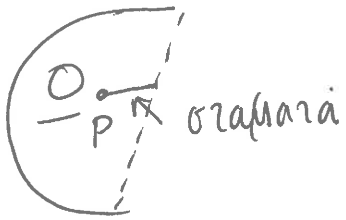
Πλήρεις Πολλαπλότητες:

<u>Ορισμός</u>: Μια πολ/τα Riemann ονομάζεται <u>γεωδαισιακά πλήρης</u> αν $\forall p \in M$ η απεικόνιση $\exp_p$ ορίζεται για κάθε $v \in T_pM$.

- Δηλαδή όλες οι γεωδαισιακές $\gamma(t)$ από το p ορίζονται $\forall t \in \mathbb{R}$ και αυτό να ισχύει $\forall p \in M$.

- Η M δεν έχει τοπολογικό σύνορο με τοπολογία την επαγόμενη από την μετρική.

Αν $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ με $g = \delta_{ij}$ και Ω φραγμένο, τότε (Ω, δ_{ij}) δεν είναι πλήρης.



Παρόμοια αν (M,g) με M άνω ημισφαίριο του S^2 και μετρική αυτή του S^2

Όμως $\mathbb{H}^2 = (\mathbb{R}^2_+, g)$ $\quad g = \dfrac{4(dx^2+dy^2)}{y^2}$ είναι πλήρης

← άξονας x που φαίνεται σαν "σύνορο" στο $\mathbb{R}^2$, δεν είναι σύνορο για τον $\mathbb{H}^2$, αφού καμία γεωδαισιακή δε θα φτάσει ποτέ εκεί. Είναι το "άπειρο" του χώρου. Το $\mathbb{H}^2$ είναι γεωδαισιακά πλήρης πολ/τα.

Παρόμοια για $\mathbb{H}^2$ με μοντέλο μπάλας Poincaré

είναι γεωδαισιακά πλήρης πολ/τα.

$$d(p,q) := \inf_{c} \{ L(c) \mid c \text{ τμηματικά διαφορίσιμη καμπύλη από το } p \text{ στο } q. \}$$

(M,d) : είναι μετρικός χώρος όπως είδαμε, αφού

(i) $d(p,r) \leq d(p,q) + d(q,r)$

(ii) $d(p,q) = d(q,p)$

(iii) $d(p,q) \geq 0$ και $d(p,q) = 0$ ανν $p = q$.

Αν υπάρχει γεωδαισιακή γ από το p στο q που να ελαχιστοποιεί την απόσταση, τότε $L(\gamma) = d(p,q)$.

Αν υπάρχει καμπύλη με $\ell(c) = d(p,q)$ τότε η c είναι γεωδ.

- Δεν υπάρχει πάντα γεωδ. που να ελαχιστοποιεί την απόσταση:

Παρ. $\{\mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ g = \delta_{ij}\}$

$d(-p,p) = 2\|p\|$ όμως $\nexists\ \gamma$ από το $-p$ στο p στο $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ με μήκος $2\|p\|$.

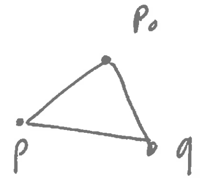
<u>Πρόταση:</u> Η τοπολογία της M που επάγεται από τη μετρική d είναι ισοδύναμη με την τοπολογία της διαφορίσιμης πολλ/τας M.

- $B_r(p) = \exp_p(B_r(\vec{0}))$ για r αρκετά μικρό.
  και έχουμε κανονική συντεταγμένες από το $\mathbb{R}^n \cong T_pM$ στην M.

Επίσης $B_r(p) = \{q \mid d(p,q) < r\}$ για r αρκετά μικρό (τ.ω. $\exp_p$ διαφορομορφισμός).

Άρα οι τοπολογία η επαγόμενη από τους χάρτες είναι ισοδύναμη με την επαγόμενη από τη μετρική d.

<u>Πόρισμα:</u> Η συνάρτηση $f: M \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $f(p) = d(p, p_0)$ για κάποιο $p_0 \in M$ σταθερό είναι συνεχής.



• $|f(p) - f(q)| = |d(p, p_0) - d(q, p_0)| \le d(p,q) < \varepsilon$
για $d(p,q) < \delta = \varepsilon$.

<u>Θεώρημα</u> (Hopf - Rinow) Έστω (M, g) πολ/τα Riemann. ΤΑΕΙ:

(a) $\exp_p$ ορίζεται σε όλο το T_pM. για 1 σημείο $p \in M$.

(b) (Heine - Borel) Τα κλειστά και φραγμένα υποσύνολα της M είναι συμπαγή. (σε μετρικό χώρο συμπαγές $\to$ κλειστό και φραγμένο).

(c) Η (M, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος.

(d) Η M είναι γεωδαισιακά πλήρης.

(e) Υπάρχει ακολουθία συμπαγών υποσυνόλων $K_n \subset M$ με $K_n \subset K_{n+1}$ και $\bigcup_n K_n = M$ τ.ω. αν $q_n \notin K_n$, $d(p, q_n) \to \infty$.

Επιπρόσθετα, οποιοδήποτε από τα πιο πάνω συνεπάγεται:

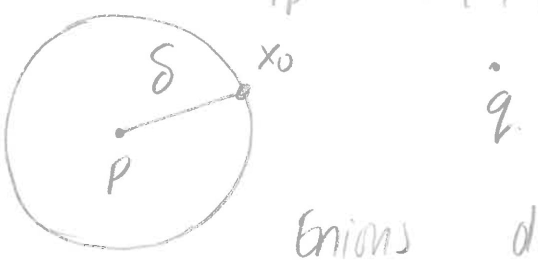
(f) $\forall q \in M$ υπάρχει γεωδαισιακή γ από το p στο q με $\ell(\gamma) = d(p,q)$ (μπορεί να ισχύει έστω κι αν δεν είναι πλήρης η M).

Απόδειξη.

(b) $\Leftrightarrow$ (e) : από Πραγματική ανάλυση - ισχύει για μετρικούς χώρους.

1. (a) $\to$ (f)
2. (a) & (f) $\to$ (b)
3. (b) $\to$ (c)
4. (c) $\to$ (d)
5. (d) $\to$ (a)

(a) $\to$ (f). Έστω $d(p,q) = r$ και $B_\delta(p)$ κανονική γεωδαισιακή μπάλα για το p.
Τότε $S = \partial B_\delta(p)$ είναι συμπαγής στην M, αφού $\exp_p$ διαφορομορφισμός και $\partial B_\delta(0)$ συμπαγής στο T_pM



$(S = \exp_p(\partial B_\delta(0)))$

Επίσης $d(x,q)$ συνεχής. Αφού S συμπαγής τότε $\exists x_0 \in S$ τ.ω. $d(x_0,q) = \min\{d(x,q) \mid x \in S\}$ άρα $x_0 = \exp_p(\delta v)$ με $|v| = 1$.

$\gamma(s) := \exp_p(sv)$ $s \in \mathbb{R}$, γεωδαισιακή.
Θα δείξουμε ότι $\exp_p(rv) = q$ $(r = d(p,q))$

Έστω $A = \{s \in [0,r] \mid d(\gamma(s), q) = r - s\}$

Ξέρουμε ότι στο $s = 0$ $d(\gamma(0), q) = d(p,q) = r$, άρα $0 \in A$

Θα δείξουμε ότι το A είναι ανοικτό και κλειστό υποσύνολο στο $[0,r]$.

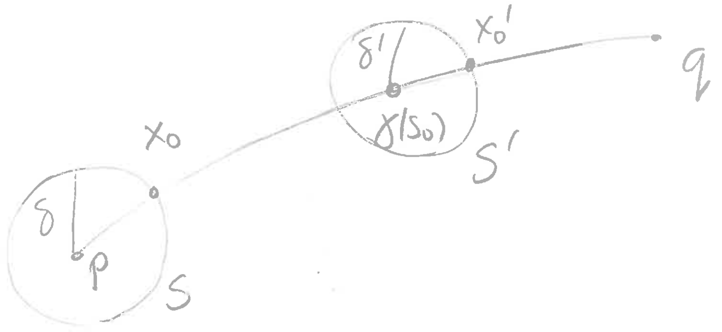
Το A είναι <u>κλειστό</u>, αφού d συνεχής συνάρτηση και άρα αν μια ακολουθία $\{s_k\}$ με $s_k \to s_0$ περιέχεται στο A, τότε $s_0 \in A$.

Για ανοικτό ν.δ.ο. αν $s_0 \in A$ τότε $\exists \delta' > 0$ τ.ω.
$(s_0 - \delta', s_0 + \delta') \cap [0, r] \subset A$

$s_0<r$: Από τις ιδιότητες ελαχιστοποίησης του γ, ξέρουμε ότι $(s_0-\delta', s_0] \subset A$. ⊙

$B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ κανονική γεωδ. μπάλα στο $\gamma(s_0)$ για δ' μικρό.

με $S' = \partial B_{\delta'}(\gamma(s_0))$ - πάλι συμπαγής



Έστω $x_0' \in S'$ τ.ω. $d(x_0', q) = \min\{d(x,q) \mid x \in S'\}$.

- Αρκεί να δείξουμε ότι $x_0' = \gamma(s_0+\delta')$ (*)
- Υποθέτουμε (*)

Ξέρουμε ότι $d(\gamma(s_0),q) = d(x_0',q) + \delta'$ αφού για να πάμε από το $\gamma(s_0)$ στο q περνάμε από το S' και το x_0' έχει την ελάχιστη απόσταση από το q. Επίσης $d(\gamma(s_0),q) = r - s_0$.

Άρα, $r - s_0 = \delta' + d(\underset{\gamma(s_0+\delta')}{\underset{\shortparallel}{x_0'}}, q) = \delta' + d(\gamma(s_0+\delta', q))$, αν υποθέσουμε (*)

$$\Rightarrow d(\gamma(s_0+\delta'), q) = r - (s_0+\delta') \Rightarrow s_0+\delta' \in A.$$

και άρα το $(s_0, s_0+\delta') \subset A$.

- Αν ένα υποσύνολο A του $[0,r]$ είναι ανοικτό και κλειστό στο $[0,r]$ τότε $A = [0,r]$. • Αν $r \in A \Rightarrow d(\gamma(r), q) = 0$
  $\Rightarrow \gamma(r) = q$.

- Τώρα θ.δ.ο. $x_0' = \gamma(s_0+\delta')$ (*)

⊙ Σημείωση. $d(\gamma(s_0-\varepsilon), q) \leq d(\gamma(s_0), q) + d(\gamma(s_0), \gamma(s_0-\varepsilon))$
$= r - s_0 + \varepsilon = r - (s_0 - \varepsilon)$ για ε μικρό

Όμως $d(\gamma(s_0-\varepsilon), q) \geq d(\gamma(0), q) - \underbrace{d(\gamma(0), \gamma(s_0-\varepsilon))}_{\leq s_0-\varepsilon} \geq r - (s_0-\varepsilon)$

"=" $s_0 - \varepsilon \in A$.

Από την τριγωνική ανισότητα,

$d(x_0', p) \geq d(p,q) - d(q, x_0')$

Επίσης $d(\gamma(s_0), q) = d(x_0', q) + \delta'$ όπως εξηγήσαμε πιο πάνω,

$= r - s_0$

$\Rightarrow d(x_0', q) = r - s_0 - \delta'$

$\therefore d(x_0', p) \geq d(p,q) - d(q, x_0') = r - (r - s_0 - \delta') = s_0 + \delta'$

Ταυτόχρονα η καμπύλη c που αποτελείται από τη γεωδαισιακή γ από το p στο στο $\gamma(s_0)$, και από μια γεωδαισιακή ακτίνα από το $\gamma(s_0)$ στο x_0' ενώνει το p με x_0' και έχει μήκος $s_0 + \delta'$.

Αφού c ενώνει p με x_0', $d(p, x_0') \geq s_0 + \delta'$ και η c έχει μήκος $s_0 + \delta'$, τότε $d(p, x_0') = s_0 + \delta'$. και η c είναι λεία γεωδαισιακή - από ελαχιστοποιητικές ιδιότητες γεωδαισιακών.

Δηλαδή η c είναι λεία, και συμπίπτει με τη γ, άρα $x_0' = \gamma(s_0 + \delta')$

(a) $\to$ (b) Έστω $A \subset M$ κλειστό και φραγμένο

A φραγμένο, άρα $A \subset B$ όπου B μια μπάλα με κέντρο το p ως προς τη μετρική d.

Από το (f) υπάρχει μπάλα $B_R(0) \subset T_pM$ τ.ω.

$B \subset \exp_p(\overline{B_R(0)})$

$\exp_p$ συνεχής και $\overline{B_R(0)}$ συμπαγή στο T_pM, άρα $\exp_p(\overline{B_R(0)})$ συμπαγές.

$\therefore A$ κλειστό υποσύνολο συμπαγούς συνόλου (σε μετρικό χώρο) άρα A συμπαγές.

(b) → (c)

Έστω $\{p_n\}_n$ ακολουθία Cauchy στην M.

Τότε το σύνολο των σημείων της ακολουθίας είναι φραγμένο.

Άρα $\{p_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι κλειστό και φραγμένο, και από το (b) είναι τότε συμπαγές.

$\therefore$ $\{p_n\}_n$ περιέχει συγκλίνουσα υπακολουθία στην M.

Αφού η $\{p_n\}_n$ είναι Cauchy, τότε συγκλίνει με όριο στην M.

(c) → (d) Έστω M μη γεωδαισιακά πλήρης. Δηλαδή υπάρχει γεωδαισιακή γ που ορίζεται για $s < s_0$, αλλά όχι στο s_0, με $|\gamma'| = 1$.

Έστω $\{s_n\}$ ακολουθία που συγκλίνει στο s_0, με $s_n < s_0$.

Για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $N_0(\varepsilon)$ τ.ω. για $n, m \geq N_0$

$$d(\gamma(s_n), \gamma(s_m)) \leq \left| \int_{s_n}^{s_m} |\gamma'(t)|\, dt \right| = |s_n - s_m| < \varepsilon$$

Άρα η $\{\gamma(s_n)\}$ είναι Cauchy στην (M, d)

Αφού η (M, d) είναι πλήρης μετρικός χώρος, τότε $\{\gamma(s_n)\} \to p_0 \in M$

Έστω W μια ομοιόμορφα κανονική γειτονιά του p_0, τ.ω. $B_\delta(q) \supset W$ $\forall q \in W$ και $B_\delta(q)$ κανονική μπάλα στο q.

Έστω N_0 τ.ω. για $n, m \geq N_0$, $|s_n - s_m| < \delta/2$ και $\gamma(s_n), \gamma(s_m) \in W$. (παρατηρούμε ότι $|s_n - s_0| < \delta$ για $n \geq N_0$).

Τότε υπάρχει μοναδική γεωδαισιακή $\tilde{\gamma}$ που να ενώνει τα $\gamma(s_n)$ και $\gamma(s_m)$, με μήκος μικρότερο από δ.

Αυτή η γεωδαισιακή συμπίπτει με τη γ, όπου ορίζεται η γ.

Όμως $exp_{\gamma(s_n)}$ είναι διαφορομορφισμός στη $B_\delta(0)$

και $exp_{\gamma(s_n)}(B_\delta(0)) \supset W$, τότε η $\tilde{\gamma}$ επεκτείνει τη γ

και στο s_0.

(d) $\to$ (a) από τον ορισμό

$\square$

- Θα δούμε μετά ότι για $K \leq 0$ exp_p διαφορομορφισμός.

  - δηλαδή το p δεν έχει συζυγή σημεία.

Θεώρημα Cartan - Hadamard

Έστω M πλήρης πολλ/τα Riemann, απλά συνεκτική (simply connected) με καμπυλότητα τομής $K(p,\sigma) \leq 0$ $\forall p \in M$ και $\forall \sigma \subset T_pM$. Τότε η M είναι διαφορομορφική με το $\mathbb{R}^n$ όπου $n = \dim M$. Πιο συγκεκριμένα, $\exp_p : T_pM \to M$ είναι διαφορομορφισμός $\forall p$.

<u>Απόδειξη</u>: M πλήρης, άρα $\exp_p : T_pM \to M$ ορίζεται $\forall p \in M$ σε όλο το T_pM και είναι επί.

<u>Λήμμα 1</u> $\exp_p : T_pM \to M$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός όταν $K(p,\sigma) \leq 0$ $\forall p \in M$ και $\forall \sigma \subset T_pM$. και M πλήρης.

- Δηλαδή $\forall v \in T_pM$ υπάρχει ανοικτή γειτονιά $U \ni v$ και $V \ni \exp_p(v) = q$ με $\exp_p : U \to V$ διαφορομορφισμός.
- Αυτό συνεπάγεται από το ότι $\exp_p$ δεν έχει κρίσιμα σημεία. ($d\exp_p \neq 0$) και άρα $C(p) = \phi$
- Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχουν συζυγή σημεία στην M.
- Αυτό δε σημαίνει ότι $\exp_p$ είναι παντού 1-1, διαφορομορφισμός μόνο τοπικά.

π.χ. $\phi : \mathbb{R} \to S^1$ $\phi(t) = (\cos t, \sin t)$ είναι τοπικός διαφορομορφισμός, όχι όμως διαφορομορφισμός.

<u>Απόδειξη Λήμματος:</u> Έστω J μη-μηδενικό πεδίο Jacobi στη γεωδαισιακή $\gamma : [0,\infty) \to M$ με $\gamma(0)=p$ και $J(0)=0$. (γ ορίζεται $\forall t>0$ αφού M πλήρης)

Τότε
$$
\begin{aligned}
\langle J,J\rangle'' &= 2\langle J',J'\rangle + 2\langle J'',J\rangle \\
&= 2\langle J',J'\rangle + 2\langle -R_{J\gamma'}\gamma', J\rangle = \\
&= 2|J'|^2 - 2R(J,\gamma',\gamma',J) = \\
&= 2|J'|^2 - 2K(J,\gamma')|\gamma'\wedge J|^2 \geq 0 \quad \text{όταν } K\leq 0.
\end{aligned}
$$

$$\therefore \langle J,J\rangle'(t_2) - \langle J,J\rangle'(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \langle J,J\rangle''(t)\,dt \geq 0$$

$$\Rightarrow \langle J,J\rangle'(t_2) \geq \langle J,J\rangle'(t_1) \quad \forall\, t_2>t_1.$$

$\langle J,J\rangle'(0) = 2\langle J(0),J'(0)\rangle = 0$. και $\langle J(0),J(0)\rangle=0$.
και αφού $J(t)$ δεν είναι μηδενικό $\forall t \Rightarrow \langle J(t),J(t)\rangle'>0$ για t αρκετά μικρό θετικό, $t\in(0,\varepsilon)$, αφού αυξάνεται. (διαφορετικά παραμένει $\equiv 0$ σε ένα διάστημα και άρα και $J(t)\equiv 0$ σε ένα διάστημα $\to\leftarrow$).

Αν όμως $\langle J(t),J(t)\rangle'>0$, για $t\in(0,\varepsilon)$, τότε
$$\langle J,J\rangle'(s) \geq \langle J,J\rangle'(t)>0 \quad \forall s>t, \text{ άρα}$$
$$\langle J,J\rangle'(s)>0 \quad \forall s>0 \Rightarrow \langle J(t),J(t)\rangle > \langle J(0),J(0)\rangle=0$$

$\therefore$ $\forall t>0$ $\gamma(t)$ δεν είναι συζυγές σημείο του p στη γ.
$\therefore$ $(d\exp_p)_{tv}$ δεν έχει κρίσιμα σημεία $\forall t>0$ $v\in T_pM$
$\therefore$ $\exp_p$ τοπικός διαφορομορφισμός.

$\square$

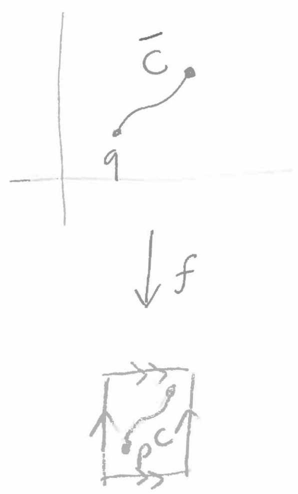
Λήμμα 2 Έστω M πλήρης πολλ/τα Riemann και $f: M \to N$ ένας τοπικός διαφορομορφισμός που είναι επί.
Αν η N είναι πολλ/τα Riemann και η f έχει την ιδιότητα.
$|(df_p)(v)| \geq |v|$ $\forall p \in M$ και $\forall v \in T_pM$, τότε η f είναι χάρτης κάλυψης.

Ορισμός: Έστω M,N διαφ. πολλ/τες. Μια απεικόνιση $\pi: M, N$ είναι χάρτης κάλυψης. αν $\forall q \in N$ υπάρχει ανοιχτή γειτονιά $U \ni q$ τ.ω.
$\pi^{-1}(U) = \bigcup_\alpha V_\alpha$ με $V_\alpha \cap V_\beta = \emptyset$ $\forall \alpha \neq \beta$, και $\pi|_{V_\alpha}: V_\alpha \to U$ είναι ομοιομορφισμός.

π.χ. $\pi: S^2 \to \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$
$x \mapsto [x] = \{x, -x\}$

$\pi: \mathbb{R}^2 \to T^2$
$(x,y) \mapsto \{(x+m, y+n) \mid m,n \in \mathbb{Z}\} = [(x,y)]$ ισοδύναμα σημεία.

Απόδειξη Λήμματος 2.
Αρκεί ν.δ.ο. η f έχει την ιδιότητα "ανύψωσης καμπύλης" (path lifting property) για καμπύλες στην N.
Δηλαδή αν $c: [0,1] \to N$ διαφ. καμπύλη και $q \in M$ με $f(q) = c(0)$, τότε υπάρχει καμπύλη $\bar{c}: [0,1] \to M$ τ.ω. $\bar{c}(0) = q$ και $f \circ \bar{c} = c$.



f τοπικός διαφορομορφισμός, άρα αν $f(q)=c(0)$,
τότε μπορεί να οριστεί η $\tilde{c}:[0,\varepsilon]\to M$ με $\tilde{c}(0)=q$
και $f\circ\tilde{c}=c$ για κάποιο $\varepsilon>0$.

Έστω $A\subset[0,1]$ τ.ω. η c να ανυψώνεται στο A
με αρχή το q.
Αφού η f είναι τοπικός διαφορομορφισμός τότε
$[0,t_0)\subset A$, δηλαδή το A είναι ανοικτό στο $[0,1]$.
Αν δείξουμε ότι $t_0\in A$ (A κλειστό στο $[0,1]$) τότε $A=[0,1]$.
και η c μπορεί να ανυψωθεί $\forall t\in[0,1]$.

ν.δ.ο $t_0\in A$:
Έστω (t_n) αύξουσα ακολουθία με $t_n\to t_0$.

Τότε $\{\tilde{c}(t_n)\}$ περιέχεται σε συμπαγές σύνολο του M
Αν όχι τότε η πληρότητα της M συνεπάγεται
ότι $d(\tilde{c}(t_n),\tilde{c}(0))\to\infty$ (για μια υπακολουθία)

Όμως
$$\ell_{[0,t_n]}(c)=\int_0^{t_n}\left|\frac{dc}{dt}\right|dt=\int_0^{t_n}\left|\frac{d(f\circ\tilde{c})}{dt}\right|dt$$
$$=\int_0^{t_n}\left|df_{\tilde{c}(t)}\left(\frac{d\tilde{c}}{dt}\right)\right|dt\underset{\text{υπόθεση}}{\geq}\int_0^{t_n}\left|\frac{d\tilde{c}}{dt}\right|dt\geq \underbrace{d(\tilde{c}(t_n),\tilde{c}(0))}_{\to\infty}$$

$\therefore$ Το μήκος της c στο $[0,t_0]$ είναι άπειρο $\to\leftarrow$

$\therefore$ $\{\tilde{c}(t_n)\}\subset K\subset M$ με K συμπαγές
Άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία με όριο $x_0\in M$.

Έστω V γειτονιά του x_0 με $f|_V$ διαφορομορφισμό.

$c(t_n) = f \circ \tilde{c}(t_n)$ είναι κοντά στο $f(x_0)$ για n αρκετά μεγάλο, άρα και $c(t_0) \in f(V)$ (c, f συνεχείς).

και επίσης υπάρχει διάστημα $I \subset [0,1]$, με $t_0 \in I$ τ.ω. $c(I) \subset f(V)$.

Έστω n τ.ω. $\tilde{c}(t_n) \in V$, και έστω $\tilde{\gamma}$ η ανύψωση της c στο I που να περνά από το x_0.

Η γ και η c συμπίπτουν στο $[0,t_n) \cap I$ γιατί $f|_V$ είναι 1-1 και επί, άρα η γ επεκτείνει τη $\tilde{c}$ στο I, και άρα η $\tilde{c}$ ορίζεται στο t_0 και $t_0 \in A$ $\square$

Απόδειξη Θεωρήματος Cartan-Hadamard

M πλήρης, άρα $\exp_p : T_pM \to M$ ορίζεται $\forall p \in M$ σε όλο το T_pM και είναι επί. Είναι επίσης τοπικός διαφορομ. από Λήμμα 1. Μέσω του $\exp_p$ μπορούμε να ορίσουμε μετρική Riemann στο T_pM τ.ω. $\exp_p$ τοπική ισομετρία, δηλαδή θέτουμε

$$\tilde{g} = (\exp_p)^*(g)$$

Αφού οι γεωδαισιακές στο T_pM που περνούν από το $\vec{0}$ είναι ευθείες, τότε αυτή η μετρική στο T_pM είναι πλήρης. Από Λήμμα 2, έχουμε ότι $\exp_p$ είναι χάρτης κάλυψης.

Επειδή η M είναι απλά συνεκτική, τότε $\exp_p$ είναι 1-1, δηλαδή διαφορομορφισμός.

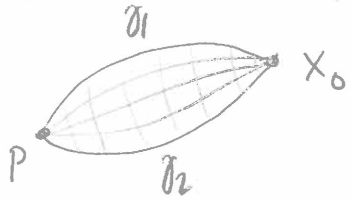
Αν όχι τότε $\exp_p(v_1) = \exp_p(v_2) = x_0$

και $\gamma_1(t) = \exp_p(tv_1)$

$\gamma_2(t) = \exp_p(tv_2)$ για $t \in [0,1]$ 2 γεωδαισιακές

από το p στο x_0

M απλά συνεκτική, άρα οι γ_1, γ_2 είναι ομοτοπικές (δεν περικλείουν "τρύπα").



Όμως ο χάρτης ομοτοπίας από γ_1 στη γ_2 επίσης ανυψώνεται, και στο $t=1$ πρέπει να δίνει καμπύλη στο T_pM από v_1 στο v_2, με εικόνα το x_0

$\rightarrow\leftarrow$ $\exp_p$ είναι χάρτης κάλυψης που "ξεχωρίζει" το v_1 από το v_2. ($\exp_p^{-1}(x_0)$ = σύνολο διακριτών σημείων)

$\square$

• Οι μόνες πλήρεις, απλά συνεκτική πολλές Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής είναι:

$\mathbb{R}^n$ $K \equiv 0$

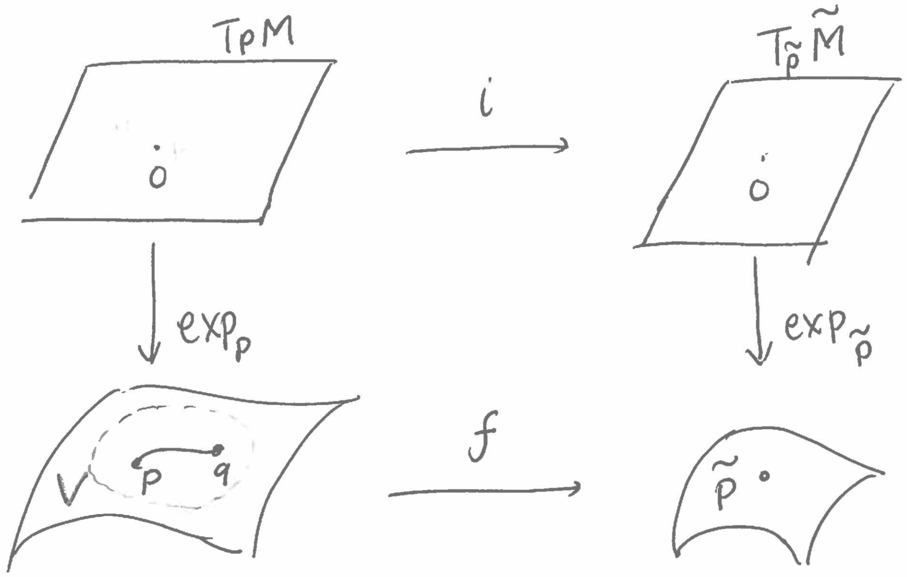
S^n $K \equiv 1$

$\mathbb{H}^n$ $K \equiv -1$

Θεώρημα του Cartan: καθορισμός της μετρικής από την καμπυλότητα.

Έστω $M, \tilde{M}$ πολλές Riemann διάστασης n.
$p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$ και έστω $i: T_pM \to T_{\tilde{p}}\tilde{M}$ γραμμική απεικόνιση που είναι ισομετρία.

Έστω $V \subset M$ κανονική γειτονιά του p τ.ω. $\exp_{\tilde{p}}$ να ορίζεται στο $i \circ \exp_p^{-1}(V)$.



Έστω $f: V \to \tilde{M}$
με $f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}(q)$ για $q \in V$.

$\forall q \in V$ $\exists!$ γεωδαισιακή $\gamma:[0,t]\to M$ με
$\gamma(0)=p$, $\gamma(t)=q$ και $|\gamma'|=1$.

Έστω P_t: η παράλληλη μετατόπιση στη γ
από το $\gamma(0)=p$ στο $\gamma(t)=q$.

Ορίζουμε $\tilde{\gamma}:[0,t]\to\tilde{M}$ γεωδαισιακή στην $\tilde{M}$ με
$\tilde{\gamma}(0)=\tilde{p}$ $\tilde{\gamma}'(0)=i(\gamma'(0))$ και $|\tilde{\gamma}'|=1$.

Έστω $\tilde{P}_t$ η παράλληλη μετατόπιση στη $\tilde{\gamma}$ από
το $\tilde{\gamma}(0)=\tilde{p}$ στο $\tilde{\gamma}(t)$.

Αφού i ισομετρία, $\tilde{\gamma}(t)=\exp_{\tilde{p}}(t\, i(\gamma'(0)))$

$$= \exp_{\tilde{p}}(i(\underbrace{t\gamma'(0)}_{\equiv \exp_p^{-1}(\underbrace{\gamma(t)}_{q})})) = \exp_{\tilde{p}}\circ i\circ \exp_p^{-1}(q) = f(q)$$

Ορίζουμε $\phi_t: T_qM \to T_{f(q)}\tilde{M}$

$$\phi_t(X) = \tilde{P}_t\circ i\circ P_t^{-1}(X) \quad \text{για } X\in T_qM.$$

$P_t^{-1}(x)\in T_pM$ $\quad$ $i\circ P_t^{-1}(x)\in T_{\tilde{p}}\tilde{M}$

$\tilde{P}_t(i\circ P_t^{-1}(x))\in T_{f(q)}\tilde{M}$ $\quad$ $f(q)=\gamma(t)$.

Θεώρημα του Cartan: Με τον πιο πάνω συμβολισμό, αν $\forall q \in V$ και όλα τα $X, Y, Z, W \in T_q M$ ισχύει $\dot{R}(X,Y,Z,W) = \tilde{R}(\phi_t(X), \phi_t(Y), \phi_t(Z), \phi_t(W))$ τότε η $f: V \to f(V) \subset \tilde{M}$ είναι τοπική ισομετρία με $df_p = i$.

Απόδειξη:

Έστω $q \in V$ και $\gamma : [0,\ell] \to M$ γεωδαισιακή με $\gamma(0) = p$, $\gamma(\ell) = q$, $|\gamma'| = 1$

Έστω $\{e_i(t)\}$ ο.κ. βάση παράλληλων διανυσματικών πεδίων στη γ με $e_1(t) = \gamma'(t)$.

Έστω $v \in T_q M$ και $J(t)$ πεδίο Jacobi στη γ με $J(0) = 0$ και $J(\ell) = v$ (Εξίσωση πεδίου Jacobi είναι 2ου βαθμού: Έχουμε ύπαρξη και μοναδικότητα λύσεων καθορίζοντας $J(0), J'(0)$ ή $J(0)$ και $J(\ell)$)

Τότε $J(t) = \sum_i y_i(t) \cdot e_i(t)$ στη γ

με $J''(t) + R_{J(t)\gamma'(t)}\gamma'(t) = 0 \Leftrightarrow$

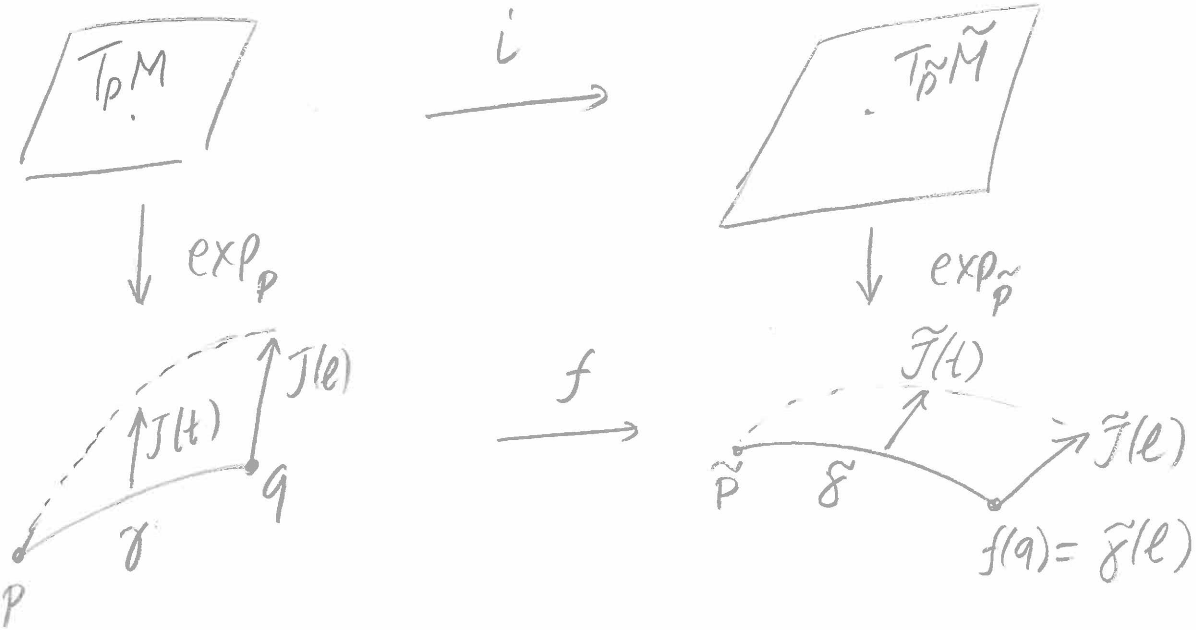
$$\Leftrightarrow \sum_i y_i''(t) e_i(t) + R_{(\sum_i y_i e_i) e_1} e_1 = 0$$

$$R_{(\sum_i y_i e_i) e_1} e_1 = \sum_j \langle R_{(\sum_i y_i e_i) e_1} e_1 , e_j \rangle e_j =$$

$$\sum_{i,j} y_i R(e_i, e_1, e_1, e_j)\, e_j$$

$\therefore$ J πεδίο Jacobi $\Leftrightarrow$

$$y_j''(t) + \sum_i y_i R(e_i, e_1, e_1, e_j) = 0 \quad \forall j. \quad (*)$$



Έστω $\tilde\gamma : [0,l] \to \tilde M$ η γεωδαισιακή με $|\tilde\gamma'| = 1$,

$\tilde\gamma(0) = \tilde p \qquad \tilde\gamma'(0) = i(\gamma'(0))$

Όπως είδαμε $\tilde\gamma(l) = f(q)$

Έστω $\tilde J(t) = \phi_t(J(t))$ και $\tilde e_j(t) = \phi_t(e_j(t))$

ϕ_t: γραμμική, άρα $\tilde J(t) = \phi_t(J(t)) = \sum_i y_i(t)\, \tilde e_i(t)$

Αφού $R(e_i, e_1, e_1, e_j) = \tilde R(\tilde e_i, \tilde e_1, \tilde e_1, \tilde e_j)$, ισχύει.

από $(*)$ $\quad y_j''(t) + \sum_i \tilde R(\tilde e_i, \tilde e_1, \tilde e_1, \tilde e_j)\, y_i(t) = 0.$

Αφού η παράλληλη μεταφορά και η i είναι ισομετρίες, τότε ϕ_t είναι ισομετρία.

$\therefore$ $\tilde e_1(t) = \tilde\gamma'(t)$ και $\{\tilde e_j(t)\}$ o.κ. πλαίσιο

$\therefore$ $\tilde J''(t) + \tilde R_{\tilde J \tilde\gamma'}\tilde\gamma' = 0 \Rightarrow \tilde J(t)$ πεδίο Jacobi στην $\tilde\gamma$.

$\tilde{J}(t)$ πεδίο Jacobi με $\tilde{J}(0)=0$

Αφού η ϕ_t είναι ισομετρία, τότε $|\tilde{J}(\ell)| = |J(\ell)|$

Αν $df_q(v) \, (= df_q(J(\ell))) = \tilde{J}(\ell)$, τότε $|df_q(v)| = |v|$

και άρα για κάθε $v \in T_q M$ $|df_q(v)| = |v|$ και

παίρνουμε f ισομετρία

(με κανόνα παραλληλογράμμου $\langle X+Y, X+Y\rangle = \langle X,X\rangle + \langle Y,Y\rangle + 2\langle X,Y\rangle$
μπορούμε ν.δ.ο. διατηρείται το εσωτερικό γινόμενο).

Υπολογισμός: $df_q(J(\ell))$:

$\tilde{J}(t) = \phi_t(J(t)) = \sum_i y_i(t)\tilde{e}_i(t)$ με $\tilde{e}_i(t) = \phi_t(e_i(t))$

$\tilde{J}'(0) = \sum_i y_i'(0)\tilde{e}_i(0) + \cancel{\sum_i y_i(0)\tilde{e}_i'(0)}^{\,0}$ αφού $J(0)=0$.

$= \sum_i y_i'(0) \cdot i(e_i(0))$ αφού $\tilde{P}_0 \circ i \circ P_0^{-1} = i$ στο $t=0$

$= i\left(\sum_i y_i'(0) e_i(0)\right) = i(J'(0))$

$J, \tilde{J}$ πεδία Jacobi με $J(0) = \tilde{J}(0) = 0$ άρα από προηγούμενο

πόρισμα: $J(t) = (d\exp_p)_{t\gamma'(0)}(tJ'(0))$ - σε κανονική γειτονία
∴ αντιστρέψιμο

$\tilde{J}(t) = (d\exp_{\tilde{p}})_{t\tilde{\gamma}'(0)}(t\underbrace{\tilde{J}'(0)}_{=i(J'(0))})$

$\exp_p$ σε κανονική γειτονιά άρα για $t=\ell$:

$\ell J'(0) = (d\exp_p)^{-1}_{\ell\gamma'(0)}(J(\ell))$

$\Rightarrow \tilde{J}(\ell) = (d\exp_{\tilde{p}})_{\ell\tilde{\gamma}'(0)}\left(i\left((d\exp_p)^{-1}_{\ell\gamma'(0)}(J(\ell))\right)\right) = df_q(J(\ell))$

-αφού $f(q) = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1}$ και

$df_q = (d\exp_{\tilde{p}})_{i\circ\exp_p^{-1}(q)} \circ i \circ (d\exp_p)^{-1}_{\exp_p^{-1}(q)}$ $\quad \exp_p^{-1}(q) = \ell\gamma'(0)$
$i\circ\exp_p^{-1}(q) = \ell\cdot\tilde{\gamma}'(0)$. $\square$

• Παρατήρηση: Αν $\exp_p$, $\exp_{\tilde{p}}$ είναι διαφορομορφισμοί και ισχύουν οι συνθήκες του Θεωρήματος Cartan για R και $\tilde{R}$ τότε η f είναι ισομετρία σε όλη την M.

• Το Θεώρημα Cartan μας δείχνει ότι τοπικά η καμπυλότητα καθορίζει τη μετρική.

<u>Πόρισμα:</u> Έστω $M, \tilde{M}$ πολλ/ες με την ίδια σταθερή καμπυλότητα τομής και ίδιας διάστασης n. Έστω $p \in M$, $\tilde{p} \in \tilde{M}$, και $\{e_i\}$ ο.κ. βάση του T_pM, $\{\tilde{e}_i\}$ ο.κ. βάση του $T_{\tilde{p}}\tilde{M}$.
Τότε υπάρχουν γειτονιά $V \subset M$ του p, γειτονιά $\tilde{V} \subset \tilde{M}$ του $\tilde{p}$ και μια ισομετρία $f: V \to \tilde{V}$ τ.ω. $df_p(e_i) = \tilde{e}_i$.

<u>Απόδειξη:</u> Επιλέγουμε i τ.ω. $\tilde{e}_i = i(e_i)$ στο προηγούμενο Θεώρημα. Αφού η καμπυλότητα τομής είναι σταθερή και καθορίζει τον τανυστή καμπυλότητας, τότε $R = \tilde{R}$ όπως στο Θεώρημα. ($R, \tilde{R}$ αντιστοιχούν στους KQ, $K\tilde{Q}$ με ισότητα στα αντίστοιχα διανύσματα). $\square$

<u>Πόρισμα.</u> Έστω M πολλ/τα με σταθερή καμπυλότητα τομής και $p, q \in M$. Έστω $\{e_i\}$ ο.κ. βάση στο T_pM και $\{E_i\}$ ο.κ. βάση στο T_qM. Τότε υπάρχουν γειτονιές U του p και V του q και μια ισομετρία $g: U \to V$ τ.ω. $dg_p(e_i) = E_i$.

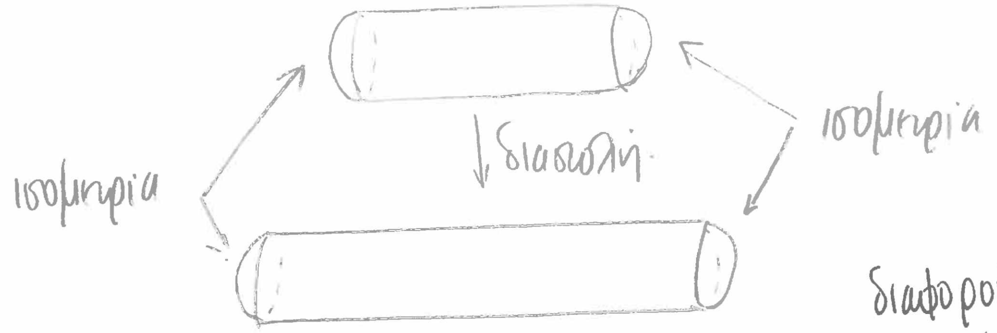
Ερώτημα: Έστω $f: M \to \tilde{M}$ διαφορομορφισμός που διατηρεί την καμπυλότητα, δηλαδή

$$R(X,Y,Z,W)_p = R(df_p(X), df_p(Y), df_p(Z), df_p(W))_{f(p)}$$

$\forall p \in M$, $\forall X,Y,Z,W \in T_pM$.

Είναι η f ισομετρία;

$n=2$: όχι (Αντίστροφο του Θεωρ. Egregium του Gauss όπου τοπική ισομετρία → ίδια καμπυλότητα)



διαφορομορφισμός που διατηρεί την καμπυλότητα αλλά όχι ισομετρία. - μόνο τοπική.

$n \geq 4$ Είναι ισομετρία η f όταν K δεν είναι σταθερή σε ανοικτά σύνολα.

$n=3$: μελετήθηκε από Yau - ισχύει για M συμπαγή με πουθενά σταθερή καμπυλότητα.

Για M μη-συμπαγή υπάρχει αντιπαράδειγμα.

- Μελετήθηκε υπό διάφορες συνθήκες.

Space Forms: Πολλές με σταθερή καμπυλότητα.

Θεώρημα: Έστω M^n πλήρης πολλ/τα Riemann με σταθερή καμπυλότητα τομής K. Τότε η ολική κάλυψη $\tilde{M}$ της M με τη μετρική κάλυψης είναι ισομετρική με

(a) $\mathbb{H}^n$ αν $K=-1$

(b) $\mathbb{R}^n$ αν $K=0$

(c) S^n αν $K=1$.

(για άλλο K είναι διαστολή του $\mathbb{H}^n$ ή S^n
π.χ. σφαίρα άλλης ακτίνας).

Λήμμα Έστω $f_i : M \to N$ για $i=1,2$ δύο τοπικές ισομετρίες από τη συνεκτική πολλ/τα Riemann M στην πολλ/τα Riemann N. Αν υπάρχει $p \in M$ με $f_1(p)=f_2(p)$ και $(df_1)_p=(df_2)_p$, τότε $f_1=f_2$.

skip proofs.

Απόδειξη: Λήμματος: Έστω V κανον. γειτονιά του p
τ.ω. $f_1|_V$ και $f_2|_V$ διαφορομορφισμοί.

Έστω $\phi = f_1^{-1} \circ f_2 : V \to V$ Τότε $\phi(p)=p$ και $d\phi_p = Id$

Για $q \in V$ $\exists!\, v \in T_pM$ με $\exp_p(v)=q$

Αφού f_i ισομετρίες και διατηρούν γεωδαισιακές $\Rightarrow \phi(q)=q$

$\therefore f_1=f_2$ στη V

M συνεκτική άρα $\forall r \in M$ $\exists\, \alpha:[0,1] \to M$ με $\alpha(0)=p$ $\alpha(1)=q$.

Ορίζουμε

$$A = \{ t \in [0,1] \mid f_1(\alpha(t)) = f_2(\alpha(t)) \text{ και } (df_1)_{\alpha(t)} = (df_2)_{\alpha(t)} \}$$

Από πιο πάνω, $\sup A > 0$.
Αν $\sup A = t_0 \neq 1$ τότε επαναλαμβάνουμε το πιο πάνω επιχείρημα για το t_0 και παίρνουμε άτοπο.

$\therefore A = [0,1]$

$\therefore f_1(r) = f_2(r) \quad \forall r \in M$

$\square$

Απόδειξη Θεωρήματος:

$\tilde{M}$: απλά συνεκτική από η ολική κάλυψη, με σταθερή καμπυλότητα K
(a)(b) $N = \mathbb{H}^n$ ή $\mathbb{R}^n$
Έστω $p \in N$ $\tilde{p} \in \tilde{M}$ και $i : T_p(N) \to T_{\tilde{p}}(\tilde{M})$ γραμμική ισομετρία.
Ορίζουμε $f = \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p^{-1} : N \to \tilde{M}$.
$N, \tilde{M}$ πλήρης με $K \leq 0$, άρα f καλά ορισμένη από Θεώρημα Hadamard και f τοπική ισομετρία από Θεώρημα Cartan.
$\therefore |(df_{\tilde{p}})(v)| = |v| \Rightarrow f$ χάρτης κάλυψης από Λήμμα Θεωρ. Hadamard
Όμως $\tilde{M}$ είναι ολική κάλυψη $\therefore f$ διαφορομορφισμός.

(c) $f : \exp_{\tilde{p}} \circ i \circ \exp_p : (S^n \setminus \{-p\}) \to \tilde{M}$
αντίποδο του p

f τοπική ισομετρία από Θ. Cartan
Για $p' \in S^n$ $p' \neq p, -p$ και $\tilde{p}' = f(p')$ ορίζουμε

$$f' = \exp_{\tilde{p}'} \circ df_{p'} \circ \exp_{p'}^{-1} : (S^n \setminus \{-p'\}) \to \tilde{M}$$

$S^n \setminus \{-p, -p'\} = W$ είναι συνεκτική.

$p' \in W$ και

$$f(p') = \tilde{p}' = f'(p'),$$

$$df_{p'} = df'_{p'}$$

Από το Λήμμα, $f = f'$ στο W.

Ορίζουμε $g(r) = \begin{cases} f(r) & \text{για } r \in S^n \setminus \{-p\} \\ f'(r) & \text{για } r \in S^n \setminus \{-p'\} \end{cases}$

Η g είναι τοπική ισομετρία και άρα τοπικός διαφορομορφισμός. S^n συμπαγής, άρα g χάρτης κάλυψης, και αφού η $\tilde{M}$ είναι απλά συνεκτική τότε η g είναι διαφορομορφισμός.

$\therefore$ g ισομετρία. $\square$

<u>Πρόταση:</u> Έστω M πλήρης πολλ/τα Riemann με σταθερή καμπυλότητα K $(=1, 0, \text{ ή } -1)$. Τότε η M είναι ισομετρική με $\tilde{M}/\Gamma$ όπου $\tilde{M} = S^n$ αν $K=1$, $\tilde{M} = \mathbb{R}^n$ αν $K=0$ και $\tilde{M} = \mathbb{H}^n$ αν $K=-1$ και Γ είναι υπο-ομάδα της ομάδας ισομετριών της $\tilde{M}$.

- Η Γ πρέπει να δρα με έναν απόλυτα ασυνεχή τρόπο στην $\tilde{M}$ (totally discontinously). Και η μετρική στην $\tilde{M}/\Gamma$ είναι η επαγόμενη από το χάρτη κάλυψης $\tilde{M} \to \tilde{M}/\Gamma$.