}\right\rangle\right) = 0$

$\Rightarrow \|\gamma'(t)\| = c$ σταθερά $\forall t.$, δηλαδή ισοταχής.

Για γεωδαισιακή υποθέτουμε $c \neq 0$ έτσι ώστε η $\gamma$ να μην είναι σημείο.

Το μήκος τόξου της $\gamma$ ισούται με: $s(t) = \int_{t_0}^{t} \left\|\frac{d\gamma}{dt}\right\| dt = c(t-t_0).$

Η $\gamma$ ονομάζεται κανονικοποιημένη γεωδαισιακή αν $c=1$.

<u>Εξισώσεις γεωδαισιακής σε τοπικές συντεταγμένες:</u>

Η $\gamma(t)$ είναι γεωδαισιακή ανν.

$$\sum_k \left(\gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k} \gamma_i'(t)\gamma_j'(t)\right)\frac{\partial}{\partial x_k} = 0$$

$$\Leftrightarrow \gamma_k''(t) + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^{k}\gamma_i'(t)\gamma_j'(t) = 0 \qquad \forall k=1,\dots,n.$$

για $\gamma(t) = (\gamma_1(t),\dots,\gamma_n(t))$.

- Σύστημα εξισώσεων $2^{ου}$ βαθμού.

Για να αποδείξουμε την ύπαρξη λύσεων, το μετατρέπουμε σε σύστημα πρώτου βαθμού.

Θεωρούμε $\alpha(t) = (\gamma_1(t), \ldots, \gamma_n(t), \gamma_1'(t), \ldots, \gamma_n'(t))$

$= (x_1(t), \ldots, x_n(t), y_1(t), \ldots, y_n(t))$.

καμπύλη στην εφ. δέσμη TM.

Η $\gamma$ είναι γεωδαισιακή ανν

$$\left.\begin{aligned}
x_1'(t) &= y_1(t) \\
x_2'(t) &= y_2(t) \\
&\vdots \\
x_n'(t) &= y_n(t) \\
y_1'(t) &= (x_1''(t) =) - \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^1 y_i(t) y_j(t) \\
&\vdots \\
y_n'(t) &= (x_n''(t) =) - \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^n y_i(t) y_j(t).
\end{aligned}\right\} \quad (*)$$

Σύστημα εξισώσεων 1ου βαθμού στην εφ. δέσμη TM η οποία είναι πολλ/τα με χάρτη $(U \times \mathbb{R}^n, X \times id_{\mathbb{R}^n})$

Πρόταση.

Από Θεώρημα ύπαρξης και μοναδικότητας λύσεων στο TM.

$\forall p \in M$ : υπάρχει ανοικτή γειτονιά $V$ του $p$ στην $M$ και, $\delta > 0$, $\varepsilon_1 > 0$ και μια $C^\infty$ μοναδική απεικόνιση

$\alpha : (-\delta, \delta) \times \mathcal{U} \to M$ όπου $\mathcal{U} = \{(q, v) \in TM \mid q \in V, |v| < \varepsilon_1\}$

έτσι ώστε η καμπύλη $t \mapsto \alpha(t, q, v)$

για $t \in (-\delta, \delta)$ να ικανοποιεί το σύστημα (*)

με την ιδιότητα $\alpha(0, q, v) = (q, v)$ σε συντεταγμένες.

για κάθε $q \in V$ και $|v| < \varepsilon_1$

$$\alpha(t,q,v) = (\underbrace{x_1(t),\dots,x_n(t)}_{\gamma(t)},\ \underbrace{y_1(t),\dots,y_n(t)}_{\gamma'(t)})$$

Ορίζοντας $\gamma(t) = \pi \circ \alpha(t,q,v)$ όπου $\pi : TM \to M$ προβολή, τότε η $\gamma(t)$ ικανοποιεί τις εξισώσεις γεωδαισιακής ~~με~~ $\gamma(0)=q$ και $\gamma'(0)=v$.

Δηλαδή για $|v|$ αρκετά μικρό, υπάρχει πάντα μοναδική γεωδαισιακή από το $q\in V$ με ~~ταχύ~~ αρχική ταχύτητα $v$.

---

<u>Λήμμα:</u> (Ομοιογένεια γεωδαισιακών). -

$$\alpha(ct,q,v) = \alpha(t,q,cv) \quad \forall c>0. \text{ και για } t\in\left(-\tfrac{\delta}{c},\tfrac{\delta}{c}\right)$$

- Δηλαδή μπορούμε να ξεκινήσουμε με μεγαλύτερη αρχική ταχύτητα για $\gamma$, αλλα για μικρότερο χρονικό διάστημα.

- Από τον τύπο της εξίσωσης - Απόδειξη στο Do Carmo. Λήμμα 2.6.

---

<u>Παραδείγματα:</u>

① Γεωδαισιακές στον $\mathbb{R}^n$: $\quad \gamma_k''=0 \ \forall k \Rightarrow \gamma(t) = p + t v_0$

② $S^2$: $\gamma_k'' + \Gamma_{11}^k(\gamma_1')^2 + 2\Gamma_{12}^k \gamma_1'\cdot\gamma_2' + \Gamma_{22}^k(\gamma_2')^2 = 0$ για $k=1,2$.

Πρακτικά δύσκολη η εύρεση για κάθε αρχική συνθήκη. Όμως $\gamma(t) = (t+\phi_0, \theta_0)$ με $\gamma'(t) = \partial/\partial\phi$ ικανοποιεί

$\nabla_{\partial/\partial\phi}\, \partial/\partial\phi = 0 \Leftrightarrow \nabla_{\gamma'}\gamma' = 0 \quad \therefore$ γεωδαισιακή.

Για $p\in S^2$ και $v\in T_pS^2$ έστω $(\phi,\theta)$ σφαιρική συντετ. με βόρειο

Τότε $\gamma(t) = (ct + \phi_0, \theta_0)$ είναι γεωδαισιακή με
$\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = c \cdot \frac{\partial}{\partial \phi} = v$

Άρα από μοναδικότητα, η $\gamma(t)$ είναι η μοναδική γεωδαισιακή που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες.
Η $\gamma(t)$ είναι μεγάλος κύκλος, άρα όλες οι γεωδαισιακές στην $S^2$ είναι μεγάλοι κύκλοι.

—

Για $\tilde{\gamma}(t) = (\phi_0, t + \theta_0)$, $\tilde{\gamma}'(t) = \frac{\partial}{\partial \theta}$ και

$\nabla_{\tilde{\gamma}'} \tilde{\gamma}' = \nabla_{\partial/\partial\theta} \partial/\partial\theta = -\sin\phi_0 \cos\phi_0 \frac{\partial}{\partial \phi} \neq 0$ εκτός

αν $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ ($\phi_0 = 0, \pi$ δε δίνει καμπύλη) και

$\tilde{\gamma}$ είναι ο ισημερινός - μεγάλος κύκλος

$\therefore$ Στην $S^2$ $\gamma$ είναι γεωδαισιακή αν μεγάλος κύκλος

<u>Θεώρημα</u> φυσικότητας του συνδέσμου Levi-Civita:

Έστω $\phi : (M, g) \to (\tilde{M}, \tilde{g})$ ισομετρικός διαφορομορφισμός τ.ω. $g_{\tilde{M}}(\phi_*(V), \phi_*(W)) = g_M(V, W)$, και $\nabla, \tilde{\nabla}$ οι σύνδεσμοι L-C στις $M$ και $\tilde{M}$ αντίστοιχα. Τότε

(a) $\phi_*(\nabla_V W) = \tilde{\nabla}_{\phi_*(V)} \phi_*(W)$

(b) Αν $\gamma$ καμπύλη στην $M$ και $V$ διαν. πεδίο στη $\gamma$ τότε $\phi_*\left(\frac{DV}{dt}\right) = \frac{\tilde{D}(\phi_*(V))}{dt}$

(c) Η $\phi$ παίρνει γεωδαισιακές σε γεωδαισιακές.
Δηλαδή αν η $\gamma$ είναι γεωδ. στην $M$ με $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v$, τότε η $\phi \circ \gamma$ είναι γεωδ. στην $\tilde{M}$ με $\phi \circ \gamma(0) = \phi(p)$ και $(\phi \circ \gamma)'(0) = \phi_*(v)$.

Απόδειξη:

(a) Ορίζουμε $\phi^*(\tilde{\nabla})$ τ.ω. $(\phi^*\tilde{\nabla})_V W = (\phi_*)^{-1}\left(\tilde{\nabla}_{\phi_*(V)}\phi_*(W)\right)$

- Αρκεί ν.δ.ο. $\phi^*(\tilde{\nabla})$ είναι σύνδεσμος L-C στην $M$, άρα ισούται με $\nabla$.

(b) Έστω $\{E_k\}$ ο.κ. βάση του $T_pM$.
Τότε $\{\phi_*(E_k)\}$ ο.κ. του $T_{\phi(p)}\tilde{M}$ αφού $\phi$ ισομετρία

$$\frac{DV}{dt} = \frac{D}{dt}\left(\sum_k v_k E_k\right) = \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' v_j\right) E_k$$

$$\therefore \phi_*\left(\frac{DV}{dt}\right) = \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' v_j\right) \phi_*(E_k)$$

με $\phi_*(V) = \sum_k v_k \phi_*(E_k)$.

Από (a), αφού $\phi_*(\nabla_{E_i}E_j) = \tilde{\nabla}_{\phi_*(E_i)}\phi_*(E_j)$ και
είναι και οι δύο βάσεις ο.κ., τότε $\Gamma_{ij}^k = \tilde{\Gamma}_{ij}^k$

Άρα
$$\frac{\tilde{D}(\phi_*(V))}{dt} = \frac{\tilde{D}}{dt}\left(\sum_k v_k \phi_*(E_k)\right) = \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \tilde{\Gamma}_{ij}^k \gamma_i' v_j\right)\phi_*(E_k)$$
$$= \sum_k \left(v_k' + \sum_{i,j} \Gamma_{ij}^k \gamma_i' v_j\right)\phi_*(E_k) = \phi_*\left(\frac{DV}{dt}\right)$$

(c) $M \xrightarrow{\phi} \tilde{M}$, $\mathbb{R} \xrightarrow{\gamma} M$ $\qquad (\phi\circ\gamma)' = \phi_*(\gamma')$.

Αν $\gamma' = \sum \gamma_i' E_i \Rightarrow \phi_*(\gamma') = \sum_i \gamma_i' \phi_*(E_i)$

$$\frac{\tilde{D}(\phi_*(\gamma'))}{dt} \overset{(b)}{=} \phi_*\left(\frac{D\gamma'}{dt}\right)$$ άρα αν $\frac{D\gamma'}{dt} = 0 \Rightarrow$ η $\phi\circ\gamma$ είναι γεωδαισιακή.

$\square$

<u>Θεώρημα</u>. Έστω $i: M^n \hookrightarrow \tilde{M}^{n+k}$ εμβύθιση της πολλαπλότητας $M$ στην πολλ. Riemann $(\tilde{M}, g_{\tilde{M}})$.

Έστω $g_M = i^*(g_{\tilde{M}})$.

Αν $X, Y$ διαν. πεδία στην $M$, τότε γνωρίζουμε ότι αυτά επεκτείνονται σε διαν. πεδία $\tilde{X}, \tilde{Y}$ στην $\tilde{M}$ σε ανοικτό υποσύνολο της.

Έστω $(\nabla_X Y)_p$ η προβολή του $(\tilde{\nabla}_{\tilde{X}} \tilde{Y})_p$ στο $T_pM$.

όπου $\tilde{\nabla}$ ο σύνδεσμος L-C της $\tilde{M}$.

Άρα $\nabla$ είναι ο σύνδεσμος L-C της $M$.

(Άσκηση).

<u>Πόρισμα</u>: $\frac{DV}{dt} = 0$ στην $M$ ανν $\frac{\tilde{D}V}{dt}$ κάθετο στον υποχώρο $T_pM$ του $T_p\tilde{M}$.

<u>Εκθετική Απεικόνιση:</u>

Έστω $p\in M$, $\mathcal{U}\subset TM$ με $\mathcal{U}=\{(p,v)\in TM \mid p\in V,\ v\in T_pM,\ |v|<\varepsilon_1\}$.

$\mathcal{U}$: το σύνολο στο οποίο η γεωδαισιακή με αρχική συνθήκη $\gamma(0)=p\in V$ και $\gamma'(0)=v$ ορίζονται.

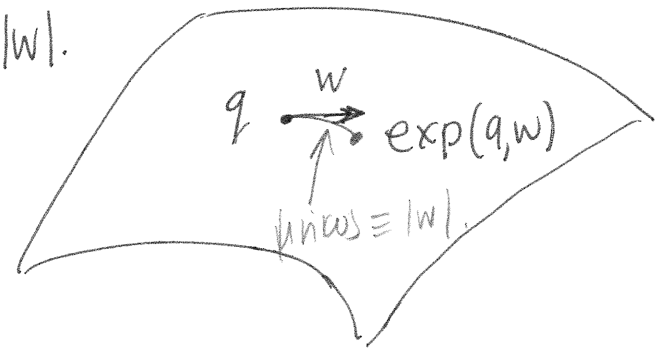
$\alpha(t,p,v)$: η λύση της διαφ. εξίσωσης για γεωδαισιακές.
* ~~λύση~~ η προβολή της λύσης στην $M$ $\alpha=(x(t),x'(t))$ ?

Ομοιομορφία γεωδ: $\alpha(ct,p,v)=\alpha(t,p,cv)$.

<u>Ορισμός:</u> Η απεικόνιση $\exp:\mathcal{U}\to M$. με
$\exp(q,w)=\alpha(1,q,w)$ $\left(=\alpha\left(|w|,q,\frac{w}{|w|}\right)\right)$
για κάθε $(q,w)\in\mathcal{U}$ ονομάζεται <u>εκθετική</u> <u>απεικόνιση</u> στο $\mathcal{U}$

- Οι διαφ. εξισώσεις έδιναν ότι $\alpha(t,q,w)$ είναι $C^\infty$ ως προς $q,w$, άρα και η $\exp$ είναι διαφ.

- $\exp(q,w)$: Προχωράμε για χρόνο $|w|<\varepsilon_1$ στη γεωδαισιακή $\gamma$ που ξεκινά στο $q$ με αρχική ταχύτητα $\frac{w}{|w|}$. Αφού $|\gamma'(0)|=\left|\frac{w}{|w|}\right|=1$, τότε χρόνος = μήκος, άρα το μήκος τόξου της γεωδαισιακής $\alpha\left(t,q,\frac{w}{|w|}\right)$ για $t\in[0,|w|]$ είναι $|w|$.



• Για κάθε $q \in V$ ορίζουμε $\exp_q : B_{\varepsilon_1}(0) \subset T_qM \to M$
$w \longmapsto \exp(q,w)$.

Η $\exp_q$ είναι επίσης $C^\infty$ και $\exp_q(0) = \alpha(1,q,0) = q$.

<u>Πρόταση: 1</u> Για κάθε $q \in M$ $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω.
$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$ είναι
διαφορομορφισμός του $B_\varepsilon(0)$ επί ανοικτού συνόλου της $M$.
Η εικόνα $U_q = \exp_q(B_\varepsilon(0))$ ονομάζεται
<u>κανονική γειτονιά του $q$.</u>

<u>Απόδειξη:</u> Αρκεί ν.δ.ο. $(d\exp_q)_0$ είναι αντιστρέψιμη
και να χρησιμοποιήσουμε θεώρημα αντιστρόφου.

$(d\exp_q)_0 : T_0(T_qM) \to T_qM$
όπου $T_0(T_qM)$ ταυτίζεται με $T_qM$. αφού είναι
και οι δύο ισομορφικοί με $\mathbb{R}^n$.

Θα δείξουμε ότι $(d\exp_q)_0$ είναι η ταυτοτική απεικόνιση

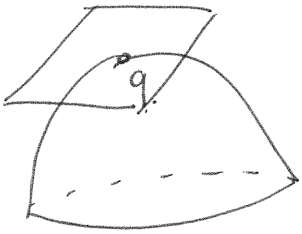
Για υπολογισμό $(d\exp_q)_0(v)$ χρειαζόμαστε μια καμπύλη στο
$T_0(T_qM)$ $(\mathbb{R}^n)$ με $\beta(0)=0$ και $\beta'(0) = v$.
Μπορούμε να πάρουμε $\beta(t) = tv$

Τότε $\underset{\substack{\shortparallel \\ \phi_*(v)}}{(d\exp_q)_0(v)} = \underset{\substack{\shortparallel \\ (\phi\circ\beta)'(0)}}{\frac{d}{dt}(\exp_q(tv))\Big|_{t=0}} = \frac{d}{dt}(\alpha(1,q,tv))\Big|_{t=0}$

$= \frac{d}{dt}(\alpha(t,q,v))\Big|_{t=0} = v$ $\alpha$: γεωδ. από $q$ στο $t=0$ με
ταχύτητα $v$ στο $t=0$.

$\therefore \ (d\exp_q)_0 = Id_{T_qM}$

$\therefore$ $\exp_q$ είναι διαφορομορφισμός από γειτονιά $B_\varepsilon(0)$ για $\varepsilon$ μικρό σε ανοικτή γειτονιά του $q$.




$$\exp_q : B_\varepsilon(0) \subset T_qM \to M$$
$$(d\exp_q)_0 : T_0(T_qM) \to T_qM.$$


$T_qM$

Παραδείγματα: ① $M = \mathbb{R}^n$ γεωδαισιακές είναι ευθείες γραμμές.

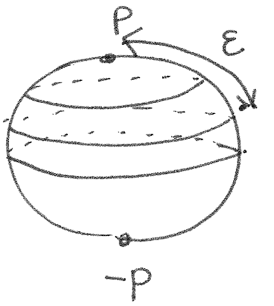
$\exp_q : B_\varepsilon(0) \to M$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση.

$$\alpha(t,q,v) = q + tv.$$
$$\exp_q(v) = q + v \cong \mathbb{R}^n.$$

② $S^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ οι μεγάλοι κύκλοι με ταχύτητα 1 είναι γεωδαισιακές.

Για $p \in S^n$ $v \in T_pS^n$ η γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$ $\gamma'(0) = v$ είναι ο μεγάλος κύκλος που βρίσκεται στην τομή της $S^n$ με το επίπεδο που περνά από $0 \in \mathbb{R}^{n+1}$ και το $p \in \mathbb{R}^{n+1}$ και είναι παράλληλο με το $v$.

$S^2$.




$\exp_p(\overline{B}_\varepsilon(0))$ = τμήμα πολικού τομέα μέχρι παράλληλο με μήκος τόξου $\varepsilon = \Phi_0$.

$$\exp_p(\overline{B_\pi}(0)) = S^2$$
$$\exp_p(\partial B_\pi(0)) = -p.$$

Κανονικές Συντεταγμένες:

Η ιδιότητα $(d\exp_p)_0 = Id_{T_pM}$ δίνει σημαντικές πληροφορίες για μια πολλαπλότητα Riemann στο p.

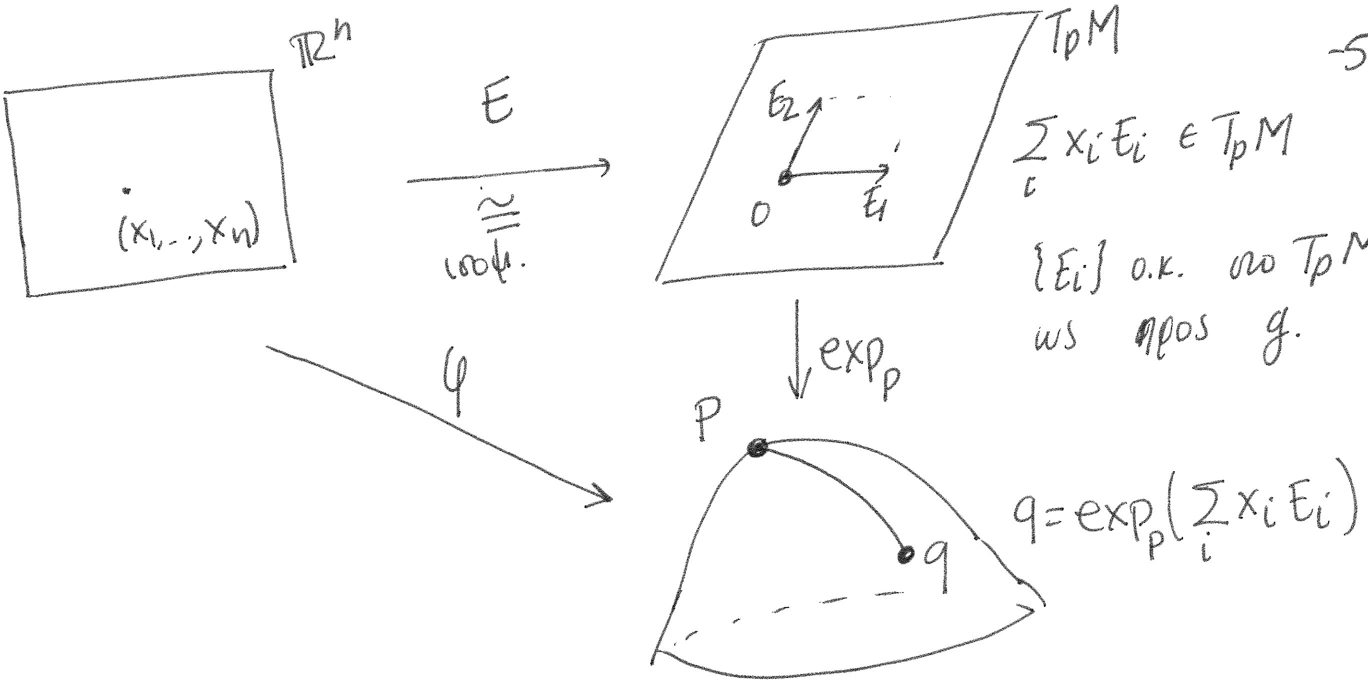
Έστω $B_\varepsilon(0) = \{\vec{v} \in T_pM \mid |\vec{v}|_g < \varepsilon\}$

Τότε $(\exp_p)(B_\varepsilon(0)) = \mathcal{U}$ ονομάζεται γεωδαισιακή μπάλα ακτίνας ε του p στην M.

Χρησιμοποιούμε την $\exp_p$ για να πάρουμε κάποιες εξειδικευμένες συντεταγμένες σε μια γειτονιά του p:

Λήμμα 2 Έστω $\{E_i\}_i$ ο.κ. βάση για $T_pM$ στη μετρική g.
Τότε έχουμε ένα ισομορφισμό
$E: \mathbb{R}^n \to T_pM$ τ.ω. $E(x_1, \dots, x_n) = \sum_i x_i E_i$

Ορισμός: Σε μια γειτονιά $U \subset M$ όπου $\exp_p$ είναι διαφορομορφισμός ορίζουμε $\varphi^{-1} = E^{-1} \exp_p^{-1} : U \to \mathbb{R}^n$.
Τότε η φ δίνει ένα χάρτη συντεταγμένων στο p
με $\varphi(x_1, \dots, x_n) = \exp_p(E(x_1, \dots, x_n))$
Αυτές οι συντεταγμένες ονομάζονται κανονικές συντεταγμένες με κέντρο το p.




$q = \exp_p\left(\sum_i x_i E_i\right) = \alpha(1, p, v)$ με $\gamma(t) = \alpha(t, p, v)$

γεωδαισιακή τ.ω. $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v = \sum_{i=1}^{n} x_i E_i$

Τότε $\varphi^{-1}(q) = (x_1, \dots, x_n)$.

$\frac{\partial}{\partial x_i}$ : διαν. πεδίο τ.ω. να αλλάζεις μόνο στην κατεύθυνση $E_i$.

$$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{q=\varphi(x_1,\dots,x_n)} = \frac{d}{dt}\left(\exp_p\left(\left(\sum_{j=1}^{n} x_j E_j\right) + t E_i\right)\right)\Bigg|_{t=0}$$

$$= \left(d\exp_p\right)_{\exp_p^{-1}(q)}(E_i)$$ αφού $\exp_p^{-1}(q) = \sum_j x_j E_j$.

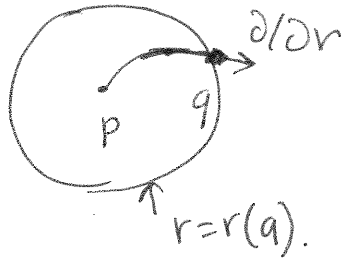
Στο $p$: $$\left.\frac{\partial}{\partial x_i}\right|_{p=\varphi(\vec{0})} = \frac{d}{dt}\left(\exp_p(\vec{0} + E_i)\right) = \left(d\exp_p\right)_0 (E_i) = E_i$$

Έστω $r(q) = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2}$ όπου $\varphi^{-1}(q) = (x_1, \ldots, x_n)$.

η ακτινική απόσταση ~~...~~ του $q$ από το $p$.

Θέτουμε $\dfrac{\partial}{\partial r} = \sum_{i=1}^{n} \dfrac{x_i}{r} \cdot \dfrac{\partial}{\partial x_i}$

Θα δούμε ότι $\dfrac{\partial}{\partial r}$ είναι ένα μοναδιαίο διαν. πεδίο στην $M$, το ακτινικό δ.π.




<u>Πρόταση</u> 3 (Ιδιότητες κανονικών συντεταγμένων).
Έστω $(U, \varphi) = (\exp_p(B_\varepsilon(0)), \varphi)$ χάρτης κανονικών συντεταγμένων με κέντρο το $p$ τ.ω. $\varphi^{-1}(x) = (x_1, \ldots, x_n)$ και $\left\{\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right\}_i$ πλαίσιο συντετ.

(α) Για κάθε $V = \sum_i v_i \dfrac{\partial}{\partial x_i} \in T_pM$, η γεωδαισιακή $\gamma$ με $\gamma(0) = p$ και $\gamma'(0) = v$ γράφεται σε κανονικές συντεταγμένες ως:
$\varphi^{-1}(\gamma(t)) = (tv_1, \ldots, tv_n)$ όσο το $\gamma(t)$ παραμένει στο $U$.

(β) Οι συντεταγμένες του $p$ είναι $\varphi^{-1}(p) = \vec{0} \in \mathbb{R}^n$.

(γ) Η μετρική $g$ στο $p$ ικανοποιεί $\left\langle \dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j} \right\rangle_p = (g_{ij})_p = \delta_{ij}$ (μόνο στο $p$).

(δ) Η μπάλα $\{x \mid r(x) < \varepsilon\}$ στη $U$ είναι γεωδαισιακή μπάλα στην $M$

(ε) $\forall q \in U \setminus \{p\}$ $\dfrac{\partial}{\partial r}$ είναι το διάνυσμα ταχύτητας της γεωδαισιακής από το $p$ στο $q$, έτσι έχει νόρμα 1.

(στ) Οι πρώτες μερικές παράγωγοι των $g_{ij}$ ως προς τις συντεταγμένες $\{\frac{\partial}{\partial x_i}\}$ είναι μηδενικές στο p.

$(g_{ij,k}|_p = 0)$, άρα $\Gamma_{ij}^{k}|_p = 0$ $\forall i,j,k$ - από τύπο για σύμβολο Christoffel ως προς $g$.

Απόδειξη: (α) Έστω $\gamma(t)$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$ $\gamma'(0)=v$

τότε εξ ορισμού $\gamma(t) = \alpha(t,p,v) = \alpha(1,p,tv) = \exp_p(tv)$

για $v = \sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \sum_i v_i E_i\Big|_p$

Άρα $\varphi^{-1}(\gamma(t)) = E^{-1} \circ \underset{\uparrow \text{ διαφορομορφ.}}{\exp_p^{-1}} (\exp_p(tv)) = E^{-1}(tv) = (tv_1, \dots, tv_n)$

(β) $p = \gamma(0) = \alpha(0,p,0) = \exp_p(0)$. $\Rightarrow \varphi^{-1}(p) = \vec{0}$.

(γ) $(g_{ij})_p = \langle \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \rangle_p = \langle (d\exp_p)_0(E_i), (d\exp_p)_0(E_j) \rangle_p$

$= \langle E_i, E_j \rangle_p = \delta_{ij}$ αφού $\{E_i\}_i$ o.κ. στο $T_pM$.

αφού $(d\exp)_0 = Id|_{T_pM}$

(δ) $v \in B_\varepsilon(0) \subset T_pM \Leftrightarrow \left|\sum_i v_i E_i\right|_g < \varepsilon \Leftrightarrow \left(\sum_i (v_i)^2\right)^{1/2} < \varepsilon$

αφού $\{E_i\}_i$ o.κ. στο $T_pM$.

$$\left.\begin{aligned} r(x) &= \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2} = |\varphi^{-1}(x)|_{\mathbb{R}^n} \\ |\exp_p^{-1}(x)|_g &= \left|\sum_i x_i E_i\right|_g = \left(\sum_i (x_i)^2\right)^{1/2} \end{aligned}\right\}$$

Άρα $\{x \mid r(x) < \varepsilon\} = \{x \mid |exp_p^{-1}(x)|_g < \varepsilon\} =$

$= \{x \mid exp_p^{-1}(x) \in \underset{\substack{\uparrow \\ \text{στο } T_pM}}{B_\varepsilon(0)}\} \equiv exp_p(\underset{\substack{\uparrow \\ \text{στις συντεταγμένες } E_i}}{B_\varepsilon(0)})$

(ε) Έστω $q \in U \setminus \{p\}$

Αν $\varphi^{-1}(q) = (x_1, \dots, x_n)$, τότε $v = \sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{r} E_i$ είναι ένα μοναδιαίο διάνυσμα στο $T_pM$ και

$\gamma(t) = exp_p(tv) = \alpha(t, p, v)$ είναι γεωδαισιακή καμπύλη με $\gamma(0) = p$ και $\gamma(r) = \alpha(1, p, rv) = \alpha(1, p, \sum_i x_i E_i) =$

$= exp_p(\sum_i x_i E_i) = q.$

$\therefore$ $\gamma$ γεωδαισιακή από το $p$ στο $q$

και $\gamma'(t) = \frac{d}{dt}(exp_p(tv)) = (d exp_p)_{tv}(v) = (d exp_p)_{tv}\left(\sum_i \frac{x_i}{r} E_i\right)$

$= \sum_i \frac{x_i}{r} (d exp_p)_{tv}(E_i) \underset{\substack{\uparrow \\ \text{εξ ορισμού } \partial/\partial x_i}}{\equiv} \sum_i \frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{exp_p(tv)} =$

$= \sum_i \frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_{\gamma(t)} = \frac{\partial}{\partial r}\Big|_{\gamma(t)}$

Επίσης $|\gamma'(t)|_g = |\gamma'(0)|_g = |v|_g = 1$ αφού γεωδαισιακή

άρα $\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|_g = 1.$ στη $\gamma(t)$.

(στ) Θέλουμε ν.δ.ο. $\nabla_{\partial/\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = 0 \quad \forall i,j.$

Έστω $\gamma(t) = \exp_p(tE_i + tE_j)$ γεωδαισιακή στο $p$.
τ.ω. $\gamma'(t) = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\gamma(t)}$

Τότε $\nabla_{\gamma'(t)}\gamma'(t)\Big|_{t=0} = \nabla_{\gamma'(0)}\gamma'(t)\Big|_{t=0} = \nabla_{\left(\partial/\partial x_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)(p)}\left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j}\right)_{\gamma(t)}\Big|_{t=0} =$

$$= \nabla_{\partial/\partial x_i(p)}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p + \nabla_{\partial/\partial x_j(p)}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p + \nabla_{\partial/\partial x_i(p)}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p + \nabla_{\partial/\partial x_j(p)}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$$

$\gamma$ γεωδαισιακή άρα $\nabla_{\gamma'}\gamma' = 0.$

Επίσης αν $\alpha_i(t) = \exp_p(tE_i)$ τότε $\alpha_i(0) = p$ και $\alpha_i'(0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$

άρα $\nabla_{\partial/\partial x_i(p)}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = \nabla_{\alpha_i'(t)}\alpha_i'(t)\Big|_{t=0} = 0$ αφού $\alpha_i$ γεωδαισιακή.

Άρα $\nabla_{\partial/\partial x_i(p)}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p = 0 \quad \forall i$

Από συμμετρικότητα συνδέσμου $\nabla_{\partial/\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_j}\Big|_p = \nabla_{\partial/\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big|_p$

$\therefore\ 2\nabla_{\partial/\partial x_i}\partial/\partial x_j\Big|_p = 0 \quad \forall i,j$

Άρα $g_{ij,k} = \frac{\partial}{\partial x_k}\left(\left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle\right) = \left\langle\nabla_{\partial/\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle + \left\langle\frac{\partial}{\partial x_i}, \nabla_{\partial/\partial x_k}\frac{\partial}{\partial x_j}\right\rangle$
$= 0 \quad \forall i,j,k$

$\square$

· Συνέπεια της πρότασης είναι ότι κοντά στο $p$

$$g = \delta_{ij} + \underbrace{O(|x|^2)}_{\text{καμπυλότητα.}}$$

## Ομοιόμορφα Κανονική Γειτονιά:

**Πρόταση 4** $\forall p \in M$ υπάρχει γειτονιά $W$ του $p$ και $\delta > 0$ τ.ω. $\forall q \in W$ η απεικόνιση $\exp_q$ είναι διαφορομορφισμός στο $B_\delta(0) \subset T_qM$ και $\exp_q(B_\delta(0)) \supset W$.
Δηλαδή η $W$ είναι κανονική γειτονιά για όλα τα $q \in W$.

**Απόδειξη:** Έστω $\mathcal{E} \subset TM$ ανοικτό και $F : TM \to M \times M$ τ.ω. $F(q,v) = (q, \exp_q(v))$

Έστω $(U, \varphi)$ γειτονιά κανονικών συντεταγμένων στο $p$.
με $\varphi^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_n)$.

Τότε $(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n)$ συντεταγμένες για ανοικτή γειτονιά στο $TM$ και η $F$ σε συντεταγμένες γράφεται ως:

$$F(x_1, \dots, x_n, v_1, \dots, v_n) = (x_1, \dots, x_n, \quad (\exp_p(\textstyle\sum_i v_i E_i))$$

Άρα
$$[DF]_{(p,0)} = \left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial x_n} & \frac{\partial x_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial v_n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \frac{\partial x_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial x_n} & \frac{\partial x_n}{\partial v_1} & & \frac{\partial x_n}{\partial v_n} \\ \hline \nabla_{\vec{x}}(\varphi^{-1}\exp_p)_1 & & & \frac{\partial(\cdot(\exp_p))_1}{\partial v_1} & \dots & \frac{\partial(\cdot(\exp_p))_1}{\partial v_n} \\ \vdots & & & \vdots & & \\ \nabla_{\vec{x}}(\varphi^{-1}\exp_p)_n & & & \partial(\cdot(\exp_p))_n & & \partial(\cdot(\exp_p))_n \end{array}\right] =$$

$$= \begin{bmatrix} Id & 0 \\ * & (d\exp_p)_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Id & 0 \\ * & Id \end{bmatrix}.$$

Άρα $F$ τοπικός διαφορομορφισμός.

$F(p,0) = (p,p)$, άρα $\exists\ \mathcal{U}' = V' \times B_\delta(0)$ ανοικτή

$= \{(q,v) \mid q \in V'$ και $v \in T_q M \quad |v| < \delta\}$

τ.ω. $F$ διαφορομορφισμός από τη $\mathcal{U}'$ σε γειτονιά $W'$ του $(p,p) \in M \times M$ ανοικτή

Έστω $W$ γειτονιά του $p$ στην $M$ τ.ω. $W \times W \subset W'$.

Τότε η γειτονιά $W$ και το $\delta$ έχουν τις ιδιότητες που θέλουμε, αφού $\forall q \in W \quad \exp_q(B_\delta(0)) \supset W$.

άρα $\exp_q$ είναι διαφορομορφισμός στο $B_\delta(0)$.

$\square$

Γεωδαισιακές και Απόσταση:

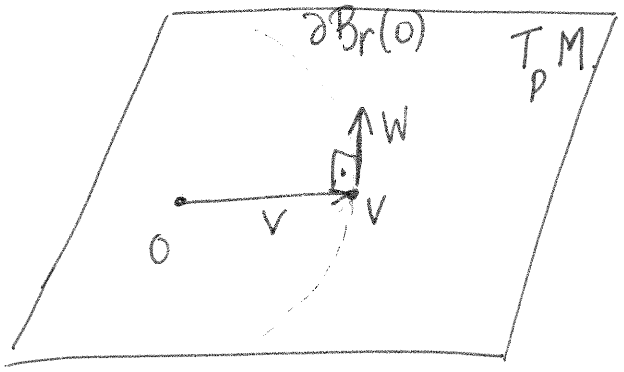
Κανονική καμπύλη, διαφορίσιμη κατά τμήματα: $\gamma : [a,b] \to M$.
$a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ τ.ω. $\gamma|_{[t_i, t_{i+1}]}$ είναι διαφορίσιμη.
και $\gamma'(t) \neq 0$ σε κάθε $[t_i, t_{i+1}]$.
Η παράλληλη μεταφορά στη $\gamma$ γίνεται και αυτή κατά τμήματα.

Κάθε κανονική καμπύλη μπορεί να παραμετρικοποιηθεί έτσι ώστε $|\gamma'| = 1$ $\forall t$.

<u>Ορισμός</u>: Μια καμπύλη $\gamma : [a,b] \to M$ ελαχιστοποιεί την απόσταση μεταξύ $\gamma(a)$ και $\gamma(b)$ αν $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$ για κάθε διαφορίσιμη κατά τμήματα καμπύλη $c$ από το $\gamma(a)$ στο $\gamma(b)$.

Στόχος: ν.δ.ο. οι καμπύλες που ελαχιστοποιούν την απόσταση είναι γεωδαισιακές, και ότι μια γεωδαισιακή ελαχιστοποιεί "τοπικά" την απόσταση.

$\gamma(t) = \exp_p(tv)$ : γεωδαισιακή από το $p$ στην κατεύθυνση $v \in T_pM$

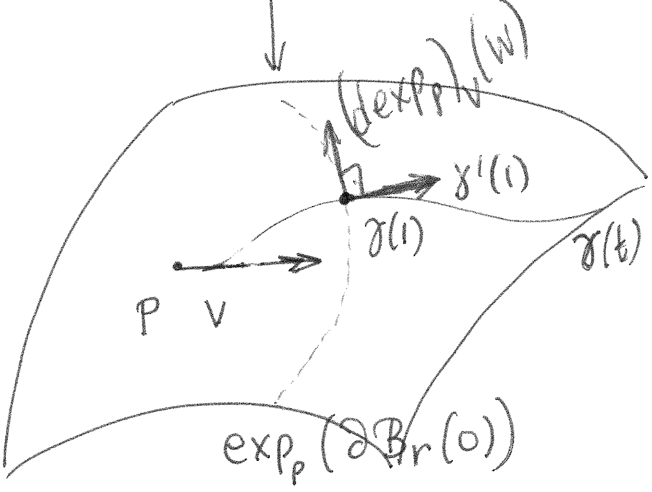



Έστω $w \in T_v(T_pM) \approx T_pM$

και $w \perp v$ στο σημείο $v \in T_pM$

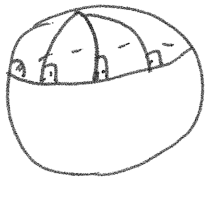
Έστω $\partial B_r(0) =$ σφαίρα στο $T_pM$ με $r = |v|$.

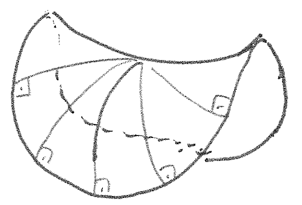
Τότε $(d\exp_p)_v(w) \perp \gamma'(1)$.




Δηλαδή $(\exp_p)(\partial B_r(0))$ είναι υποπολ/τα της $M$ που είναι κάθετη στις γεωδαισιακές $\gamma(t)$ από το $p$.

- η γεωδαισιακή σφαίρα ακτίνας $r$





Λήμμα του Gauss: Έστω $p \in M$ και $v \in T_pM$ τ.ω. $\exp_p v$ να ορίζεται, και $\exp_p$ διαφορομορφισμός σε ανοικτό σύνολο $U \supset B_{|v|}(0)$.

Έστω $w \in T_pM \approx T_v(T_pM)$.

Τότε

$$\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w) \rangle = \langle v, w \rangle_p$$

· Δηλαδή $(d\exp_p)_v$ διατηρεί τη γωνία μεταξύ της γεωδαισιακής με $\gamma'(0)=v$ και του διανύσματος $w$.

<u>Απόδειξη.</u> Έστω $w = \alpha v + w_N$ με $w_N \perp v$.

Τότε $\langle v, w\rangle = \langle v, \alpha v + w_N\rangle = \alpha |v|^2$

και $\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(\alpha v + w_N)\rangle =$

$$= \alpha \underbrace{\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(v)\rangle}_{\alpha|v|^2} + \langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_N)\rangle \quad (*)$$

$$(d\exp_p)_v(v) = \frac{d}{dt}\left(\exp_p(tv)\right)\Big|_{t=1} = \gamma'(1)$$

όπου $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$

και $\gamma'(0) = v$.

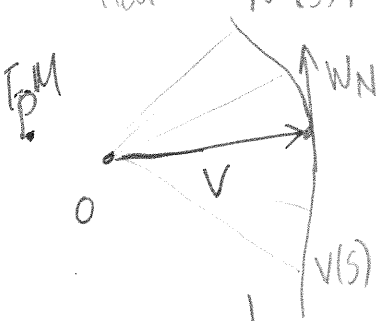
Άρα $|\gamma'(1)| = |\gamma'(0)| = |v|$

Άρα από $(*)$ αρκεί ν.δ.ο. $\langle (d\exp_p)_v(v), (d\exp_p)_v(w_N)\rangle = 0$.

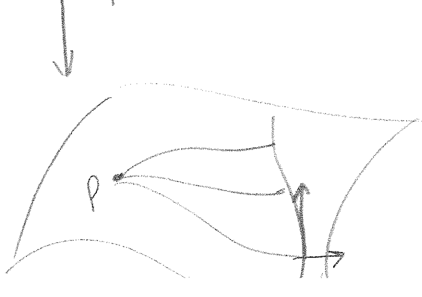
για $w_N \perp v$. $w_N \neq 0$.

Έστω $v(s)$ καμπύλη στο $T_pM$ με $v(0)=v$, $v'(0)=w_N$

και $|v(s)| =$ σταθερά




Τότε $\exists \varepsilon > 0$ τ.ω. $v(s)$ να βρίσκεται στο χωρίο όπου $\exp_p$ είναι διαφορομορφισμός για $|s| < \varepsilon$



Έστω $u(s,t) = tv(s)$ για $0 \le t \le 1$,

$A = \{(t,s) \mid 0 \le t \le 1, \ -\varepsilon < s < \varepsilon\}$

και $f: A \to M$ με $f(s,t) = \exp_p(tv(s))$ παραμετρισμένη επιφάνεια στην M.

Παρατήρηση: οι καμπύλες $\gamma_{s_0}: t \longmapsto f(t, s_0)$ είναι γεωδαισιακές.

$\frac{\partial f}{\partial s} = (d\exp_p)_{tv(s)}(t v'(s))$ διαν. πεδίο

$\frac{\partial f}{\partial t} = (d\exp_p)_{tv(s)}(v(s))$ διαν πεδίο $\equiv$ εφαπτόμενο διάνυσμα της $\gamma_s(t)$

Στο $t=0$, $s=0$: $f(0,0) = p$, $tv(s)\big|_{(0,0)} = 0$, $tv'(s)\big|_{(0,0)} = 0$, και $v(0) = v$

Άρα $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle\Big|_{(0,0)} = \langle 0, (d\exp_p)_0(v(0)) \rangle = 0$

Στο $t=1$, $s=0$ $f(1,0) = \exp_p(v)$, $v'(0) = w_N$, $v(0) = v$

Άρα $\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(1,0)} = (d\exp_p)_v(w_N)$ και $\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(1,0)} = (d\exp_p)_v(v)$

Άρα $\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle\Big|_{(1,0)} = \langle (d\exp_p)_v(w_N), (d\exp_p)_v(v) \rangle$

Επίσης $\forall (t,s) \in A$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} \rangle\right) = \langle \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right), \frac{\partial f}{\partial t} \rangle + \underbrace{\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) \rangle}_{\to 0}$$

$$\frac{D}{\partial t} = \frac{D}{\gamma_s'(t)}\gamma_s'(t)$$

αφού $\gamma_s(t)$ γεωδαισιακή

Λήμμα τροχι Συμμετρίας: Έστω $f: I_1 \times I_2 \to M$, $(t,s) \mapsto f(t,s)$ μια παραμετρικοποιημένη επιφάνεια στην $M$ για $I_i \subset \mathbb{R}$.

Τότε $$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right).$$

Απόδειξη: Σε συντεταγμένες, $f(t,s) = (x_1(t,s), \dots, x_n(t,s))$.

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \frac{\partial f}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

Άρα $$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \sum_i \left( \frac{\partial^2 x_i}{\partial s \partial t}\frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot \underbrace{\nabla_{\partial/\partial x_j}\frac{\partial}{\partial x_i}}_{\sum_k \Gamma_{ji}^k \frac{\partial}{\partial x_k}} \right)$$

$$= \sum_k \left[ \frac{\partial^2 x_k}{\partial s \partial t} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial x_j}{\partial s}\Gamma_{ji}^k \right]\frac{\partial}{\partial x_k}$$

Παρόμοια $$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) = \sum_k \left[ \frac{\partial^2 x_k}{\partial t \partial s} + \sum_{i,j} \frac{\partial x_i}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_j}{\partial s}\Gamma_{ij}^k \right]\frac{\partial}{\partial x_k}$$

$i \leftrightarrow j \qquad \Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k$

$$= \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right).$$

$\square$

---

Συνέχεια απόδειξης:

Άρα $$\frac{\partial}{\partial t}\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\right) = \left\langle \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right), \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(\left\langle \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\right)$$

$$= \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(|\gamma_s'(t)|^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(|(d\exp_p)_{tv}(v(s))|^2\right) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial s}\left(|v(s)|^2\right) = 0$$

αφού $|v(s)| =$ σταθερά.

$\therefore \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle =$ σταθερά $\forall t$.

$$\therefore \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{(1,0)} = \left\langle \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t}\right\rangle\Big|_{(0,0)} = 0$$

QED

Σημειώσεις: Η $f(t,s)$ που ορίσαμε είναι ένα είδος μεταβολής μιας γεωδαισιακής $\gamma(t)$ σε κάθετο διαν. πεδίο $V(s)$ που ορίζεται με βάση το $W_N$.

Χρησιμοποιήσαμε τη συμμετρία του συνδέσμου L-C $\Gamma_{ij}^{k} = \Gamma_{ji}^{k}$ και το ότι $\exp_p(tV(s))$ είναι γεωδαισιακή όταν $s=s_0$ σταθερό, με σταθερή νόρμα ταχύτητας.

Το ότι $\frac{\partial}{\partial t} < \frac{\partial f}{\partial s}, \frac{\partial f}{\partial t} > = 0$ και $\frac{\partial}{\partial s} < \frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial t} > = 0$ δείχνει ότι οι γεωδαισιακές είναι ένα κρίσιμο σημείο της πολ/τας αν επιτρέψαμε κάθετες μεταβολές τους.

$\frac{\partial}{\partial r}$: διαν. πεδίο στην κανονική γεωδαισιακή μπάλα, το οποίο είναι μοναδιαίο και εφαπτόμενο στις γεωδαισιακές που περνούν από το $p$.

Παρατήρηση: $(d\exp_p)_V(V) = \gamma'(1) = |V| \cdot \frac{\partial}{\partial r}$

Άρα $\frac{\partial}{\partial r} \perp \exp_p(\partial B_r(0))$

<u>Πρόταση 5</u> Έστω $p \in M$, $U$ κανονική γειτονιά στο $p$ και $B \subset U$ κανονική γεωδαισιακή μπάλα με κέντρο $p$.

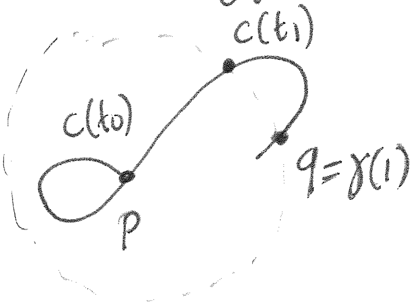
Έστω $\gamma : [0,1] \to B$ γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$

Αν $c : [0,1] \to M$ είναι διαφορίσιμη κατά τμήματα καμπύλη με $c(0) = \gamma(0) = p$ και $c(1) = \gamma(1)$, τότε $\ell(\gamma) \leq \ell(c)$.

Αν επίσης $\ell(\gamma) = \ell(c)$ τότε $\gamma([0,1]) = c([0,1])$.

<u>Απόδειξη:</u> $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ για $v$ τ.ω. $|v| = \ell(\gamma) = R$ αφού $\gamma(1) = q \in B$ και $\exp_p$ διαφορομορφισμός στη $B_R(0)$.

Έστω $S_R = \exp_p(\partial B_R(0))$ γεωδ. σφαίρα στο $p$




Έστω $t_0, t_1 \in [0,1]$ τ.ω. $t_0$ το μεγαλύτερο $t$ με $c(t_0) = p$ και $t_1$ ~~το~~ η πρώτη στιγμή μετά το $t_0$ τ.ω. $c(t_1) \in S_R$ (η $c$ μπορεί να βγει έξω από τη μπάλα).

Υποθέτουμε ότι $|c'| = \sigma\tau\alpha\theta.$

Στο $[t_0, t_1]$ η $c$ μπορεί να γραφτεί ως

$c(t) = \exp_p(b(t))$ με $b(t)$ καμπύλη στο $T_pM$ στη $B_R(0)$

και $c'(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r} + N(t)$   $\frac{\partial}{\partial r}$: ακτινικό διάνυσμα

και $N(t)$ εφαπτόμενο στην σφαίρα $S$ στο $c(t)$.

(εκτός πιθανά σε πεπερασμένο αριθμό σημείων).

Από το Λήμμα του Gauss:

$|c'(t)|^2 = |\alpha(t)|^2 + |N(t)|^2$ αφού $\langle \frac{\partial}{\partial r}, N(t) \rangle = 0$.

$\therefore \ |c'(t)| \geq |\alpha(t)|$

Άρα. $L(c) = \int_0^1 |c'(t)| \geq \int_{t_0}^{t_1} |c'(t)| = L(c|_{[t_0,t_1]})$

$\geq \int_{t_0}^{t_1} |\alpha(t)| \, dt$

Έστω $r(c(t))$ η ακτινική απόσταση του $\exp_p^{-1}(c(t))$ από το $\vec{0}$ (στο $T_pM$).

Δηλαδή αν $c(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))$ σε κανονικές συντεταγμένες,

$r(c(t)) = \left( \sum_{i=1}^{n} (x_i(t))^2 \right)^{1/2}$ με $\frac{\partial}{\partial r} = \sum_i \frac{x_i}{r} \cdot \frac{\partial}{\partial x_i}$.

Τότε $\frac{d}{dt}(r(c(t))) = \langle \frac{1}{r} \cdot c(t), c'(t) \rangle = \langle \frac{\partial}{\partial r}(c(t)), c'(t) \rangle$

$\frac{d}{dt}(r(c(t))) = \sum_i \frac{1}{r} \cdot 2x_i \cdot x_i'$

Όμως $\langle c'(t), \frac{\partial}{\partial r} \rangle = \alpha(t)$ από το Λήμμα Gauss.

$\frac{\partial}{\partial r} \equiv \partial/\partial r(c(t))$

$\therefore \ \alpha(t) = \frac{d}{dt}(r(c(t)))$

$\therefore \ L(c) \geq \int_{t_0}^{t} \frac{d}{dt}(r(c(t))) \, dt = r(c(t_1)) - r(c(t_0)) = R - 0 = L(\gamma)$.

Παρατηρούμε ότι η ισότητα ισχύει ανν

$|c'(t)| = |\alpha(t)| \Leftrightarrow c'(t) = \alpha(t) \frac{\partial}{\partial r}$ και $t_0 = 0$, $t_1 = 1$.

Δηλαδή ανν η $c$ είναι ακτινική γεωδαισιακή από το $p$ στο $q$, και αφού $|c'| =$ σταθερά τότε $\alpha(t) =$ σταθερά.

Έτσι ώστε $c([0,1]) = \gamma([0,1])$.

QED

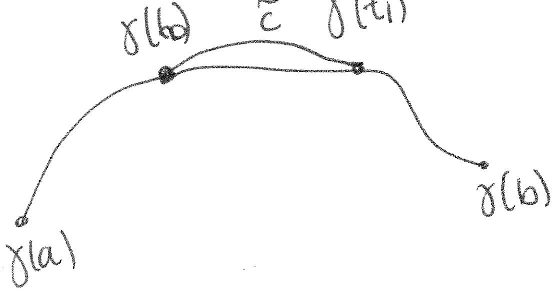
<u>Πόρισμα 6.</u> Στην ομοιόμορφα κανονική γειτονιά $W$ $\forall q_1, q_2 \in W$ υπάρχει μία μοναδική γεωδαισιακή καμπύλη που τα ενώνει με μέγιστο μήκος $\delta$.

$(\exp_{q_1}(B\delta(0)) \supset W \ni q_2)$

<u>Πόρισμα 7:</u> Έστω $\gamma : [a,b] \to M$ διαφορίσιμη κατά τμήματα καμπύλη με $l(\gamma) \leq l(c)$ για κάθε καμπύλη (διαφ. κατά τμήμ.) $c$ που ενώνει το $\gamma(a)$ με το $\gamma(b)$.
Τότε η $\gamma$ είναι γεωδαισιακή. (και $\gamma' \neq 0$).

<u>Απόδειξη:</u> Έστω $t \in [a,b]$

Τότε υπάρχει ομοιόμορφα κανονική γειτονιά $W$ με $\gamma(t) \in W$. και υποδιάστημα $I \subset [a,b]$ τ.ω. $\gamma|_I \subset W$.
$t$ δεν είναι άκρο του $I$.
Από την Πρόταση 5 η $\gamma|_I$ είναι γεωδαισιακή
αφού αν $I = [t_0, t_1]$ τότε $l(\gamma|_I)$ πρέπει να είναι μικρότερο από οποιασδήποτε καμπύλης που ενώνει τα $\gamma(t_0)$ και $\gamma(t_1)$, διαφορετικά η $\gamma$ δεν είναι η καμπύλη μικρότερου μήκους από το $\gamma(a)$ στο $\gamma(b)$




(μπορούμε να την αντικαταστήσουμε με πιο σύντομη)

Δηλαδή η $\gamma$ είναι γεωδαισιακή στο $t$ και άρα $C^\infty$.

$t$ τυχαίο
$\therefore$ $\gamma$ γεωδαισιακή στο $[a,b]$.

$\square$

<u>Ορισμός</u>: Η <u>απόσταση Riemann</u> ανάμεσα σε δύο σημεία $p,q \in M$ ορίζεται ως

$$d(p,q) = \inf_{c} \{ L(c) \mid c:[0,1] \to M \quad c(0)=p,\ c(1)=q$$
$$c \text{ διαφ. κατά τμήματα με } c' \neq 0 \}.$$

<u>Λήμμα 8</u> $(M,d)$ είναι μετρικός χώρος με τοπολογία ως προς $d$ ισοδύναμη με την τοπολογία της πολ/τας $M$.

<u>Απόδειξη</u>: Αρκεί ν.δ.ο.
(i) $d(p,q) = d(q,p) \geq 0$. ✓

(ii) Αν $d(p,q) = 0 \Rightarrow p = q$.

(iii) $d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q) \quad \forall p,q,r \in M$.

(ii) Έστω $W$ ομοιόμορφα κανονική γειτονιά του $p$. με $\exp_p$ διαφορομορφισμό για $|v|<\delta$

Αν $q \notin W \Rightarrow d(p,q) \geq \delta$ αφού κάθε καμπύλη $c$ πρέπει να περάσει από $S_\delta$ - το σύνορο της γεωδ. σφαίρας.

Αν $q \in W$ τότε κάθε καμπύλη $c$ από το $p$ στο $q$ ικανοποιεί $l(c) \geq l(\gamma)$ με $\gamma(t) = \exp_p(tv)$ και $|v| = l(\gamma)$

Αν $d(p,q) = 0 \Rightarrow q \in \exp_p(B_\varepsilon(0)) \quad \forall \varepsilon > 0 \Rightarrow q = \gamma_\varepsilon(1) = \exp_p(v_\varepsilon)$ για $v_\varepsilon$ με $|v_\varepsilon| < \varepsilon$

Αφού $\exp_p$ διαφορομορφισμός $\Rightarrow p = q$ στέλνοντας το $\varepsilon \to 0$.

(iii) Για κάθε $c_1$ από το $p$ στο $r$ και $c_2$ από το $r$ στο $q$ $c_1 \cup c_2$ είναι καμπύλη από το $p$ στο $q$ - αλλά μπορεί να έχει και πιο μικρούς $\therefore d(p,q) \leq d(p,r) + d(r,q)$

- Για την τοπολογία Lee. για λεπτομέρειες.
  $\exp_p$ τοπικός διαφορομορφισμός - είναι ισοδυναμία τοπικά για τις βάσεις ανοικτών.

$\square$

<u>Πόρισμα 9.</u> Αν το $x$ ανήκει σε γεωδαισιακή μπάλα γύρω από το $p \in M$ με κανονικές συντεταγμένες $x=(x_1,\dots,x_n)$, τότε
$$r(x) = \left(\sum_{i=1}^{n}(x_i)^2\right)^{1/2} = d(p,x),$$ είναι η απόσταση Riemann του $p$ από το $x$.

<u>Απόδειξη:</u> Αν $v=(x_1,\dots,x_n)$ οι κανονικές συντεταγμένες του $x$, τότε $\gamma(t)=\exp_p\left(t\frac{v}{\|v\|}\right)$ είναι γεωδαισιακή με $x=\gamma(\|v\|)$ και η $\gamma$ ελαχιστοποιεί το μήκος. αφού είμαστε σε γειτονιά καν. συντεταγμένων όπου $\exp_p$ διαφορομορφισμός.

$$\therefore\ d(p,x)=\ell(\gamma)=\int_0^{\|v\|}|\gamma'(t)|\,dt=\int_0^{\|v\|}\left|\frac{\partial}{\partial r}\right|dt=\|v\|=r(x).$$

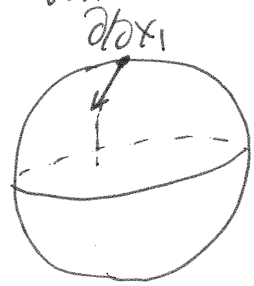
$\square$

Γεωδαισιακές σε συμμετρικούς χώρους.

- $\mathbb{R}^n$ $\quad \gamma(t) = \vec{x}_0 + t\vec{v}_0$ $\quad$ γεωδαισιακή

- $S^{n-1} \hookrightarrow \mathbb{R}^n$ $\quad$ σφαίρα ακτίνας 1

Έστω $\gamma(t) = (x_1(t), \ldots, x_n(t))$ γεωδαισιακή στην $S^{n-1}$




με $\gamma(0) = (0, 0, \ldots, 1) = B$

και $\gamma'(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$

Θα δείξουμε ότι $\gamma(t) = (x_1(t), 0, \ldots, 0, x_n(t))$
δηλαδή η $\gamma$ είναι μεγάλος κύκλος.-τομή με το επίπεδο $x_1 x_n$.

Ας υποθέσουμε ότι $x_i(t_0) \neq 0$ για κάποιο $i \neq 1, n$, και $t_0$.

Η απεικόνιση $\phi: S^{n-1} \to S^{n-1}$ με $\phi = \Phi|_{S^{n-1}}$ όπου

$$\Phi(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = (x_1, \ldots, -x_i, \ldots, x_n)$$ είναι

μια ισομετρία. - διατηρεί τις γωνίες ανάμεσα στα εφαπτόμενα διανύσματα:

$$[D\Phi] = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & 0 \\ & & -1 & \\ 0 & & & \ddots \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

και άρα $\Phi$ είναι μια ισομετρία στο $\mathbb{R}^n$. Αφού στην $S^{n-1}$ η μετρική είναι η επαγόμενη από το $\mathbb{R}^n$, και $\Phi$ διατηρεί τη σφαίρα, τότε και $\Phi|_{S^{n-1}}$ είναι ισομετρία. (θέλει απόδειξη).

Δηλαδή αν $\gamma$ γεωδαισιακή, τότε $\phi \circ \gamma$ είναι γεωδαισιακή. $\quad \gamma(0) = \phi \circ \gamma(0) = B$ για $i \neq 1, n$.

$\gamma'(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ $\qquad (\phi \circ \gamma)'(0) = \frac{\partial}{\partial x_1}$ από πίνακα για $D\Phi$.

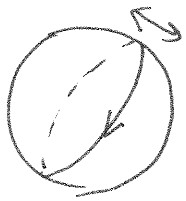
Αλλά $\varphi\circ\gamma \neq \gamma$ και $\gamma$, $\varphi\circ\gamma$ γεωδαισιακές που περνούν από το $B$ το $t=0$ με την ίδια ταχύτητα $\rightarrow\leftarrow$ μοναδικότητα $\gamma$.

$\therefore\ \gamma(t) = (x_1(t), 0, \dots, 0, x_n(t))$

Γεωδαισιακές για συμμετρικούς χώρους $\equiv$ σταθερές καμπύλες των ισομετριών τους.

- Αν όχι έχουμε την ίδια αντίφαση.

· Στο $S^2$: γεωδαισιακές οι μεγάλοι κύκλοι.



ισομετρία: ανάκλαση ως προς το επίπεδο που ορίζουν.

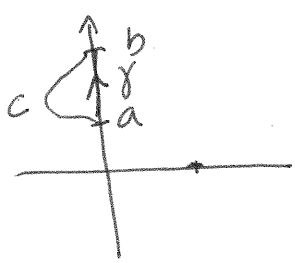
· $\mathbb{H}^2 \ \left((\mathbb{R}^2)^+, g\right) \quad g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2)$

Με κατάλληλη αναπαραμέτριση ε.ω. να έχει μοναδιαία ταχύτητα μ.ν.δ.ο. η

$\gamma(t) = (0,t)$ είναι γεωδ. για $t\in[a,b]$ $a>0$ : $\gamma' = \frac{\partial}{\partial y}$

$$\ell(\gamma) = \int_a^b \frac{1}{y(t)}\sqrt{1}\, dt = \int_a^b \frac{1}{t}\, dt = \ln b - \ln a.$$

Έστω $c(t) = (x(t), y(t))$ καμπύλη με $c(a) = \gamma(a) = (0,a)$ και $c(b) = \gamma(b) = (0,b)$. $\quad c : [a,b] \to \mathbb{H}^2$




$$c'(t) = x'(t)\frac{\partial}{\partial x} + y'(t)\frac{\partial}{\partial y}$$

$$\therefore\ \ell(c) = \int_a^b |c'(t)|\, dt = \int_a^b \sqrt{(x')^2 + (y')^2}\cdot\frac{1}{y(t)}\, dt \qquad y>0$$

$$\geq \int_a^b |y'(t)|\cdot\frac{1}{y(t)}\, dt \geq \int_a^b y'(t)\cdot\frac{1}{y(t)}\, dt = \int_{y(a)}^{y(b)} \frac{1}{y}\, dy = \ell(\gamma).$$

∴ Η $\gamma(t)$ είναι τροχιά γεωδαισιακής
αφού ελαχιστοποιεί την απόσταση ανάμεσα
στα $(0,a)$ $(0,b)$.

- Παρόμοια για $(x_0,a)$, $(x_0,b)$ $\gamma(t)=(x_0,t)$ $t\in[a,b]$
είναι γεωδαισιακή.

$\mathbb{H}^2$: είναι συμμετρικός χώρος.

Στην εργασία 3 δείξατε ότι αν $z=x+iy$

$\phi(z)=\dfrac{az+b}{az+d}$ με $ad-bc=1$ είναι ισομετρία
του $\mathbb{H}^2$.

Οι μετασχηματισμοί Möebius $\phi$ διατηρούν
τα ημικύκλια που είναι κάθετα στον άξονα x
και τις ευθείες που είναι κάθετες στον άξονα x
(θέλει απόδειξη) - είναι τα μόνα σύνολα που
διατηρούν.

- Αυτές οι καμπύλες είναι οι γεωδαισιακές στο $\mathbb{H}^2$