



Η Κατάκτηση του Απείρου από την Αρχαιότητα ως Σήμερα

Νικόλαος Στυλιανόπουλος

Ημερίδα
Ιστορία των Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Κύπρου
Νοέμβριος 2016



Δυσκολίες με το άπειρο: Αθροίσματα (15ος αι.)

Προσεταιριστική Ιδιότητα των Πραγματικών:

$$a + (b + c) = (a + b) + c.$$

Συνεπώς,

$$a + ((b + c) + d) = (a + b) + (c + d) = ((a + b) + c) + d.$$

Όμοια,

$$\begin{aligned} 0 &= (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + (1 + (-1)) + \dots \\ &= 1 + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + ((-1) + 1) + \dots \\ &= 1. \end{aligned}$$

Ο παραπάνω συλλογισμός έχει χρησιμοποιηθεί από Γάλλους θεολόγους του 18ου αι. ως απόδειξη ύπαρξης του Θεού, αλλά και του Διαβόλου!



Δυσκολίες με το άπειρο: Αθροίσματα - Εξήγηση

Που είναι το λάθος; Το "όμοια" αναφέρεται σε **πεπερασμένο** πλήθος αθροισμάτων, ενώ το χρησιμοποιήσαμε σε άπειρο.



Πρόταση (Bernhard Riemann, 1826-1866)

Αν μία άπειρη σειρά συγκλίνει απόλυτα και έχει άθροισμα s , τότε κάθε άπειρη σειρά που προκύπτει από αναδιάταξη όρων της, συγκλίνει στο ίδιο άθροισμα. Αν όμως δεν συγκλίνει απόλυτα, τότε οι όροι της μπορούν να αθροιστούν με τέτοιο τρόπο ώστε να συγκλίνουν σε **οποιοδήποτε** αριθμό.



Δυσκολίες με το άπειρο: Απειροστά (18ος αι.)

Ο Γερμανός μαθηματικός και φιλόσοφος Gottfried Leibniz, 1646–1716, χρησιμοποιούσε την έννοια της **απειροστής** αλλαγής, την ύπαρξη επομένως ποσοτήτων $\alpha > 0$, εκόντων την ιδιότητα να είναι μικρότερες από κάθε άλλη θετική ποσότητα. Ο Ιρλανδός Επίσκοπος George Berkeley ωρυόταν:

The Analyst, 1734

...the fallacious way of proceeding to a certain Point on the Supposition of an Increment, and then at once shifting your Supposition to that of no Increment...But, notwithstanding all this address to cover it, the fallacy is still the same



Δυσκολίες με το άπειρο: Απειροστά - Εξήγηση

Πρόταση

Έστω (i) $\alpha \geq 0$ με την ιδιότητα: (ii) για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε $\alpha < \varepsilon$. Τότε $\alpha = 0$.

Απόδειξη (με απαγωγή εις άτοπον). Έστω ότι $\alpha \neq 0$ και από την υπόθεση (i) έχουμε $\alpha > 0$. Επιλέγουμε $\varepsilon = \frac{1}{2}\alpha$. Τότε από την υπόθεση (ii) προκύπτει:

$$\alpha < \frac{1}{2}\alpha \iff 1 < \frac{1}{2}.$$

Άτοπο!



Η αγωνία του Πυθαγόρα

Ο μέγας φιλόσοφος και μαθηματικός Πυθαγόρας ο Σάμιος, 569–475 π.χ., είχε βασίσει την φιλοσοφία του στην αρχή

Τα πάντα είναι (ρητοί) αριθμοί.

Φανταστείτε την αγωνία του όταν ανακάλυψε ότι ο αριθμός $\sqrt{2}$ **δεν** είναι ρητός αριθμός... Η ειρωνεία είναι ότι το $\sqrt{2}$ προκύπτει πολύ απλά, ως υποτείνουσα ισοσκελούς ορθογωνίου τριγώνου με κάθετες πλευρές μονάδα, με χρήση του ομώνυμου θεωρήματος! Αυτή η ανακάλυψη, σύμφωνα με την παράδοση, σηματοδότησε την αρχή της καταστροφής της αδελφότητας των Πυθαγορείων στον Κρότωνα της Μεγάλης Ελλάδος και πιθανότατα τον θάνατο του ίδιου του Πυθαγόρα.



Η δικάιωση του Πυθαγόρα

Η δικάιωση του Πυθαγόρα ήλθε αργότερα, για κάποιους μελετητές με τον Εύδοξο το Κνίδιο, 408–355 π.χ., σίγουρα όμως τον 19ο μ.χ. με τον Γερμανό μαθηματικό Georg Cantor:

Πρόταση (G. Cantor, 1872)

Οι άρρητοι αριθμοί προκύπτουν ως όρια ακολουθιών ρητών αριθμών.

Αποτελεί το γνωστότερο παράδειγμα φιλοσόφου που έχει συλλάβει μια μεγάλη αλήθεια, χωρίς όμως η γνώση της εποχής του να του επιτρέπει να την τεκμηριώσει.

Πρόταση (Ήρων ο Αλεξανδρεύς, 10 –75 μ.χ., Μετρικά, Βιβλίο Ι)

Το $\sqrt{2}$ προκύπτει ως όριο της ακολουθίας των ρητών αριθμών

$$x_{n+1} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right), \text{ με } x_1 = 1.$$



Η δικαίωση του Πυθαγόρα: Απόδειξη της Πρότασης Ήρωνα

Έστω ότι το όριο της ακολουθίας $\{x_n\}$ είναι κάποιος αριθμός x , ο οποίος θα πρέπει να είναι > 0 . Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}x &= \lim_{n \rightarrow \infty} x_{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{2}{x_n} \right) \\&= \frac{1}{2} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} x_n + \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} x_n} \right) = \frac{1}{2} \left(x + \frac{2}{x} \right).\end{aligned}$$

Άρα $2x^2 = x^2 + 2 \implies x^2 = 2$. Συνεπώς, λόγω θετικότητας του x ,

$$x = \sqrt{2}.$$

Ερώτηση

Είναι η απόδειξη πλήρης (και επομένως ορθή);



Ορθότητα της Απόδειξης

Απάντηση

- Μαθηματικός: **ΟΧΙ**, επειδή υποθέτει, χωρίς να έχει αποδειχθεί προηγουμένως, την ύπαρξη του ορίου της ακολουθίας!
- Φυσικός Επιστήμων: **ΝΑΙ**, επειδή οι αριθμητικές ποσότητες που μελετάει εκφράζουν φυσικά φαινόμενα που έχουν παρατηρηθεί και συνεπώς υπάρχουν!



Ο θρίαμβος του Αρχιμήδη Ι



Ο μεγαλύτερος μαθηματικός όλων των εποχών Αρχιμήδης ο Συρακούσιος, 287–212 π.χ., κατόρθωσε να αποδείξει, με χρήση της μεθόδου εξάντλησης του Ευδόξου και διπλή απαγωγή εις άτοπον, την ισότητα

$$1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{4^3} + \cdots = \frac{4}{3}.$$

Την χρειαζόταν στον τετραγωνισμό της παραβολής. Χρειάστηκε να περάσουν 20 αιώνες για να ξαναπαρουσιαστεί παρόμοιο αποτέλεσμα!

Το **παλίμψηστο** του Αρχιμήδη περιέχει το έργο του **Μέθοδος**, που εξηγεί πως προέκυψε ο αριθμός $\frac{4}{3}$.



Ο θρίαμβος του Αρχιμήδη II

Στον ίδιο αποδίδεται, εξάλλου, το περίφημο

Αξίωμα του Αρχιμήδη

Για κάθε θετική ποσότητα M και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει φυσικός αριθμός n , τέτοιος ώστε $n\varepsilon > M$.

Η σπουδαιότητα του παραπάνω αξιώματος (που σήμερα προκύπτει εύκολα ως θεώρημα από το αξίωμα της **πληρότητας** των πραγματικών αριθμών) φαίνεται από το γεγονός ότι με χρήση του και μόνο μπορούμε να συμπεράνουμε ότι

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

αποτέλεσμα που αποτελεί την αφετηρία της Μαθηματικής Ανάλυσης!



Η κατάρα της Κασσάνδρας: Georg Cantor



Ο Georg Cantor, 1865–1918 είναι αυτός που έλυσε μια για πάντα τον γρίφο του απείρου για τους μαθηματικούς. Την δεκαετία του 1870 έδειξε ότι:

- Το πλήθος των φυσικών αριθμών $1, 2, 3, 4, 5, 6, \dots$ είναι ίσο με το πλήθος των αρτίων αριθμών $2, 4, 6, \dots$
- Το πλήθος των φυσικών αριθμών είναι ίσο με το πλήθος των ρητών αριθμών.
- Το πλήθος των πραγματικών αριθμών ανάμεσα στο 0 και το 1 είναι μεγαλύτερο από το πλήθος φυσικών αριθμών.
- Το πλήθος των σημείων ενός ευθυγράμμου τμήματος είναι ίσο με το πλήθος των σημείων ενός τετραγώνου και ίσο με το πλήθος των σημείων ενός κύβου.



Η δίκαιωση του Cantor: Το ξενοδοχείο του Hilbert



Οι σφοδρές επιθέσεις που δέχθηκε ο Cantor για τις ρηξικέλευθες θεωρίες του, από το μαθηματικό κατεστημένο της εποχής του, τον οδήγησαν στην κατάθλιψη και στον θάνατό του. Υπήρχαν, όμως, σπουδαίοι μαθηματικοί, όπως ο David Hilbert, 1862–1943, που στήριξαν εξαρχής τις ιδέες του. Σχετικό είναι το **ξενοδοχείο** του Hilbert.