Πόρισμα (Θεωρητικά) Αν $\forall p,q \in M$ η παράλληλη μεταφορά από το p στο q δεν εξαρτάται από την καμπύλη, τότε $R=0$.

Απόδειξη: Για $(s,t)\in \mathbb{R}^2$ με $(s,t)\in U=\{-\varepsilon<t<1+\varepsilon,\ -\varepsilon<s<1+\varepsilon\}$

ορίζουμε $f(s,t): U \to M$ τ.ω.

$p=f(s,0)=f(0,0)$ $\forall s$.

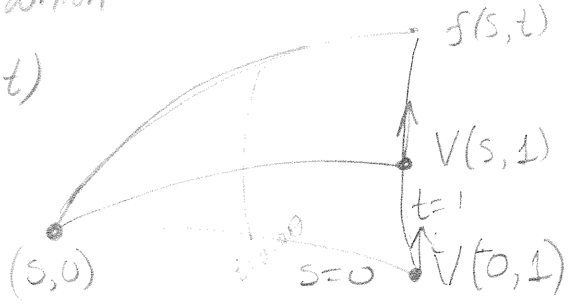
Έστω $V_0 \in T_{f(0,0)}M$

Ορίζουμε το διαν. πεδίο $V(s,t)$ τ.ω.

$V(s,0)=V_0$ $\forall s$ και

$V(s,t)$: η παράλληλη μεταφορά του V_0

στην καμπύλη $t \mapsto f(s,t)$



$\therefore \dfrac{D}{\partial t}V=0$

και από Λήμμα $\dfrac{D}{\partial s}\left(\dfrac{DV}{\partial t}\right)=0=\dfrac{D}{\partial t}\left(\dfrac{DV}{\partial s}\right)+R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}V$

Η παράλληλη μεταφορά του V_0 από το $p=f(0,0)=f(s,0)$ στο $f(s,1)$ είναι το $V(s,1)$ και είναι η ίδια με την παράλληλη μεταφορά του V_0 από το $f(0,0)=p$ στο $f(0,1)$ στην καμπύλη $t\mapsto f(0,t)$ (με παίρνει στο $V(0,1)$) ακολουθούμενη από την παράλληλη μεταφ. του $V(0,1)$ στην καμπύλη $s \mapsto f(s,1)$ - αφού // δεν εξαρτάται από την καμπύλη.

Δηλαδή το $V(s,1)$ είναι παράλληλη μεταφ. του $V(0,1)$

$\therefore \dfrac{D}{\partial s}V(s,1)=0$ και το ίδιο ισχύει $\forall t$ σωστότερο. $\therefore \dfrac{D}{\partial s}V(s,t)=0$

$\therefore \dfrac{D}{\partial t}\left(\dfrac{D}{\partial s}V\right)=0.$

$\therefore \; R_{\frac{\partial f}{\partial s}(0,t)\,\frac{\partial f}{\partial t}(0,t)} V(0,t) = 0$ για κάθε t.

αφού το ίδιο ισχύει $\forall t =$ σταθερό, όχι μόνο για $t=1$.

- Άρα ισχύει και στο $t=0$.

f και V_0 τυχαίο και μπορούμε $\forall X, Y \in T_pM$

να βρούμε f με $X(p) = \left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{f(0,0)}$ $\quad Y(p) = \left.\frac{\partial f}{\partial t}\right|_{f(0,0)}$

$\therefore \; R_{XY} V\big|_p = 0 \quad \forall X, Y, V \in T_pM \therefore R = 0$ $\square$.

(p επίσης τυχαίο).

Ορισμός: Ο τελεστής $\nabla R: \mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\times\mathcal{X}(M)\to\mathbb{R}$

ορίζεται ως:

$$\nabla R(X,Y,Z,W,T) = T(R(X,Y,Z,W)) - R(\nabla_T X, Y, Z, W)$$
$$- R(X,\nabla_T Y, Z, W) - R(X,Y,\nabla_T Z, W) - R(X,Y,Z,\nabla_T W).$$

- Μπορούμε ν.δ.ο. εξαρτάται μόνο από τιμές των X,Y,Z,W,T στο p.
- είναι τανυστής.

Πόρισμα: $\nabla R(X,Y,Z,W,T) + \nabla R(X,Y,W,T,Z) + \nabla R(X,Y,Z,W,T) = 0$

$2^{η}$ ταυτότητα Bianchi.

- Άσκηση - να γίνει σε πλαίσιο συντεταγμένων ή κανονικών συντεταγμένων.

Θεώρημα (Schur) Έστω (M^n, g) πολλ/τα Riemann $n\geq 3$.
Αν σε κάθε $p\in M$ η καμπυλότητα τομής $K(p,\sigma)$ δεν εξαρτάται από το επίπεδο $\sigma\subset T_pM$, αλλά μόνο από το p, δηλαδή $K(p,\sigma) = K(p) = f(p)$ τότε $f(p) =$ σταθερά $\forall p\in M$.

$n=2$: αυτό δεν ισχύει $K(p) =$ καμπυλότητα Gauss της πολλ/τας που μπορεί να μεταβάλλεται.

- Άσκηση στην Εργασία 6.

Αποδ: Χρησιμοποιεί τον τανυστή Q και τη $2^{η}$ ταυτότητα Bianchi

Ορισμός: Η (M^n, g) ονομάζεται πολ/τα Einstein, αν $\forall X,Y \in \mathcal{X}(M)$ $Ric(X,Y) = \lambda\langle X,Y\rangle$ για $\lambda: M \to \mathbb{R}$ λεία συνάρτηση.

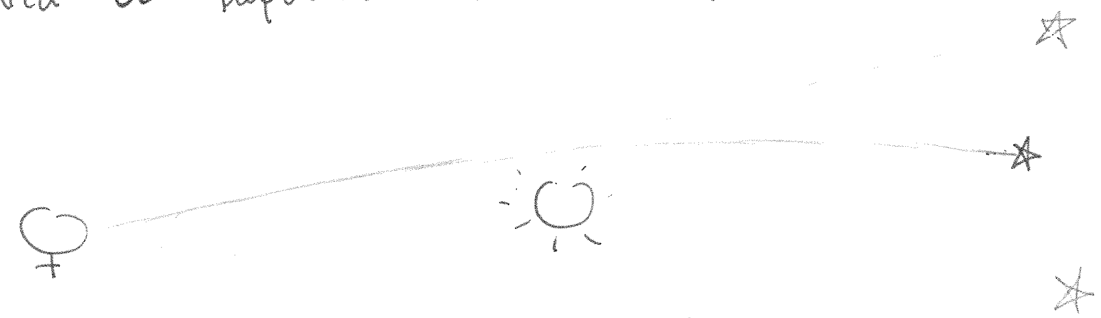
Θεώρημα: Έστω (M^n, g) πολ/τα Einstein με $n \geq 3$.
Τότε $\lambda =$ σταθερά στην M.
Αν $n=3$, η M^3 έχει σταθερή καμπυλότητα τομής.

Άσκηση 632, Εργασία 6 - σε πλαίσιο κανονικών συντεταγμένων με 2η ταυτότητα Bianchi

Γενική Θεωρία της σχετικότητας:

Παρατήρηση ① Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα (φως) κινούνται πάντα με σταθερή ταχύτητα, όταν ο παρατηρητής βρίσκεται σε πλαίσιο αδράνειας.

② Η πορεία του φωτός δεν είναι ευθεία κοντά σε βαρυτικά πεδία. - εκτρέπεται.



Το φως από το αστέρι εκτρέπεται όταν περνά δίπλα από τον ήλιο και το παρατηρούμε μετατοπισμένο (ουσιαστικά θαμπό).

Einstein: M^4 πολλαπλότητα με μετρική Lorentz
- όχι θετικά ορισμένη $g = \tilde{g}|_{\mathbb{R}^3} - \alpha^2 \, dt^2$

τ.ω. $Ric - \frac{1}{2} S \cdot g = T$ (*) S: βαθμωτή καμπυλότητα
T: συμμετρικός τανυστής 2
stress-energy tensor.

T: εκφράζει τη συγκέντρωση ενέργειας και ορμής της ύλης και της ακτινοβολίας.

Η βαρύτητα / τα σώματα μεταφράζονται σε γεωμετρική ιδιότητα του χωρό-χρονου έτσι ώστε το φως να κινείται σε γεωδαισιακές.- καμπύλες σταθερής ταχύτητας.

(*) Σύστημα ΜΔΕ με λύση τη μετρική του χώρου μας.

- Προβλέπει
  - την πορεία του φωτός
  - τη μετακίνηση στο περιήλιο του Ερμή
  - redshift φωτός λόγω βαρυτικών κυμάτων

  τα οποία έχουν επιβεβαιωθεί πειραματικά.
  - ύπαρξη βαρυτικών κυμάτων που έχουν επίσης παρατηρηθεί.
  - ύπαρξη μαύρων τρυπών. - αρκετά μεγάλο βαρυτικό πεδίο → ούτε το φως δεν ξεφεύγει.
- Περιγράφει με τον πιο ακριβή μέχρι σήμερα τρόπο τις παρατηρήσεις μας σε μεγάλη κλίμακα.
- Δεν έχει ενωποιηθεί με κβαντικά μοντέλα που χρησιμοποιούνται σε μικρές κλίμακες.

Brian Greene 'Fabric of the cosmos' Nova.

Κενό $T \equiv 0$ $\quad Ric = \frac{1}{2} S \cdot g$.

$$S = g^{ij} R_{ij} = \sum_{i,j} \frac{1}{2} S \cdot g^{ij} g_{ij} = 2S \quad (n=4 \text{ -διάσταση})$$

$$\Rightarrow S = 0.$$

Einstein: σκέφτηκε να βάλει και κοσμολογική σταθερά

$$Ric - \lambda g - \frac{1}{2} S g = T.$$

Δίνει στο κενό τη μαθηματική εξίσωση του Einstein -αλλά στη φυσική δεν είναι σωστή όπως κατάλαβε μετά.

Εξίσωση Einstein - μαθηματικό ενδιαφέρον

Uniformization Theorem: ποιες είναι οι πολλαπλότητες με σταθερή βαθμωτή καμπυλότητα.

$n=2$ $\quad \tilde{M}/\Gamma$ $\quad$ ~~σε~~ Γ: διακριτή ομάδα μετασχηματισμών

$$G \tilde{M} = \mathbb{R}^2 \quad \text{ή} \quad S^2_R \quad \text{ή} \quad \mathbb{H}^2_R$$

$n \geq 3$? Είναι κρίσιμα σημεία του συναρτησιακού ολικής βαθμωτής καμπυλότητας, όπως και η εξίσωση Einstein, όμως με διαφορετικές μεταβολές.

Υπολογισμός καμπυλότητας: S^2_R

$$X(\phi,\theta) = (R\cos\theta\sin\phi,\ R\sin\theta\sin\phi,\ R\cos\phi)$$

$$g = R^2 d\phi^2 + R^2\sin^2\phi\, d\theta^2$$

$$\partial_1 = \partial/\partial\phi \qquad \partial_2 = \partial/\partial\theta$$

$$g_{11} = R^2 \qquad g_{22} = R^2\sin^2\phi \qquad g_{12} = 0$$

$$g^{11} = \frac{1}{R^2} \qquad g^{22} = \frac{1}{R^2\sin^2\phi} \qquad g^{12} = 0.$$

$$\Gamma_{11}^{1} = 0 = \Gamma_{11}^{2} = \Gamma_{12}^{1} = \Gamma_{22}^{2}$$

$$\Gamma_{12}^{2} = \frac{\cos\phi}{\sin\phi} \qquad \Gamma_{22}^{1} = -\sin\phi\cos\phi.$$

$$R_{ijk}^{\ell} = \sum_m \left[\Gamma_{jk}^{m}\Gamma_{im}^{\ell} - \Gamma_{ik}^{m}\Gamma_{jm}^{\ell}\right] + \frac{\partial}{\partial x_i}(\Gamma_{jk}^{\ell}) - \frac{\partial}{\partial x_j}(\Gamma_{ik}^{\ell})$$

$$R_{111}^{1} = \sum_m \left(\overset{0}{\cancel{\Gamma_{11}^{m}}}\Gamma_{1m}^{1} - \overset{0}{\cancel{\Gamma_{11}^{m}}}\Gamma_{1m}^{\ell}\right) + \partial_1(\Gamma_{11}^{1}) - \partial_1(\Gamma_{11}^{1}) = 0.$$

παρόμοια $R_{11*}^{*} = R_{22*}^{*} = 0$. λόγω συμμετριών του R.

Θα δούμε ότι χρειάζεται μόνο να υπολογίσουμε τα R_{122}^{1} και R_{211}^{2}

$$R_{122}^{1} = \sum_m \left[\Gamma_{22}^{m}\Gamma_{1m}^{1} - \Gamma_{12}^{m}\Gamma_{2m}^{1}\right] + \partial_1(\Gamma_{22}^{1}) - \partial_2(\overset{0}{\cancel{\Gamma_{12}^{1}}})$$

$i=1=\ell$
$j=2=k$

$$= \Gamma_{22}^{1}\overset{0}{\cancel{\Gamma_{11}^{1}}} + \Gamma_{22}^{2}\overset{0}{\cancel{\Gamma_{12}^{1}}} - \overset{0}{\cancel{\Gamma_{12}^{1}}}\Gamma_{21}^{1} - \Gamma_{12}^{2}\Gamma_{22}^{1} + \frac{\partial}{\partial\phi}(-\sin\phi\cdot\cos\phi)$$

$$= \cos^2\phi - \cos^2\phi + \sin^2\phi = \sin^2\phi.$$

$$R_{211}^{\;\;\;2} = \sum_m \left[\Gamma_{11}^m \Gamma_{2m}^2 - \Gamma_{21}^m \Gamma_{1m}^2 \right] + \cancel{\partial_2 (\Gamma_{11}^2)} - \partial_1 (\Gamma_{21}^2)$$

$i = 2 = \ell$
$j = 1 = k$

$$= \overset{0}{\Gamma_{11}^1} \Gamma_{21}^2 + \cancel{\overset{0}{\Gamma_{11}^2}} \Gamma_{22}^2 - \cancel{\overset{0}{\Gamma_{21}^1}} \Gamma_{11}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2 - \partial_1 (\Gamma_{12}^2) =$$

$$= -\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} - \frac{\partial}{\partial\phi}\left(\frac{\cos\phi}{\sin\phi}\right) = -\frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} + 1 + \frac{\cos^2\phi}{\sin^2\phi} = 1$$

$$R_{ijk\ell} = \sum_m \langle R_{ijk}^{\;\;\;m} \partial_m, \partial_\ell \rangle = \sum_m R_{ijk}^{\;\;\;m} \, g_{m\ell}$$

Τα μόνα μη-μηδενικά.

$$R_{1221} = R_{122}^{\;\;\;1} g_{11} + R_{122}^{\;\;\;2} \cancel{g_{21}} = \sin^2\phi \cdot R^2 \quad (= -R_{1212})$$

$$R_{2112} = R_{211}^{\;\;\;1} \overset{0}{g_{12}} + R_{211}^{\;\;\;2} g_{22} = R^2 \sin^2\phi \quad (= -R_{2121})$$

$$R_{ij} = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} R_{ik\ell j} = g^{11} R_{i11j} + g^{22} R_{i22j} \quad \left(= \sum_{k,\ell,m} g^{k\ell} g_{mj} R_{ik\ell}^{\;\;\;m} \right)$$

$$R_{11} = g^{22} R_{1221} = \frac{1}{R^2 \sin^2\phi} \cdot R^2 \sin^2\phi = 1$$

$$R_{22} = g^{11} R_{2112} = \frac{1}{R^2} R^2 \sin^2\phi = \sin^2\phi$$

$R_{ij} = 0$ για $i \neq j$

τανυστής Ricci.

$$S = \sum_{i,j} g^{ij} R_{ij} = g^{11} R_{11} + g^{22} R_{22} = \frac{1}{R^2} + \frac{1}{R^2} = \frac{2}{R^2}$$

βαθμωτή καμπ.

• Για $n=1$, M^1, $g = f^2(x)\, dx^2$

$$g_{11} = f^2$$

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2} g_{11,1} = \frac{f'}{f}$$

$$R_{ij} = \sum_{k,l} g^{kl} R_{iklj} = g^{11} \cdot R_{1111} = 0.$$

• Αν $M = M_1^1 \times M_2^1$ γινόμενο δυο πολλων Riemann (M_1^1, g^1) (M_2^1, g^2) διαστασης 1.

Εστω $g = g^1 + g^2$ η μετρική στην M.

$$\Gamma_{11}^{1} = \frac{1}{2} g^{11} \cdot g_{11,1}$$

$$\Gamma_{11}^{2} = \frac{1}{2} \cdot \underset{0}{g^{12}} (\dots) + \frac{1}{2} g^{22} \cdot (\cancel{g_{12,1} \cdot 2} - \underset{\text{μικτά}}{\overset{0}{g_{11,2}}})$$

παρόμοια Γ_{ij}^{k} με i,j,k μικτα. $\equiv 0$.

$$\Gamma_{22}^{2} = \frac{1}{2} \cdot g^{22} (g_{22,2})$$

$$R_{ijk}^{l} = \sum_m \left[\Gamma_{jk}^{m} \Gamma_{im}^{l} - \Gamma_{ik}^{m} \cdot \Gamma_{jm}^{l} \right] + \frac{\partial}{\partial x_i} (\Gamma_{jk}^{l}) - \frac{\partial}{\partial x_j} (\Gamma_{ik}^{l})$$

$$R_{ijk}^{l} \to \begin{cases} {}^{1}R_{ijk}^{l} & \text{για } i,j,k,l \text{ δείκτες στην } M_1 \\ 0 & \text{στα μικτά} \\ {}^{2}R_{ijk}^{l} & \text{για } i,j,k,l \text{ δείκτες στην } M_2 \end{cases}$$

$\therefore R_{ijkm} = \sum_{\ell} R_{ijk}^{\ell} g_{\ell m} = \sum_{\ell\in M_1} R_{ijk}^{\ell} g_{\ell m} + \sum_{\ell\in M_2} R_{ijk}^{\ell} g_{\ell m}.$

$\nearrow {}^1R_{ijkm}$ για $i,j,k,m \in M_1$
$\rightarrow 0$ στα μικτά.
$\searrow {}^2R_{ijkm}$ για $i,j,k,m \in M_2$.

και $R_{ij} = \sum_{k,\ell} g^{k\ell} R_{ik\ell j} =$
$\nearrow {}^1R_{ij}$ για $i,j \in M_1$
$\rightarrow 0$ στα μικτά.
$\searrow {}^2R_{ij}$ για $i,j \in M_2$

∴ διαχωρισμός του τανυστή καμπυλότητας στις δύο πολλές.

∴ $R_{ijk\ell} = 0$ στην περίπτωση που $M = M_1' \times M_2'$

∴ M επίπεδη.

• Παρόμοια, αν $M = M_1^n \times M_2^m$ με $g = g^1 + g^2$

$R_{ijk\ell}$
$\nearrow {}^1R_{ijk\ell}$ $i,j,k,\ell \in M_1$
$\rightarrow 0$ στα μικτά
$\searrow {}^2R_{ijk\ell}$ $i,j,k,\ell \in M_2$ (αφού ισχύει για Γ_{ij}^{k})

Αν $X \in T_pM_1$ και $Y \in T_qM_2$ $\Rightarrow X, Y \in T_{(p,q)}M$

και έστω σ το υποεπίπεδο που παράγουν τα X, Y στο $T_{(p,q)}M$

τότε $K(\sigma) = \dfrac{R(X,Y,Y,X)}{|X\wedge Y|^2} = 0.$ αφού αντιστοιχεί σε $R_{ijk\ell}$ μικτά

Αν $X, Y \in T_pM_1$ $K(\sigma) = K^1(\sigma)$

Αν $X, Y \in T_qM_2$ $K(\sigma) = K^2(\sigma)$.

| Η καμπυλότητα διαχωρίζεται όταν η μετρική διαχωρίζεται.

• $f(x)^2dx^2 + g(y)^2dy^2 \rightarrow R = 0$ | Σφαίρα $d\phi^2 + \sin^2\phi\, d\theta^2$ $R \neq 0$

$\uparrow$ εξάρτηση της μίας από την άλλης μεταβλητής.

Σχέση ανάμεσα στην καμπυλότητα και γεωμετρία/τοπολογία της πολ/τας:

Θεώρημα Gauss-Bonnet:

Έστω (M^2, g) μια συμπαγής προσανατολισμένη πολ/τα.

K = καμπυλότητα Gauss της M^2 = καμπυλότητα τομής.

$\chi(M)$ = χαρακτηριστική Euler (τοπολογική σταθερά).

Τότε $\int_M K \, dA = 2\pi\chi(M)$.

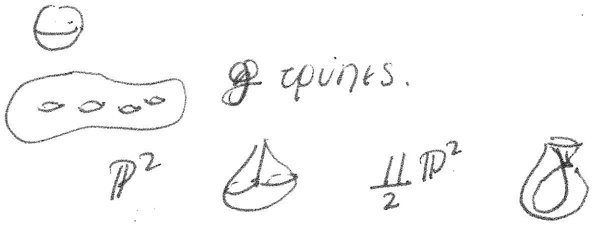
Τοπολογία: Θεώρημα ταξινόμησης συμπαγών επιφανειών.

M^2: συμπαγής επιφάνεια (πολ/τα 2-διάστατη). Τότε η M είναι ομοιομορφική με:

- S^2 ή $\coprod_g T^2$, στην περίπτωση που είναι προσανατολισμένη (συνεκτικό άθροισμα g τόρων, για S^2 $g=0$).
- $\coprod_g \mathbb{P}^2$ (συνεκτικό άθροισμα g $\mathbb{P}^2$) στην περίπτωση που δεν είναι προσανατολισμένη.

g: το γένος της επιφάνειας.

$$\chi(M) = \begin{cases} 2 & \text{αν } M \simeq S^2 : g=0 \\ 2-2g & \text{αν } M \simeq \coprod_g T^2 \\ 2-g & \text{αν } M \simeq \coprod_g \mathbb{P}^2 \end{cases}$$



Gauss-Bonnet δεν ισχύει για μη-προσανατολισμένες, μόνο για το διπλό κάλυμμά τους.

Συνέπεια:

Πόρισμα: Αν μια συμπαγής 2-διάστατη πολλ/τα Riemann (M^2, g) είναι ομοιομορφική με

- S^2 ή $\mathbb{RP}^2$ τότε $K>0$ σε κάποιο σημείο
- $\mathbb{P}^2 \amalg \mathbb{P}^2$ ή T^2 $(\chi(M)=0)$ τότε $K \equiv 0$ (παντού) ή έχει τόσα σημεία όπου $K>0$ και σημεία όπου $K<0$.
- Στις υπόλοιπες περιπτώσεις υπάρχουν πάντοτε σημεία όπου $K<0$.

Πόρισμα. Έστω M μια συμπαγής επιφάνεια Riemann με καμπυλότητα Gauss K.

Αν $K>0$, τότε $M \cong S^2$ ή $M \cong \mathbb{P}^2$

Αν $K \leq 0$, τότε η M έχει γένος $g \geq 1$. αν είναι προσαν. και $g \geq 2$ αν είναι μη-προσανατολίσιμη

Πως η καμπυλότητα επηρεάζει τις γεωδαισιακές:

$K>0 \rightarrow$ η γεωδαισιακές δεν απομακρύνονται τόσο όσο στο $\mathbb{R}^n$

$K<0 \rightarrow$ η γεωδαισιακές απομακρύνονται περισσότερο παρά ότι στο $\mathbb{R}^n$