



Εγχειρίδια Μαθηματικών και Χταποδάκι στα Κάρβουνα

Νίκος Στυλιανόπουλος,
Πανεπιστήμιο Κύπρου

Λευκωσία, Δεκέμβριος 2009



Πόσο σημαντική είναι η απόδειξη στα Μαθηματικά;

Encyclopædia Britannica

<http://www.britannica.com>

What was distinctive of the Greeks' contribution to mathematics-and what in effect made them the **creators of "mathematics,"** as the term is usually understood-was its development as a **theoretical discipline.** This means two things: **mathematical statements are general, and they are confirmed by proof.** For example, the Mesopotamians had procedures for finding whole numbers a , b , and c for which $a^2 + b^2 = c^2$ (e.g., 3, 4, 5; 5, 12, 13; or 119, 120, 169). From the Greeks came a **proof** of a general rule for finding all such sets of numbers (now called Pythagorean triples): if one takes any whole numbers p and q , both being even or both odd, then $a = (p^2 - q^2)/2$, $b = pq$, and $c = (p^2 + q^2)/2$.



Πόσο σημαντική είναι η απόδειξη στα Μαθηματικά;

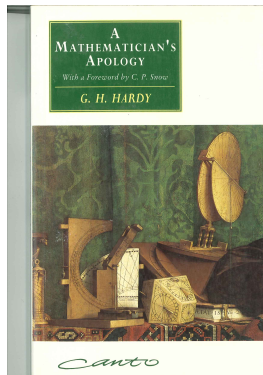
Encyclopædia Britannica

<http://www.britannica.com>

As **Euclid proves** in Book X of the Elements, numbers of this form satisfy the relation for Pythagorean triples. Further, the Mesopotamians appear to have understood that sets of such numbers a , b , and c form the sides of right triangles, but the **Greeks proved** this result (Euclid, in fact, proves it twice: in Elements, Book I, proposition 47, and in a more general form in Elements, Book VI, proposition 31), and these proofs occur in the context of a systematic presentation of the properties of plane geometric figures



G.H. Hardy 1877-1947





A Mathematician's apology

of all.

We can see this even in semi-historic civilizations. The Babylonian and Assyrian civilizations have perished; Hammurabi, Sargon, and Nebuchadnezzar are empty names; yet Babylonian mathematics is still interesting, and the Babylonian scale of 60 is still used in astronomy. But of course the crucial case is that of the Greeks.

The Greeks were the first mathematicians



A Mathematician's apology, page 81

who are still 'real' to us to-day. Oriental mathematics may be an interesting curiosity, but Greek mathematics is the real thing. The Greeks first spoke a language which modern mathematicians can understand; as Littlewood said to me once, they are not clever schoolboys or 'scholarship candidates', but 'Fellows of another college'. So Greek mathe-



A Mathematician's apology, page 81

‘Fellows of another college’. So Greek mathematics is ‘permanent’, more permanent even than Greek literature. Archimedes will be remembered when Aeschylus is forgotten, because languages die and mathematical ideas do not. ‘Immortality’ may be a silly word, but probably a mathematician has the best chance of whatever it may mean.



Ποια είναι η κατάσταση στα σχολικά εγχειρίδια ΜΕ;

Quiz

Πόσες φορές αναφέρεται η λέξη **απόδειξη** στο σχολικό εγχειρίδιο "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Αλγεβρα-Ανάλυση", Β Ενιαίου Λυκείου;

A: περίπου 20 φορές

B: περίπου 30 φορές

Γ: περισσότερες από 40 φορές

Η σωστή απάντηση είναι...

KΑΜΜΙΑ !



Ποια είναι η κατάσταση στα σχολικά εγχειρίδια ΜΕ;

Quiz

Πόσες φορές αναφέρεται η λέξη **απόδειξη** στο σχολικό εγχειρίδιο "ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Αλγεβρα-Ανάλυση", Β Ενιαίου Λυκείου;

A: περίπου 20 φορές

B: περίπου 30 φορές

Γ: περισσότερες από 40 φορές

Η σωστή απάντηση είναι...

KAMMIA !



Πού οδηγεί αυτό;

Στην επιστροφή των Μαθηματικών στις ρίζες τους :
ως ενδιαφέρουσα **περιέργεια** των Βαβυλωνίων και των Αιγυπτίων,
αντί
ως **επιστήμη** των Ελλήνων.

Οι Μαθηματικές γνώσεις που προσφέρονται στο Λυκείο είναι:

- Αποσπασματικές (τύπου... μεζέδες).
- Μη επαρκώς τεκμηριωμένες (πολλές φορές).
- Λανθασμένες (ενίοτε).



Χαρακτηριστικό Παράδειγμα: Διαγώνισμα στην Β Λυκείου

Οδηγίες: Να λύσετε όλες τις ασκήσεις. Να γράφετε με μελάνι. Τη γραφική παράσταση μπορείτε να την κάνετε και με μολύβι. Μη χρησιμοποιείτε διορθωτικό υλικό. Καλή επιτυχία!!!

1. Να βρείτε τις ασύμπτωτες των διαγραμμάτων των συναρτήσεων: (8 μον)

$$(\alpha) \ y = \frac{x^2 - x - 2}{x + 2}$$

$$(\beta) \ y = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x - 1}$$

$$(\gamma) \ y = \frac{x}{x + 1}$$

$$(\delta) \ y = e^{-x}(x^2 + 3x + 1)$$



Η Λύση του Καθηγητή

$$\rightarrow \textcircled{1} \textcircled{b} \quad y = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} \quad \text{π.ο. } x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$\quad \quad \quad [a \in (-1, 1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{a}{-\infty} = a \cdot \frac{1}{-\infty} = a \cdot 0^- \approx 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{a}{+\infty} = a \cdot \frac{1}{+\infty} = a \cdot 0^+ \approx 0^+$$

 $\Rightarrow$
 $O.A$
 $y=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1-1} = \frac{0}{0^-} = \frac{0}{-0,00009} = 0$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1^+-1} = \frac{0}{0^+} = \frac{0}{+0,00009} = 0$$

 $\nexists K.A$



Η Λύση του Καθηγητή (πλήρης λαθών)

$$\rightarrow y = \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} \quad \text{π.ο.} \quad x \in (-\infty, 1) \cup (1, +\infty)$$

$$[a \equiv (-1, 1)]$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{a}{-\infty} = a \cdot \frac{1}{-\infty} = a \cdot 0^- \approx 0^-$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{a}{+\infty} = a \cdot \frac{1}{+\infty} = a \cdot 0^+ \approx 0^+$$

 $\Rightarrow$
O.A.

 $y=0$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1-1} = \frac{0}{0^-} = \frac{0}{-0,00009} = 0$$

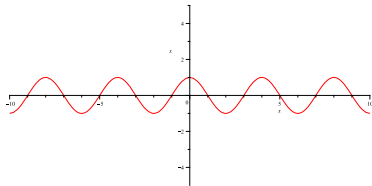
$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{\sin \frac{\pi x}{2}}{x-1} = \frac{\sin \frac{\pi}{2}}{1^+-1} = \frac{0}{0^+} = \frac{0}{+0,00009} = 0$$

 $\nexists$ K.A.



Προσοχή!

Η απόδειξη χρησιμοποιεί ότι $\lim_{x \rightarrow \infty} \cos(\pi x/2) = a$, με $a \in (-1, 1)$, κάτι το οποίο **προφανώς** δεν ευσταθεί:



Το αντίστοιχο στο μάθημα της Ιστορίας θα ήταν να ισχυρισθεί ο καθηγητής ότι η Ναυμαχία της Σαλαμίνας **δεν** έγινε ποτέ!



Συμπωματικά, ο ισχυρισμός $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\pi x/2)}{x-2} = 0$ (όχι βεβαίως 0^+) είναι ορθός!

Η (ορθή) απόδειξη του $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(\pi x/2)}{x-2} = 0$ είναι, όμως, άμεση απόρροια της διπλής ανισότητας

$$0 \leq \left| \frac{\cos(\pi x/2)}{x-2} \right| \leq \frac{1}{x-2}, \quad x > 2,$$

και του **Θεωρήματος των Ισοσυγκλινουσών Συναρτήσεων** (σχολικό εγχειρίδιο σελ. 43).



Πού οφείλεται αυτό;

Στην μη χρήση αυστηρών ορισμών, καθώς και στην παντελή έλλειψη αποδείξεων και στοιχειώδους μαθηματικής αυστηρότητας στο σχολικό εγχειρίδιο!

ΣΧΟΛΙΚΑ ΕΓΧΕΙΡΙΔΙΑ ΧΩΡΙΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΜΟΙΑΖΟΥΝ ΜΕ ΒΙΒΛΙΑ
ΜΑΓΕΙΡΙΚΗΣ: **ΕΧΟΥΝ ΜΟΝΟ ΣΥΝΤΑΓΕΣ...**





Η επικρατούσα νοοτροπία χρειάζεται κάτι πολύ περισσότερο από ένα άριστο Αναλυτικό Πρόγραμμα Μαθηματικών για να αλλάξει.

Ο όρος ΜΕΤΑΡΡΥΘΜΙΣΗ περιγράφει αυτό το "κάτι" επακριβώς.

Κλειδιά στην επιτυχία είναι:

- Εναγγαλισμός του νέου Αναλυτικού Προγράμματος από τους θεσμικούς φορείς του ΥΠΠ (Επιθεωρητές των Μαθηματικών)
- Ριζική αλλαγή της φιλοσοφίας των ΕΞΕΤΑΣΤΙΚΩΝ ΔΟΚΙΜΙΩΝ των Μαθηματικών στις Παγκύπριες Εξετάσεις
- Συμμετοχή Πανεπιστημιακών στην σύνταξη του ετήσιου ΟΔΗΓΟΥ ΠΑΓΚΥΠΡΙΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ