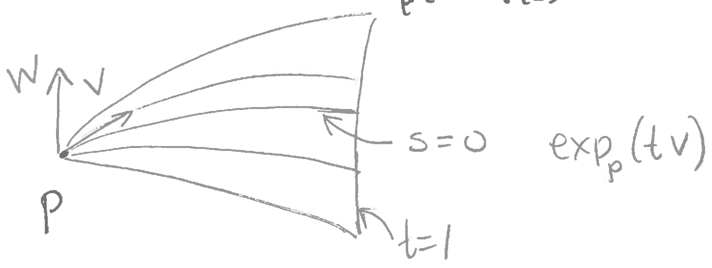
Εξισώσεις Jacobi.

Υπενθύμιση:

Λήμμα Gauss:

$f(t,s) = \exp_p(t\, v(s))$ $\quad 0 \leq t \leq 1 \quad |s| < \varepsilon$

με $v(s)$ τ.ω. $v(0) = v \quad v'(0) = w$.



Τότε $\dfrac{\partial f}{\partial s}(1,0) = (d\exp_p)_{t v(s)} (t \cdot v'(s)) \Big|_{\substack{t=1 \\ s=0}} = (d\exp_p)_v (w)$

$|(d\exp_p)_v(w)|$ χαρακτηρίζει το ρυθμό απομάκρυνσης των γεωδαισιακών $t \longmapsto \exp_p(t v(s))$

Εξαρτάται από την καμπυλότητα τομής στο p για το επίπεδο που παράγουν τα v, w.

<u>Ορισμός</u>: Αν $(d\exp_p)_v(w) = 0$ για $w \neq 0$ τότε το v ονομάζεται ιδιάζον σημείο της εκθετικής απεικόνισης στο p $\exp_p$.

<u>Λήμμα</u> (από προηγούμενο μάθημα). $f(t,s)$ $\quad V(t,s)$ διαν. πεδίο στην f.

Τότε $\dfrac{D}{\partial t}\left(\dfrac{DV}{\partial s}\right) - \dfrac{D}{\partial s}\left(\dfrac{DV}{\partial t}\right) = R_{\frac{\partial f}{\partial t} \frac{\partial f}{\partial s}} V$

όπου $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial t}\right\}$ πλαίσιο συντεταγμένων της υπο-επιφάνειας με $\left[\dfrac{\partial f}{\partial s}, \dfrac{\partial f}{\partial t}\right] = 0$.

$\frac{\partial f}{\partial s}(t,s) = \left(d\exp_p\right)_{tv(s)}\left(t\,v'(s)\right)$ είναι διαν. πεδίο στην f

$\frac{\partial f}{\partial t}(t,s) = \left(d\exp_p\right)_{tv(s)}\left(v(s)\right)$ είναι επίσης διαν. πεδίο.

και αφού $t \mapsto \exp_p(t\,v(s_0))$ είναι γεωδαισιακή σε κάθε $s=s_0$ σταθερό,

τότε $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{Df}{\partial t}\right) = 0$

Θέτουμε $V = \frac{\partial f}{\partial t}$. Τότε από το Λήμμα:

$$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) - \frac{D}{\partial s}\overbrace{\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right)}^{0} - R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}\frac{\partial f}{\partial t} = 0$$

Θυμίζουμε ότι $\frac{D}{\partial s}\left(\frac{\partial f}{\partial t}\right) = \frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)$ αφού η f είναι παραμετρισμένη επιφάνεια (Λήμμα συμμετρίας) και

$$R_{\frac{\partial f}{\partial t}\frac{\partial f}{\partial s}}(*) = -R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}(*)$$

Άρα: $$\frac{D}{\partial t}\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right) + R_{\frac{\partial f}{\partial s}\frac{\partial f}{\partial t}}\frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Ορίζουμε $J(t) = \frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ και $\frac{\partial f}{\partial t}(t,0) = \gamma'(t)$ (αφού γεωδαισιακή)

Τότε: $\frac{D^2 J}{dt^2} + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0$. - εξίσωση Jacobi.

<u>Ορισμός:</u> Έστω $\gamma : [0,a] \to$ γεωδαισιακή και $J(t)$ διαν. πεδίο στη γ.

Το J ονομάζεται <u>πεδίο Jacobi</u> αν $\forall t \in [0,a]$

$$\boxed{\frac{D^2 J}{dt^2} + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0}$$

- Από τα πιο πάνω, το πεδίο $\frac{\partial f}{\partial s}(t,0)$ είναι πεδίο Jacobi.

<u>Σε συντεταγμένες:</u> Έστω $\{e_i(t)\}_i$ βάση παράλληλων ο.κ. πεδίων στη γ. $(e_i(t) = P_{0t}\, e_i(0)$, $\{e_i(0)\}_i$ ο.κ$)$

$$J(t) = \sum_i f_i(t)\, e_i(t).$$

και $\frac{D^2 J}{dt^2} = \sum_i f_i''(t)\, e_i(t)$ αφού $\frac{D(e_i(t))}{dt} = 0$.

$$R_{e_i\gamma'}\gamma' = \sum_j \langle R_{e_i\gamma'}\gamma', e_j\rangle e_j$$ αφού e_j ο.κ.

Αν το J είναι πεδίο Jacobi, τότε.

$$\langle \sum_i f_i''\, e_i + R_{(\sum_i f_i e_i)\gamma'}\gamma', e_j\rangle = 0 \quad \forall j$$

$$\Rightarrow f_j''(t) + \sum_i f_i(t)\underbrace{\langle R_{e_i(t)\gamma'(t)}\gamma'(t), e_j(t)\rangle}_{\alpha_{ij}} = 0 \quad \forall j \qquad (*)$$

Το σύστημα εξισώσεων (*) αποτελείται από γραμμικές εξισώσεις δεύτερου βαθμού/τάξης.

Άρα κάθε τιμές $J(0)$, $\frac{DJ}{dt}(0)$ ορίζουν μία και μοναδική λύση για $t \in [0,a]$.

Παρατηρούμε ότι υπάρχουν 2n Γ.Α. πεδία Jacobi στη γ.

Επίσης τα πεδία $\gamma'(t)$ και $t\gamma'(t)$ είναι πεδία Jacobi.

$$\left(\frac{D^2(\gamma')}{dt^2} = 0 \ , \ \frac{D^2}{dt^2}(t\gamma') = 0 \quad \text{και} \quad R_{t\gamma' \gamma'} \gamma' = R_{\gamma' \gamma'} \gamma' = 0. \right)$$

Τα υπόλοιπα Γ.Α. πεδία Jacobi είναι κάθετα στη γ.

- Τα πεδία Jacobi θα μας βοηθήσουν να δούμε το πόσο γρήγορα απομακρύνονται οι γεωδαισιακές που ξεκινούν στο p, ανάλογα με την καμπυλότητα, αλλά και να χαρακτηρίσουμε τα ιδιάζοντα σημεία του $\exp_p$.

Πεδία Jacobi σε πολ/τες σταθερής καμπυλότητας.

Έστω M πολ/τα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής K. (K ανεξάρτητη του $\sigma \Rightarrow$ ανεξάρτητη του σημείου για $n \geq 3$. - Εμείς υποθέτουμε $K(p,\sigma) = K$ $\forall p, \forall \sigma$.)

Έστω γ γεωδαισιακή με $|\gamma'| = 1$.
και $J(t)$ πεδίο Jacobi στη γ, κάθετο στο $\gamma'(t)$. $\forall t$.

<u>Λήμμα</u>: $R_{J\gamma'}\gamma' = KJ$.

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $K(p,\sigma) = K$, τότε.

$$R(X,Y,Z,W) = K\,Q(X,Y,Z,W) = K(\langle X,W\rangle\langle Y,Z\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle)$$

$$\therefore \langle R_{J\gamma'}\gamma', T\rangle = R(J,\gamma',\gamma',T) = K(\langle J,T\rangle\langle \gamma',\gamma'\rangle - \langle J,\gamma'\rangle\langle\gamma',T\rangle)$$

$$= K\langle J,T\rangle. \quad \forall T.$$

$$\therefore R_{J\gamma'}\gamma' = KJ. \qquad \square$$

• Παρατήρηση: Αν V, W διαν. πεδία στο $\mathbb{R}^n$ τ.ω. $\langle V,Z\rangle = \langle W,Z\rangle$ $\forall Z \in \mathbb{R}^n$, τότε $V = W$.

Άρα για κάθε πεδίο Jacobi κάθετο στη γ' ισχύει

$$\frac{D^2 J}{dt} + KJ = 0.$$

Έστω $W(t)$ παράλληλο διαν. πεδίο στη γ με $\langle \gamma', W \rangle = 0$ και $|W| = 1$, τότε

$$J(t) = \begin{cases} \dfrac{\sin(t\sqrt{K})}{\sqrt{K}} W(t) & \text{αν } K > 0 \\ t W(t) & \text{αν } K = 0 \\ \dfrac{\sinh(t\sqrt{-K})}{\sqrt{-K}} W(t) & \text{αν } K < 0 \end{cases}$$

είναι οι λύσεις της εξίσωσης Jacobi με $J(0) = 0$ και $J'(0) = W(0)$.

(• αφού $\frac{DW}{dt} = 0$, τότε $\frac{D^2 J}{dt^2} = (\varphi_K(t))'' \cdot W(t) = -K \varphi_K(t) \cdot W(t)$.

οι συναρτήσεις συντελεστές του W, είναι λύσεις της $\varphi_K'' = -K\varphi_K$ με $\varphi_K(0) = 0$ και $\varphi_K'(0) = 1$).

• Το $W(0)$ καθορίζει μοναδικά το $W(t)$.

• Η μοναδικότητα των λύσεων για την εξίσωση Jacobi (αφού καθορίσουν αρχικές συνθήκες) μας δείχνει ότι αυτός είναι και ο μοναδικός τρόπος να πάρουμε πεδίο Jacobi στη γ με $J(0) = 0$:

Πρόταση: Αν $J(t)$ είναι πεδίο Jacobi στη γεωδαισιακή $\gamma(t):[0,a]\to M$ με $\gamma'(0)=v$ και $\gamma(0)=p$ τ.ω. $J(0)=0$ και $J'(0)=w$, τότε $J(t)=\frac{\partial}{\partial s}(\exp_p(tv(s)))\big|_{(t,0)}$ όπου $v(s)$ καμπύλη στο T_pM με $v(0)=v$ και $v'(0)=w$.

Απόδειξη: Έστω $f(s,t)=\exp_p(tv(s))$ και $\bar{J}(t)=\frac{\partial f}{\partial s}\big|_{(t,0)}$.

$$\frac{\partial f}{\partial s}\Big|_{(t,0)}=(d\exp_p)_{tv(0)}(t\cdot v'(0))=(d\exp_p)_{tv}(tw)=$$

$$=t\,(d\exp_p)_{tv}(w) \qquad \therefore\ \bar{J}(0)=0$$

$$\frac{D}{\partial t}\left(\frac{\partial f}{\partial s}\right)=\frac{D}{\partial t}\left(t\,((d\exp_p)_{tv}(w))\right)=$$

$$=(d\exp_p)_{tv}(w)+t\cdot\frac{D}{\partial t}\left((d\exp_p)_{tv}(w)\right)$$

$$\therefore\ \frac{D}{\partial t}(\bar{J}(t))\Big|_{t=0}=\bar{J}'(0)=(d\exp_p)_0(w)=w$$

αφού $(d\exp_p)_0=Id$.

Άρα $\bar{J}$ τ.ω. $\bar{J}(0)=0$, $\bar{J}'(0)=w$

Είχαμε δείξει ότι το $\bar{J}$ είναι πεδίο Jacobi.

Άρα από μοναδικότητα λύσεων εξίσωσης 2ου βαθμού (όταν καθορίζεται $J(0)$ και $J'(0)$) τότε $\bar{J}(t)=J(t)$ $\forall t\in[0,a]$.

$\square$

Πόρισμα: Έστω $\gamma:[0,a]\to M$ γεωδαισιακή. Τότε το πεδίο Jacobi στη γ με $J(0)=0$ δίνεται από:

$$J(t)=(d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(t\,J'(0)).$$

• Στόχος να δούμε το πόσο απομακρύνονται οι γεωδαισιακές - σχετίζεται με το μήκος $|J(t)|$ όπως θα δούμε.

<u>Πρόταση</u>: Έστω $\gamma:[0,a]\to M$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$ και $\gamma'(0)=v$.
Έστω w διάνυσμα με $|w|=1$ $\left(w\in T_v(T_pM),\ |w|=|w|_p=1\right)$
και J πεδίο Jacobi στη γ με

$$J(t)=(d\exp_p)_{tv}(tw) \qquad 0\le t\le a.$$

Τότε το ανάπτυγμα Taylor της $|J(t)|^2$ στο $t=0$ δίνεται από:

$$|J(t)|^2=t^2-\frac{1}{3}\langle R_{wv}v,w\rangle t^4+R_{em}(t)$$ όπου

$$\lim_{t\to 0}\frac{R_{em}(t)}{t^4}=0. \qquad (R_{em}: \text{το υπόλοιπο}).$$

Επίσης $$|J(t)|=t-\frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3+\tilde{R}_{em}(t)$$

με $\lim_{t\to 0}\frac{\tilde{R}_{em}(t)}{t^3}=0$, όταν $|v|=1$, $\langle v,w\rangle=0$ και σ το επίπεδο που παράγεται από v,w.

<u>Απόδειξη</u>: Αφού $J(0)=0$ και $J'(0)=w$

$$\langle J,J\rangle(0)=0$$
$$\langle J,J\rangle'(0)=2\langle J,J'\rangle=0$$
$$\langle J,J\rangle''(0)=2\langle J',J'\rangle(0)+2\langle J'',J\rangle(0)=2|w|^2=2$$

Επίσης $J''(0)=-(R_{J\gamma'}\gamma')(0)=0$ $\quad (J(0)=0)$

$$\therefore\ \langle J,J\rangle'''(0)=6\langle J',J''\rangle(0)+2\langle J''',J\rangle(0)=0$$

$$\langle J,J\rangle''''(0)=8\langle J',J'''\rangle(0)+6\langle J'',J''\rangle(0)+2\langle J'''',J\rangle(0)=$$
$$=-8\langle J',\frac{D}{\partial t}(R_{J\gamma'}\gamma')\rangle(0)$$

όπου $\langle J', \frac{D}{\partial t}(R_{J\gamma'}\gamma')\rangle\big|_{t=0} = \frac{D}{\partial t}(\langle J', R_{J\gamma'}\gamma'\rangle)\big|_{t=0} - \overset{0}{\langle J'', R_{J\gamma'}\gamma'\rangle}\big|_{t=0}$

$$= \frac{D}{\partial t}(R(J,\gamma',\gamma',J'))\big|_{t=0} = -\frac{D}{\partial t}(R(\gamma',J',\gamma',J))\big|_{t=0} =$$

$$= -\frac{D}{\partial t}\langle R_{\gamma'J'}\gamma', J\rangle\big|_{t=0} = -\overset{0}{\langle \frac{D}{\partial t}(R_{\gamma'J'}\gamma'), J\rangle}\big|_{t=0} - \langle R_{\gamma'J'}\gamma', J'\rangle\big|_{t=0}$$

$$= -R(\gamma', J'(0), \gamma'(0), J'(0))$$

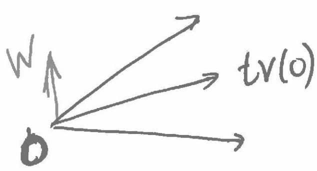
$\therefore$ $\langle J,J\rangle''''(0) = +8R(v,w,v,w) = -8R(w,v,v,w)$

- Με αυτά παίρνουμε την ακολουθία Taylor για το $|J(t)|^2$
- Για την $|J(t)|$ βρίσκεις την ακολ. $\sum_i a_i t^i$ τ.ω. $(\sum_i a_i t^i)^2 = |J(t)|^2$

□

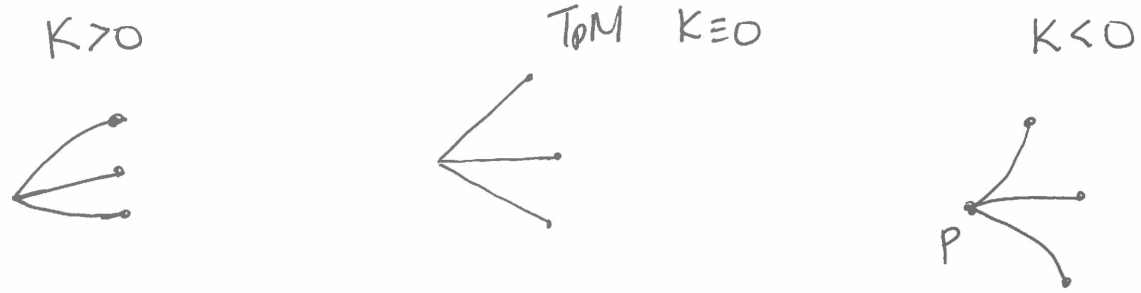
Παρατήρηση: Έστω $f(t,s) = \exp_p(tv(s))$ $\quad t\in[0,\delta]$ $\quad s\in(-\varepsilon,\varepsilon)$.
δ τ.ω. $\exp_p(tv(s))$ να ορίζεται και $v(s)$ καμπύλη στο T_pM με $|v(s)|=1$, $v(0)=v$ $\quad v'(0)=w$ με $|w|=1$.

Στο T_pM: οι καμπύλες $tv(s)$ απομακρύνονται από την $t\mapsto tv(0)$ με ταχύτητα $\left|\frac{\partial}{\partial s}(tv(s))\right|\Big|_{s=0} = |tv'(0)| = |tw| = t$.



Το ανάπτυγμα Taylor $|J(t)| = t - \frac{1}{6}\cdot K(p,\sigma)\cdot t^3 + \widetilde{Rem}$ μας δείχνει ότι οι γεωδαισιακές $\gamma_s(t) = \exp_p(tv(s))$ απομακρύνονται από την "κεντρική" γεωδ. $\gamma_0(t) = \exp_p(tv(0))$ με ταχύτητα που διαφέρει από το t κατά έναν όρο τρίτης τάξης, $-\frac{1}{6}K(p,\sigma)t^3$.

Δηλαδή, τοπικά, αν η καμπυλότητα τομής $K(p,\sigma)$ είναι θετική $K(p,\sigma)>0$, τότε οι γεωδαισιακές απομακρύνονται λιγότερο παρά στο εφαπτόμενο επίπεδο, ενώ αν $K(p,\sigma)<0$, τότε απομακρύνονται περισσότερο, παρά στο εφαπτόμενο επίπεδο.



Συζυγή Σημεία:

Ορισμός: Έστω $\gamma:[0,a]\to M$ γεωδαισιακή. Το σημείο $\gamma(t_0)$, για $t_0\in(0,a]$, ονομάζεται συζυγές σημείο του $\gamma(0)$ αν υπάρχει μη-μηδενικό πεδίο Jacobi στη γ με $J(0)=J(t_0)=0$.

Ο μέγιστος αριθμός τέτοιων γραμμικά ανεξάρτητων πεδίων Jacobi ονομάζεται πολλαπλότητα (αλγεβρική πολ/τα) του συζυγούς σημείου $\gamma(t_0)$.

- Παρατήρηση ① Αν $\gamma(t_0)$ είναι συζυγές σημείο του $\gamma(0)$, τότε και το $\gamma(0)$ είναι συζυγές σημείο του $\gamma(t_0)$. • $\gamma(0), \gamma(t_0)$ ονομάζονται συζυγές ζεύγος.

② Αν η M έχει διάσταση n, τότε υπάρχουν n Γ.Α. πεδία Jacobi στη γ με $J(0)=0$.

Αυτό ισχύει γιατί για πεδία Jacobi $\{J_1,\dots,J_k\}$ με $J_i(0)=0$, τα πεδία είναι Γ.Α. ανν $\{J_1'(0),\dots,J_k'(0)\}$ είναι Γ.Α. λόγω της γραμμικότητας της εξίσωσης Jacobi.

Ταυτόχρονα, το πεδίο Jacobi $J(t)=t\gamma'(t)$ ποτέ δε μηδενίζεται για $t>0$ στη γ.

Άρα η πολλαπλότητα ενός συζυγούς σημείου είναι το πολύ $n-1$.

Παράδειγμα: $S^n=\{x\in\mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\|=1\}$. γ: γεωδαισιακή.

Πεδία Jacobi για κάθε $w(t)$ παράλληλο διαν. πεδίο στη γ με $w(0)\perp\gamma'(0)$, $(\Leftrightarrow w(t)\perp\gamma'(t))$ $J(t)=(\sin t)\,w(t)$

(επίσης $J_0(t)=t\cdot\gamma'(t)$ είναι πεδίο Jacobi)

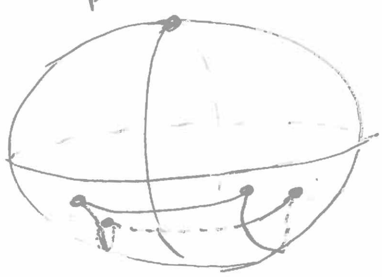
Αφού υπάρχουν $n-1$ Γ.Α. $w(0)$ κάθετα στο $\gamma'(0)$, παίρνουμε όλα τα πεδία Jacobi.

Παρατηρούμε ότι $J(\cancel{0})=J(\pi)=0$ $\forall\, w(0)$ $\therefore$ $\gamma(0)$ και $\gamma(\pi)$ είναι συζυγή σημεία (ζεύγη) πολλαπλότητας $n-1$, και δεν υπάρχουν άλλα για $t<\pi$

Ορισμός: Το σύνολο των (πρώτων) συζυγών σημείων ενός σημείου $p \in M$ για όλες τις γεωδαισιακές που ξεκινούν στο p ονομάζεται <u>συζυγής τόπος</u> (conjugate locus) του p και συμβολίζεται με $C(p)$. -1

Παρ. Στην S^n $C(p) = -p$ - το αντίποδο σημείο.

Σε ελλειψοειδές $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, είναι καμπύλη με τέσσερα ιδιάζοντα σημεία. $(a \neq b \neq c)$



Πρόταση: Έστω $\gamma:[0,a] \to M$ γεωδαισιακή με $\gamma(0)=p$. Το σημείο $q=\gamma(t_0)$ για $t_0 \in (0,a]$ είναι συζυγές του p ανν το σημείο $v_0 = t_0\gamma'(0)$ είναι κρίσιμο σημείο της $\exp_p$. Επιπρόσθετα, η πολλαπλότητα του συζυγούς σημείου q του p ισούται με τη διάσταση του μηδενικού χώρου (πυρήνα/kernel) του $(d\exp_p)_{v_0}$.

Απόδειξη: $q=\gamma(t_0)$ συζυγές του p ανν υπάρχει πεδίο Jacobi $J(t)$ με $J(0)=J(t_0)=0$.
Όπως είδαμε $J(t)=(d\exp_p)_{tv}(tw)$ για $t \in [0,a]$, με $w=J'(0)\neq 0$.

$J(t_0)=0 \iff \exists w \neq 0$ τ.ω. $(d\exp_p)_{t_0v}(t_0w)=0$

$\iff$ το $t_0v=v_0$ είναι κρίσιμο σημείο της $\exp_p$.

Η πολλ/τα του q ισούται με τον αριθμό των Γ.Α. $J'(0)=w$, που ικανοποιούν $(d\exp_p)_{v_0}(t_0w)=0$, άρα με τη διάσταση του πυρήνα του $(d\exp_p)_{v_0}$. □

Παρατήρηση:

p συζυγές του q $\Leftrightarrow$ q συζυγές του p
με βάση τον ορισμό ως προς τα πεδία Jacobi.

p συζυγές του $\underset{\gamma(t_0)}{\overset{\|}{q}} \Leftrightarrow (d\exp_p)_{t_0\gamma'(0)}(t_0 J'(0))=0$ για κάποιο $J'(0)$
$J'(0) \perp \gamma'(0)$.

q συζυγές του $\underset{\tilde{\gamma}(t_0)}{\overset{\|}{p}} \Leftrightarrow (d\exp_q)_{t_0\tilde{\gamma}'(0)}(t_0 \tilde{J}'(0))=0$ για κάποιο
$\tilde{J}'(0)$ με $\tilde{J}'(0) \perp \tilde{\gamma}'(0)$.

p, q συζυγή ανν $\exp_p$ και $\exp_q$ έχουν
κρίσιμο σημείο σε κάποιο σημείο μετά από χρόνο t_0,
στην κατεύθυνση της γεωδαισιακής.