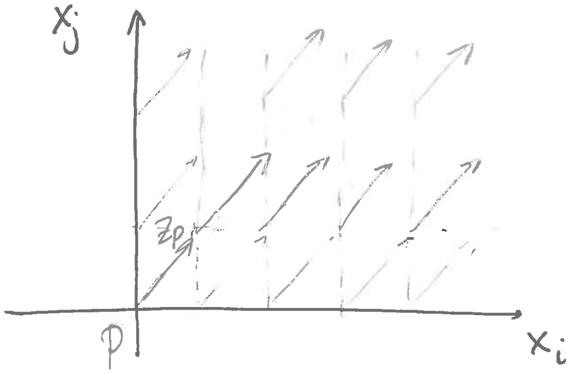
Καμπυλότητα:

Σε κανον. συντ. $g = \delta_{ij} + O(|x|^2)$ αφού $g_{ij,k} = 0$.

Παρατήρηση: Στο $\mathbb{R}^n$ έστω $Z_p \in T_pM$. και $p \equiv 0$

Επεκτείνουμε το Z_p σε παράλληλο διαν. πεδίο Z πρώτα στην κατεύθυνση x_i με $x_j = 0$ για $i \neq j$ τ.ω. $\nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$.



Μετά σε κάθε $x_i =$ σταθ επεκτείνουμε σε διαν. πεδίο Z στην κατεύθυνση x_j με $j \neq i$. τ.ω. $\nabla_{\partial/\partial x_j} Z = 0$

$\nabla_{\partial/\partial x_i} Z =$; έξω από την αρχική κατεύθυνση x_i;

Αν $\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$, δηλαδή $\nabla_{\partial/\partial x_i} Z$ είναι παράλληλο στην κατεύθυνση $\partial/\partial x_j$, τότε $\nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$ αφού αυτό ισχύει όταν $x_j = 0$ και λόγω γραμμικών εξισώσεων για παράλληλα διαν. πεδία.

Από την άλλη ξέρουμε ότι. $\nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} Z = 0$.

- Πόσο διαφέρουν τα $\nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} Z$ και $\nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} Z$;

Για γενικά διαν. πεδία. X, Y, Z στο $\mathbb{R}^n$:

$$\nabla_X Z = \sum_i X(z_i) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad (\Gamma_{ij}^{k} = 0)$$

$$\nabla_Y \nabla_X Z = \sum_i YX(z_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\nabla_X \nabla_Y Z = \sum_i XY(z_i) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\therefore \boxed{\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]} Z}$$

"flatness criterion"
κριτήριο έτσι ώστε η M να είναι επίπεδη.

Για $X = \partial/\partial x_i$ $\quad Y = \partial/\partial x_j$ στο $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} Z - \nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} Z = 0$$

- Οι δεύτεροι παράγωγοι διαν. πεδίων ικανοποιούν την αντιμεταθετική ιδιότητα στο $\mathbb{R}^n$.

- Σε γενική πολλ/τα αυτό δεν ισχύει.
  - παράλληλη μεταφορά στη μια κατεύθυνση, δε συνεπάγεται παραλληλότητα και στις υπόλοιπες.

<u>Ορισμός:</u> Η καμπυλότητα R_{XY} μιας πολλαπλότητας Riemann M με σύνδεσμο Levi-Civita ∇ είναι μια αντιστοιχία η οποία για κάθε ζεύγος $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ δίνει μια απεικόνιση

$R_{XY} \equiv R(X,Y) : \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ που ορίζεται ως

$$R_{XY} Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z \quad \text{για } Z \in \mathfrak{X}(M).$$

(κάποιοι αλλάζουν πρόσημο ή σειρά)

R_{XY} ονομάζεται: τελεστής καμπυλότητας.

- Στο $\mathbb{R}^n$ $\quad R_{XY} Z = 0 \quad \forall X, Y, Z \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$

- Για πλαίσιο συντεταγμένων $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_i} \right\}_i$

$$R_{\partial/\partial x_i \, \partial/\partial x_j} \frac{\partial}{\partial x_k} = \nabla_{\partial/\partial x_i} \nabla_{\partial/\partial x_j} \partial/\partial x_k - \nabla_{\partial/\partial x_j} \nabla_{\partial/\partial x_i} \partial/\partial x_k$$

δείχνει την έλλειψη αντιμεταθετικότητας στις συναλλοίωτες παραγώγους δεύτερης τάξης. επί διαν. πεδίων.

<u>Πρόταση:</u> Η καμπυλότητα R έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) Είναι διγραμμική στο $\mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M)$ τ.ω. $\forall f, g \in \mathcal{D}(M)$ $X_i, Y_i \in \mathfrak{X}(M)$.

$$R_{(fX_1 + gX_2)Y_1} = f R_{X_1 Y_1} + g R_{X_2 Y_1}$$

$$R_{X_1 (fY_1 + gY_2)} = f R_{X_1 Y_1} + g R_{X_1 Y_2}$$

(ii) $\forall X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ η R_{XY} είναι γραμμική από το $\mathfrak{X}(M)$ στο $\mathfrak{X}(M)$ έτσι ώστε $\forall Z_1, Z_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in \mathcal{D}(M)$

$$R_{XY}(fZ_1 + gZ_2) = f R_{XY} Z_1 + g R_{XY} Z_2$$

Απόδειξη:

(i) $$R_{(fX_1+gX_2)Y_1}Z = \nabla_{(fX_1+gX_2)}\nabla_{Y_1}Z - \nabla_{Y_1}\nabla_{(fX_1+gX_2)}Z - \nabla_{[fX_1+gX_2,Y_1]}Z =$$

$$= f\nabla_{X_1}\nabla_{Y_1}Z + g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z - \nabla_{Y_1}(f\nabla_{X_1}+g\nabla_{X_2})Z$$
$$-\nabla_{(f\underline{X_1Y_1}+g X_2Y_1 - f\underline{Y_1X_1} - gY_1X_2 - Y_1(f)X_1 - Y_1(g)X_2)}Z =$$

$$= f\nabla_{\underline{X_1}}\nabla_{Y_1}Z + g\nabla_{X_2}\nabla_{Y_1}Z - \cancel{Y_1(f)\nabla_{X_1}}Z - f\nabla_{\underline{Y_1}}\nabla_{X_1}Z - \cancel{Y_1(g)\nabla_{X_2}}Z$$
$$-g\nabla_{Y_1}\nabla_{X_2}Z - f\nabla_{\underline{[X_1,Y_1]}}Z - g\nabla_{[X_2,Y_1]}Z$$
$$+\cancel{Y_1(f)\nabla_{X_1}}Z + \cancel{Y_1(g)\nabla_{X_2}}Z$$

$$= fR_{X_1Y_1}Z + gR_{X_2Y_1}Z$$

Παρόμοια για τη 2η θέση.

(ii) $$R_{XY}(fZ_1+gZ_2) = (\nabla_X\nabla_Y - \nabla_Y\nabla_X - \nabla_{[X,Y]})(fZ_1+gZ_2) =$$

$$= \nabla_X(Y(f)Z_1 + f\nabla_Y Z_1 + Y(g)Z_2 + g\nabla_Y Z_2)$$
$$-\nabla_Y(X(f)Z_1 + f\nabla_X Z_1 + X(g)Z_2 + g\nabla_X Z_2) - [X,Y](f)Z_1 - f\nabla_{[X,Y]}Z_1$$
$$-[X,Y](g)Z_2 - g\nabla_{[X,Y]}Z_2 =$$

$$= XY(f)Z_1 + \cancel{Y(f)\nabla_X}Z_1 + \cancel{X(f)\nabla_Y}Z_1 + f\nabla_{\underline{X}}\nabla_Y Z_1 + \cancel{XY(g)}Z_2 + \cancel{Y(g)\nabla_X}Z_2$$
$$+\cancel{X(g)\nabla_Y}Z_2 + \underline{g\nabla_X\nabla_Y Z_2} - \cancel{YX(f)}Z_1 - \cancel{X(f)\nabla_Y}Z_1 - \cancel{Y(f)\nabla_X}Z_1 - f\nabla_{\underline{Y}}\nabla_X Z_1$$
$$-\cancel{YX(g)}Z_2 - \cancel{X(g)\nabla_Y}Z_2 - \cancel{Y(g)\nabla_X}Z_2 - g\nabla_Y\nabla_X Z_2$$
$$-\cancel{XY(f)}Z_1 + \cancel{YX(f)}Z_1 + f\nabla_{\underline{[X,Y]}}Z_1 - \cancel{XY(g)}Z_2 + \cancel{YX(g)}Z_2 - g\nabla_{[X,Y]}Z_2$$

$$= fR_{XY}Z_1 + gR_{XY}Z_2$$

<u>Πρόταση:</u> (Ταυτότητα Bianchi)

$$R_{XY}Z + R_{YZ}X + R_{ZX}Y = 0$$

<u>Απόδειξη:</u>

$$\nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$
$$+\nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X$$
$$+\nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y =$$
$$= \nabla_X(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y) + \nabla_Y(\nabla_Z X - \nabla_X Z) + \nabla_Z(\nabla_X Y - \nabla_Y X)$$
$$- \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y =$$

∇ συμμετρικό

$$= \nabla_X([Y,Z]) + \nabla_Y([Z,X]) + \nabla_Z([X,Y])$$
$$- \nabla_{[X,Y]}Z - \nabla_{[Y,Z]}X - \nabla_{[Z,X]}Y =$$

∇ συμμ.

$$= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$$ από ταυτότητα Jacobi.

$\square$

<u>Ορισμός</u>: $R(X,Y,Z,W) := \langle R_{XY}Z, W\rangle$ για $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$
είναι ο <u>τανυστής καμπυλότητας Riemann</u>.

<u>Τανυστής</u>: γιατί γραμμικός ως προς $\mathbb{R}$ σε όλες τις θέσεις

$$R(fX+U,Y,Z,W) = fR(X,Y,Z,W) + R(U,Y,Z,W)$$

κ' παρόμοια για όλες τις θέσεις

$$R : \mathfrak{X}(M)^4 \to \mathbb{R}$$

• Συνεπάγεται ότι $R(X,Y,Z,W)|_p$ εξαρτάται <u>μόνο</u> από τις τιμές των X,Y,Z,W στο p.

<u>Πρόταση</u>: (Ιδιότητες του τανυστή καμπυλότητας)

(i) $R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$ (Ταυτ. Bianchi)

(ii) $R(X,Y,Z,W) = -R(Y,X,Z,W)$

(iii) $R(X,Y,Z,W) = -R(X,Y,W,Z)$

(iv) $R(X,Y,Z,W) = R(Z,W,X,Y)$

<u>Απόδειξη</u>: (i) Bianchi

(ii) Εξ ορισμού.

- Από γραμμικότητα παρατηρούμε ότι η (ii) είναι ισοδύναμη με $R(X,X,Z,W) = 0$

- Αφού $R(X+Y,X+Y,Z,W) = R(X,X,Z,W) + R(Y,Y,Z,W) + R(X,Y,Z,W) + R(Y,X,Z,W)$

άρα $R(U,U,Z,W) = 0 \Rightarrow$ (ii)

και (ii) $\Rightarrow R(X,X,Z,W) = -R(X,X,Z,W) \Rightarrow R(X,X,Z,W) = 0$.

(iii) Παρόμοια (iii) είναι ισοδύναμη με $R(X,Y,Z,Z)=0$.

$$R(X,Y,Z,Z) = \langle \nabla_X \nabla_Y Z, Z\rangle - \langle \nabla_Y \nabla_X Z, Z\rangle - \langle \nabla_{[X,Y]} Z, Z\rangle$$

συμβατό

$$\overset{\Downarrow}{=} X\langle \nabla_Y Z, Z\rangle - \cancel{\langle \nabla_Y Z, \nabla_X Z\rangle} - Y\langle \nabla_X Z, Z\rangle + \cancel{\langle \nabla_X Z, \nabla_Y Z\rangle} - \frac{1}{2}[X,Y](\langle Z,Z\rangle)$$

$$= \frac{1}{2} XY(\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2} YX(\langle Z,Z\rangle) - \frac{1}{2}(XY-YX)(\langle Z,Z\rangle) = 0.$$

(iv) Από (i):

$$R(X,Y,Z,W) + R(Y,Z,X,W) + R(Z,X,Y,W) = 0$$

$$R(Y,Z,W,X) + R(Z,W,Y,X) + R(W,Y,Z,X) = 0$$

$$R(Z,W,X,Y) + R(W,X,Z,Y) + R(X,Z,W,Y) = 0$$

$$R(W,X,Y,Z) + R(X,Y,W,Z) + R(Y,W,X,Z) = 0$$

$+$

$$2R(Z,X,Y,W) + 2R(Y,W,X,Z) = 0$$

$$\Rightarrow -2R(X,Z,Y,W) + 2R(Y,W,X,Z) = 0$$

$$\Rightarrow R(X,Z,Y,W) = R(Y,W,X,Z)$$

$\square$

Σε συντεταγμένες: Γράφουμε. $\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i$

$R_{XY} Z \in \mathfrak{X}(M)$

Ορίζουμε: $R_{\partial_i \partial_j} \partial_k = \sum_{\ell} R_{ijk}^{\ell} \partial_\ell$ (= $R_{ijk}^{\ell} \partial_\ell$ στο συμβολισμό Einstein το άθροισμα υπονοείται).

Για $X = \sum_i X_i \partial_i$ $Y = \sum_j Y_j \partial_j$ $Z = \sum_k Z_k \partial_k$

$$R_{XY} Z = \sum_{i,j,k,\ell} R_{ijk}^{\ell} X_i Y_j Z_k \partial_\ell$$

- Υπολογισμός των R_{ijk}^{ℓ} ως προς τα σύμβολα Christoffel:

$$\sum_\ell R_{ijk}^{\ell} \partial_\ell = \nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} \partial_k - \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} \partial_k - 0 =$$

$$= \sum_m \left[\nabla_{\partial_i} (\Gamma_{jk}^{m} \partial_m) - \nabla_{\partial_j} (\Gamma_{ik}^{m} \partial_m) \right] =$$

$$= \sum_m \left[\frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^{m}) \partial_m + \Gamma_{jk}^{m} \sum_\ell \Gamma_{im}^{\ell} \partial_\ell - \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^{m}) \partial_m - \Gamma_{ik}^{m} \sum_\ell \Gamma_{jm}^{\ell} \partial_\ell \right] =$$

$$\Rightarrow R_{ijk}^{\ell} = \sum_m \left[\Gamma_{jk}^{m} \Gamma_{im}^{\ell} - \Gamma_{ik}^{m} \Gamma_{jm}^{\ell} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^{\ell}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^{\ell})$$

<u>Ορίζουμε</u>: $R(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_\ell) = R_{ijk\ell}$.

- έχει τις ιδιότητες: $R_{ijk\ell} = -R_{jik\ell}$

$$= -R_{ij\ell k}$$

$$= R_{k\ell ij}$$

και $R_{ijk\ell} + R_{jki\ell} + R_{kij\ell} = 0$

Επίσης: $R_{ijk\ell} = \langle \sum_m R_{ijk}^{\;m} \partial_m, \partial_\ell \rangle = \sum_m R_{ijk}^{\;m} g_{m\ell}$

<u>Παρατήρηση</u>: R και R_{XY} στο p εξαρτώνται <u>μόνο</u> από τις τιμές των διαν. πεδίων X, Y, Z, W στο σημείο p λόγω του ότι είναι τανυστές, δηλαδή γραμμικές απεικονίσεις ως προς συντελεστές στο $\mathcal{D}(M)$.

- Παρόμοια απόδειξη με $\nabla_X Y$ να εξαρτάται από $X(p)$ αφού $\nabla_{fX} Y = f \nabla_X Y$.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω $\phi : (M, g) \longrightarrow (\tilde{M}, \tilde{g})$ ισομετρία ($\phi^*(\tilde{g}) = g$). Τότε $\phi^*(\tilde{R}) = R$, δηλαδή

$$R(X, Y, Z, W) = \tilde{R}(\phi_*(X), \phi_*(Y), \phi_*(Z), \phi_*(W)).$$

<u>Ορισμός</u> Μια πολ/τα Riemann ονομάζεται <u>επίπεδη</u> αν $\forall p \in M$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά $U \ni p$ η οποία να είναι ισομετρική με τον $(\mathbb{R}^n, \delta_{ij})$ - ευκλείδιο επίπεδο χώρο.

<u>Θεώρημα:</u> Μια πολ/τα Riemann είναι επίπεδη ανν ο τανυστής καμπυλότητας είναι μηδενικός.

<u>"Απόδειξη:"</u> (M, g)

$(\Rightarrow)$ $\exists$ ισομετρία με $g = \phi^*(\delta_{ij})$

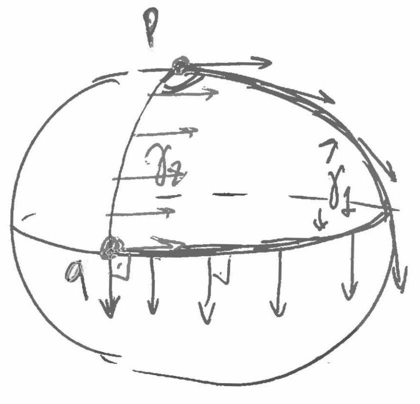
Τότε $R = \phi^*(R_{\delta_{ij}}) = \phi^*(0) = 0$.

$(\Leftarrow)$ Κατασκευή παράλληλου ο.κ. πλαισίου συντεταγμένων σε μια γειτονιά του p.

<u>Θεώρημα</u>: Έστω (M, g) μια πολ/τα Riemann τ.ω. $\forall p, q \in M$ η παράλληλη μεταφορά από το p στο q δεν εξαρτάται από την καμπύλη που τα ενώνει.

Τότε $R \equiv 0$.

<u>Παράδειγμα</u>:



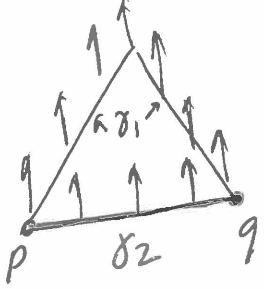
Αν γ: γεωδαισιακή τότε η παράλληλη μεταφορά στη γ διατηρεί τη γωνία με το γ'.

$$\frac{d}{dt}(\langle \gamma', V \rangle) = \langle \frac{D\gamma'}{dt}, V \rangle + \langle \gamma', \frac{DV}{dt} \rangle$$

$$= 0.$$

$\therefore \langle \gamma', V \rangle = 0.$

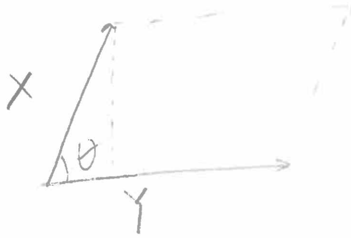
Η σφαίρα έχει μη-μηδενική καμπυλότητα.



Ενώ στο $\mathbb{R}^2$, ανεξάρτητα από την γεωδαισιακή καμπύλη, η παράλληλη μεταφορά σε παίρνει στο ίδιο διάνυσμα.

Ο τανυστής καμπυλότητας είναι πολύπλοκος για να περιγραφεί.
- Πολλές χρήσιμες πληροφορίες βγαίνουν από ίχνη του (traces)

Για $X, Y \in T_pM$ ορίζουμε $|X \wedge Y| = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y \rangle^2}$
- το εμβαδό του παραλληλογράμμου που ορίζουν τα X, Y.



$$A = |X||Y|\sin\theta = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - |X|^2|Y|^2\cos^2\theta} = \sqrt{|X|^2|Y|^2 - \langle X, Y\rangle^2}$$

Πρόταση: Έστω $\sigma \subset T_pM$ ένας δισ-διάστατος υπόχωρος του T_pM με $X, Y \in \sigma$, γραμμικά ανεξάρτητα διανύσματα.
Τότε $K(X,Y) = \dfrac{R(X,Y,Y,X)}{|X \wedge Y|^2}$ δεν εξαρτάται από τα $X, Y \in \sigma$, αλλά μόνο από το σ.

Απόδειξη: Μια αλλαγή βάσης X, Y σε X', Y', γίνεται μέσω των μετασχηματισμών.

$(X,Y) \mapsto (Y,X)$
$(X,Y) \mapsto (\lambda X, Y)$
$(X,Y) \mapsto (X+\lambda Y, Y)$

και συνθέσεων τους. $\big((X',Y') = (\alpha X + \beta Y, \gamma X + \delta Y)\big)$

Παρατηρούμε όμως ότι

$K(X,Y)=K(Y,X)$ αφού $R(X,Y,Y,X)=R(Y,X,X,Y)$, $|X\wedge Y|=|Y\wedge X|$,

$K(X,Y)=K(\lambda X,Y)$ αφού $\dfrac{R(\lambda X,Y,Y,\lambda X)}{|\lambda X\wedge Y|^2}=\dfrac{\lambda^2R(X,Y,Y,X)}{\lambda^2|X\wedge Y|^2}$

$K(X,Y)=K(X+\lambda Y,Y)$ αφού

$$\frac{R(X+\lambda Y,Y,Y,X+\lambda Y)}{|(X+\lambda Y)\wedge Y|^2}=\frac{R(X,Y,Y,X)+\lambda R(X,\cancel{Y,Y},Y)+\lambda(\cancel{Y,Y},Y,X)+\lambda^2R(\cancel{Y},Y,Y,Y)}{|X\wedge Y|^2}$$

$$=K(X,Y)$$

και $|(X+\lambda Y)\wedge Y|^2=|X+\lambda Y|^2|Y|^2-\langle X+\lambda Y,Y\rangle^2=$

$$=(|X|^2+2\lambda\cancel{\langle X,Y\rangle}+\cancel{\lambda^2|Y|^2})|Y|^2-\langle X,Y\rangle^2-\cancel{2\langle X,Y\rangle\lambda|Y|^2}-\cancel{\lambda^2\langle Y,Y\rangle^2}$$

$$=|X\wedge Y|^2$$

□

<u>Ορισμός</u>: Για $p\in M$ και $\sigma\subset T_pM$ διδιάστατος υπόχωρος με βάση $\{X,Y\}$, ορίζουμε $K(X,Y)=K(\sigma)$ την <u>καμπυλότητα τομής</u> του σ στο p. (sectional curvature).

• Αν γνωρίζουμε το $K(\sigma)$ για κάθε επίπεδο $\sigma\in T_pM$, τότε γνωρίζουμε την καμπυλότητα R - το επόμενο λήμμα:

<u>Λήμμα:</u> Έστω V διανυσματικός χώρος διάστασης ≥ 2 με εσωτερικό γινόμενο $\langle , \rangle$. Έστω R και R' απεικονίσεις από το $V\times V\times V\times V$ στο $\mathbb{R}$, γραμμική και στις 4 θέσεις που να ικανοποιούν τις συμμετρίες (i)-(iv) του τανυστή καμπυλότητας.

Για X,Y Γ.Α. και σ το διοδιάστατο υποχώρο που παράγεται από τα X,Y ορίζουμε

$$K(\sigma)=\frac{R(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2} \qquad K'(\sigma)=\frac{R'(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2}$$

Αν για κάθε $\sigma\subset V$ $K(\sigma)=K(\sigma')$ τότε $R=R'$.

<u>Απόδειξη:</u> Θέλουμε ν.δ.ο. $R(X,Y,Z,W)=R'(X,Y,Z,W)$ $\forall X,Y,Z,W\in V$.

Αφού $K(\sigma)=K'(\sigma') \Rightarrow \forall X,Y$ $R(X,Y,Y,X)=R'(X,Y,Y,X)$

Χτίζουμε το R από αυτή την ιδιότητα:

$$R(X+Z,Y,Y,X+Z)=R'(X+Z,Y,Y,X+Z)$$

$$\Rightarrow \cancel{R(X,Y,Y,X)}+R(Z,Y,Y,X)+R(X,Y,Y,Z)+R(Z,Y,Y,Z)=$$

$$=\cancel{R'(X,Y,Y,X)}+R'(Z,Y,Y,X)+R'(X,Y,Y,Z)+R'(Z,Y,Y,Z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow 2R(X,Y,Y,Z)=2R'(X,Y,Y,Z) \quad \text{από ιδιότητα } R,R'$$

$$\Rightarrow R(X,Y,Y,Z)=R'(X,Y,Y,Z)$$

$$\therefore R(X,Y+W,Y+W,Z)=R'(X,Y+W,Y+W,Z)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{R(X,Y,Y,Z)}+R(X,Y,W,Z)+R(X,W,Y,Z)+\cancel{R(X,W,W,Z)}=$$

$$=\cancel{R'(X,Y,Y,Z)}+R'(X,Y,W,Z)+R'(X,W,Y,Z)+\cancel{R'(X,W,W,Z)}$$

$$\Rightarrow R(X,Y,W,Z)-R'(X,Y,W,Z)=-R(\underline{X,W},Y,Z)+R'(\underline{X,W},Y,Z)$$

$$=R(W,X,Y,Z)-R'(W,X,Y,Z) \quad \text{-κυκλική μετάθεση}$$

$X,Y,W\equiv W,X,Y\equiv Y,W,X$

$$=R(Y,W,X,Z)-R'(Y,W,X,Z)$$

- Αφού ισχύει για κυκλική μετάθεση $X, Y, W \mapsto W, X, Y$

  τότε ισχύει για $W, X, Y \longmapsto Y, W, X$.

- Δηλαδή οι τρεις κυκλικοί συνδυασμοί στο X, Y, W είναι ίσοι

$$\xrightarrow{\text{Bianchi}} 0$$

$$\therefore \underbrace{R(X,Y,W,Z) + R(Y,W,X,Z) + R(W,X,Y,Z)}_{=0 \ \text{Bianchi}}$$

$$- R'(X,Y,W,Z) - R'(Y,W,X,Z) - R'(W,X,Y,Z) =$$

$$3\left[R(X,Y,W,Z) - R'(X,Y,W,Z)\right]$$

$$\Rightarrow R(X,Y,W,Z) = R'(X,Y,W,Z) \qquad \forall X, Y, W, Z.$$

Δηλαδή η καμπυλότητα τομής καθορίζει την καμπυλότητα, παρόλο που είναι ένα ίχνος της.

□

<u>Λήμμα:</u> Έστω $Q: T_pM \times T_pM \times T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $Q(X,Y,Z,W) = \langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle$.
Τότε η M έχει σταθερή καμπυλότητα τομής K_0 στο p ανν $R = K_0 Q$.

<u>Απόδειξη:</u> Άσκηση:

$(\Rightarrow)$ $K(\sigma) = K_0$ $\forall \sigma$.

Ορίζουμε $R'(X,Y,Z,W) = K_0\, Q(X,Y,Z,W)$.

ν.δ.ο. ισχύουν (i), (ii), (iii), (iv) για τανυστή καμπυλότητας.

Ορίζουμε $K'(X,Y) = \dfrac{R'(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2} = K_0 \dfrac{|X|^2|Y|^2 - \langle X,Y\rangle^2}{|X\wedge Y|^2} = K_0$
$= K(X,Y)$ $\forall X,Y$.

Άρα από Λήμμα $R = R' = K_0 Q$.

$(\Leftarrow)$ Αν $R = K_0 Q$ τότε $K(X,Y) = K_0$ -υπολογισμός □

<u>Πόρισμα:</u> Έστω $\{e_1,\dots,e_n\}$ ο.κ. βάση για το T_pM.
και $R_{ijkl} = R(e_i,e_j,e_k,e_l)$.
Τότε η καμπυλότητα τομής στο p για το υποεπίπεδο σ
$K(\sigma,p) = K_0$ είναι σταθερή για κάθε $\sigma \subset T_pM$
ανν $R_{ijkl} = K_0(\delta_{il}\cdot\delta_{jk} - \delta_{ik}\delta_{jl})$. όπου $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$.

-Δηλαδή $K = K_0$ $\forall\sigma \Leftrightarrow R_{ijji} = -R_{ijij}$ $\forall i\neq j$ και
$R_{ijkl} = 0$ στις υπόλοιπες περιπτώσεις.

<u>Ορισμός</u>: Έστω $X = z_n$ μοναδιαίο διάνυσμα στο T_pM και $\{z_1, \ldots, z_{n-1}\}$ ο.κ. βάση για το υπερεπίπεδο του T_pM που είναι κάθετο στο X. (υποχώρος του T_pM, κάθετος στο X).

Ορίζουμε : $Ric_p(X) = \sum_{i=1}^{n-1} R(X, z_i, z_i, X)$

η <u>καμπυλότητα Ricci</u> στην κατεύθυνση X

$$S(p) = \sum_{j=1}^{n} Ric_p(z_j) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} R(z_j, z_i, z_i, z_j)$$

η <u>βαθμωτή καμπυλότητα</u> στο p (scalar curvature)

$$Ric_p(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} R(X, z_i, z_i, Y)$$

ο <u>τανυστής Ricci</u> στο p.

* Ο Do Carmo βάζει $1/n$ ή $1/n-1$ αλλά όχι ο συνήθης ορισμός

<u>Πρόταση</u>: Οι πιο πάνω ορισμοί είναι ανεξάρτητοι της βάσης που χρησιμοποιείται.

<u>Απόδειξη</u>: Αν $w_\ell = \sum_i a_{\ell i} z_i$ ο.κ. βάση με $z_n = X$

$$\Leftrightarrow \underset{\delta_{\ell m}}{\underset{\parallel}{\langle w_\ell, w_m \rangle}} = \sum_{i,j} a_{\ell i} a_{mj} \delta_{ij} \Rightarrow \sum_j a_{\ell j} a_{mj} = \delta_{\ell m}$$

$\therefore A = (a_{\ell j})_{\ell j}$ τ.ω. $AA^T = A^T A = I$ ορθός πίνακας

$$\therefore \sum_{\ell=1}^{n-1} R(X, w_\ell, w_\ell, X) = \sum_{\ell=1}^{n-1} \sum_{i,j=1}^{n} a_{\ell i} a_{\ell j} R(X, z_i, z_j, X)$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \underbrace{\sum_{\ell=1}^{n} a_{\ell i} a_{\ell j}}_{\delta_{ij}} R(X, z_i, z_j, X) \qquad \text{αφού } R(X, w_n, w_n, X) = 0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} R(X, z_i, z_i, X) = Ric_p(X)$$

– Παρόμοια τα υπόλοιπα

$\square$

Υπολογισμός τους σε πλαίσιο συντεταγμένων $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$

Θέτουμε $R_{ij} := Ric(\partial_i, \partial_j) = \sum_{k=1}^{n} R(\partial_i, z_k, z_k, \partial_j)$

όπου $z_k = \sum_j \alpha_{kj} \partial_j$

τ.ω. $\underset{\langle z_k, z_e \rangle}{\underset{\shortparallel}{\delta_{ke}}} = \sum_{i,j} \alpha_{ki} \alpha_{ej} g_{ij}$ (*)

Αν $A = (\alpha_{km})_{km}$ πίνακας, τότε (*) $\Leftrightarrow I = A \cdot g A^T$

$\Leftrightarrow g = (A)^{-1} (A^T)^{-1}$ (μεταφορά εσωτερικού γινομένου σε πίνακα - τύπος τετραγωνικής μορφής)

και $g^{-1} = A^T A$.

Άρα $R_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{m,e} \alpha_{km} \alpha_{ke} \cdot R_{imej} = \sum_{m,e} \underbrace{\sum_k \alpha_{km} \cdot \alpha_{ke}}_{(A^T A)_{me}} R_{imej}$

$= \sum_{m,e} g^{me} R_{imej}$ συστολή του τανυστή καμπυλότητας

$S(p) = \sum_k Ric(z_k) = \sum_{i,j} \underbrace{\sum_k \alpha_{ki} \alpha_{kj}}_{g^{ij}} Ric(\partial_i, \partial_j)$

$= \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j,m,e} g^{ij} g^{me} R_{imej}$

διπλή συστολή του τανυστή καμπυλότητας.

(Do Carmo - διαφορετικοί συντελεστές μπροστά από καμπυλότητα, ανάλογα με τη διάσταση).

<u>Λήμμα:</u> Έστω $f: A \subset \mathbb{R}^2 \to M$ μια παραμετρισμένη επιφάνεια στην πολλαπλότητα Riemann (M,g), με συντεταγμένες $(s,t) \in A \subset \mathbb{R}^2$.

Έστω $V(s,t)$ ένα διαν. πεδίο στην f.

Τότε $$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}V - \frac{D}{\partial s}\frac{D}{\partial t}V = R\left(\frac{\partial f}{\partial t}, \frac{\partial f}{\partial s}\right)V$$

σαν ταχύτητα στην κατεύθυνση s

<u>Απόδειξη:</u> Υπολογισμός:

Σε συντεταγμένες $(U, \mathbf{x})$ γειτονιάς του p.

$$V(s,t) = \sum_i v_i(s,t) \frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{DV}{\partial s} = \frac{D}{\partial s}\left(\sum_i v_i \frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \sum_i \left[v_i \frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}\right]$$

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{DV}{\partial s}\right) = \sum_i \left[v_i \frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) + \frac{\partial v_i}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial v_i}{\partial s}\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) + \frac{\partial^2 v_i}{\partial t \partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}\right]$$

Με παρόμοιο τρόπο η $\frac{D}{\partial s}\left(\frac{DV}{\partial t}\right)$, άρα

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{DV}{\partial s}\right) - \frac{D}{\partial s}\left(\frac{DV}{\partial t}\right) = \sum_i v_i \underline{\left[\frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) - \frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right)\right]}_{(*)}$$

Υπολογισμός $(*)$

Σε συντεταγμένες, $f(s,t) = (x_1(s,t), \dots, x_n(s,t))$.

$$\frac{\partial f}{\partial s} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial s}\frac{\partial}{\partial x_i}$$ (ταχύτητα στην κατεύθυνση s).

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \sum_i \frac{\partial x_i}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x_i}$$

$$\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \nabla_{\partial f/\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \nabla_{\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} =$$

$$= \sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot \nabla_{\partial_j} \partial_i \qquad \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \equiv \partial_i\right)$$

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) = \frac{D}{\partial t}\left(\sum_j \frac{\partial x_j}{\partial s}\nabla_{\partial_j}\partial_i\right) =$$

$$= \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t\partial s}\nabla_{\partial_j}\partial_i + \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t}\cdot\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i$$

Παρομοια για το δεύτερο όρο

$$\therefore \frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) - \frac{D}{\partial s}\left(\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)\right) =$$

$$= \cancel{\sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial t\partial s}\nabla_{\partial_j}\partial_i} + \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t}\cdot\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i$$

$$- \sum_j \frac{\partial^2 x_j}{\partial s\partial t}\nabla_{\partial_j}\partial_i - \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial t}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial s}\cdot\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i$$

$j \leftrightarrow k$

$$= \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\cdot\frac{\partial x_k}{\partial t}\left(\nabla_{\partial_k}\nabla_{\partial_j}\partial_i - \nabla_{\partial_j}\nabla_{\partial_k}\partial_i\right)$$

$$= \sum_{j,k}\frac{\partial x_j}{\partial s}\frac{\partial x_k}{\partial t}\left(R_{\partial_k\partial_j}\partial_i\right) = R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}\partial_i$$

$$\therefore (*) = \sum_i v_i\, R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}\partial_i = R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}} V.$$

$\square$

Πόρισμα. Αν $\forall p, q \in M$ η παράλληλη μεταφορά από το p στο q δεν εξαρτάται από την καμπύλη, τότε $R=0$.

Απόδειξη: Για $(s,t) \in \mathbb{R}^2$ με $(s,t) \in U = \{-\varepsilon < t < 1+\varepsilon, \ -\varepsilon < s < 1+\varepsilon\}$

ορίζουμε $f(s,t): U \to M$ τ.ω.

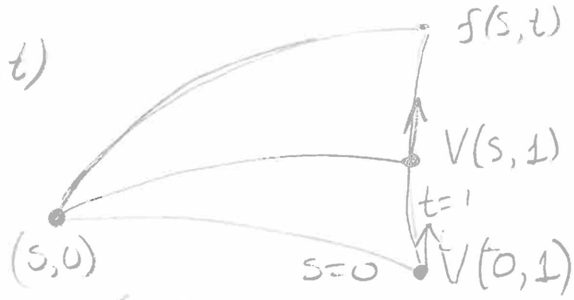
$p = f(s,0) = f(0,0) \quad \forall s$.

Έστω $V_0 \in T_{f(0,0)} M$

Ορίζουμε το διαν. πεδίο $V(s,t)$ τ.ω.

$V(s,0) = V_0 \quad \forall s$ και

$V(s,t)$: η παράλληλη μεταφορά του V_0 στην καμπύλη $t \mapsto f(s,t)$



$\therefore \ \frac{D}{\partial t} V = 0$

και από Λήμμα $\frac{D}{\partial s}\left(\frac{DV}{\partial t}\right) = 0 = \frac{D}{\partial t}\left(\frac{DV}{\partial s}\right) + R_{\frac{\partial f}{\partial s} \frac{\partial f}{\partial t}} V$

Η παράλληλη μεταφορά του V_0 από το $p = f(0,0) = f(s,0)$ στο $f(s,1)$ είναι το $V(s,1)$ και είναι η ίδια με την παράλληλη μεταφορά του V_0 από το $f(0,0)=p$ στο $f(0,1)$ στην καμπύλη $t \mapsto f(0,t)$ (με παίρνει στο $V(0,1)$) ακολουθούμενη από την παράλληλη μεταφ. του $V(0,1)$ στην καμπύλη $s \mapsto f(s,1)$ - αφού // δεν εξαρτάται από την καμπύλη.

Δηλαδή το $V(s,1)$ είναι παράλληλη μεταφ. του $V(0,1)$

$\therefore \ \frac{D}{\partial s} V(s,1) = 0$ και το ίδιο ισχύει $\forall t$ σταθερό $\therefore \ \frac{D}{\partial s} V(s,t) = 0$

$\therefore \ \frac{D}{\partial t}\left(\frac{D}{\partial s} V\right) = 0$.

$\therefore\ R_{\frac{\partial f}{\partial s}(0,t)\ \frac{\partial f}{\partial t}(0,t)} V(0,t) = 0$ σε κάθε t.

αφού το ίδιο ισχύει $\forall t =$ σταθερό, όχι μόνο για $t=1$.
- Άρα ισχύει και στο $t=0$.

f και V_0 τυχαίο και μπορούμε $\forall X, Y \in T_pM$

να βρούμε f με $X(p) = \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{f(0,0)}$ $\quad Y(p) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{f(0,0)}$

$\therefore\ R_{XY} V\Big|_p = 0 \quad \forall X, Y, V \in T_pM \therefore R = 0$

(p επίσης τυχαίο). $\square$.