ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΚΥΠΡΟΥ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗΣ

ΠΡΟΧΕΙΡΕΣ ΣΗΜΕΙΩΣΕΙΣ
ΕΠΙ ΤΩΝ

# ΜΕΡΙΚΩΝ ΔΙΑΦΟΡΙΚΩΝ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

ΓΙΩΡΓΟΣ-ΣΩΚΡΑΤΗΣ Δ.Σ. ΣΜΥΡΛΗΣ

ΦΘΙΝΟΠΩΡΟ 2000

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Ἱστορικά στοιχεῖα

Ὁ ὅρος *Διαφορικές Ἐξισώσεις* ἀποδίδεται στόν Leibniz[1] καί ἐμφανίζεται γιά πρώτη φορά τό 1676 ὡς: *ÆQUATIO DIFFERENTIALIS*[2]. Ἡ ἀρχική αὐτή ὀνομασία ὑποδηλοῖ ὅτι πρόκειται περί σχέσεως μεταξύ τῶν *διαφορικῶν* $dx$ καί $dy$, δηλαδή *ἀπειροελαχίστων μεταβολῶν* τῶν μεταβλητῶν $x$ καί $y$ ἀντιστοίχως. Ἡ εἰσαγωγή τοῦ ἀνωτέρω ὅρου καί ἡ ἔναρξη τῆς μελέτης τῶν Διαφορικῶν Ἐξισώσεων (ΔΕ), πραγματοποιεῖται σχεδόν ταυτοχρόνως μέ τήν εἰσαγωγή καί μελέτη τῆς παραγώγου καί γενικότερα τῆς ἀναπτύξεως τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ - δεύτερο ἥμισυ τοῦ 17ου αἰῶνος. Στόν Leibniz ἀποδίδεται καί ὁ σύγχρονος συμβολισμός τῶν διαφορικῶν ἀλλά καί ὁ ορισμός τῆς παραγώγου, ὡς ρυθμοῦ μεταβολῆς συναρτήσεως.

Συστηματική μελέτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων πραγματοποιεῖται ἀπό τόν Newton[3] ὁ ὁποῖος ἦταν σύγχρονος τοῦ Leibniz. Στό διασημότερό του βιβλίο, *Principia*[4], ὑπάρχει ἐκτενής ἀναφορά καί μελέτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων καί τῆς προελεύσεως αὐτῶν. Στό ἔργο *Methodus Fluxionum et serierum infinitarum* (circa 1671), ὁ Newton χωρίζει τίς διαφορικές ἐξισώσεις, τίς ὁποῖες ὀνομάζει *ροϊκές ἐξισώσεις*, σέ τρεῖς

[1] Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716).

[2] Ἤτοι: *Ἐξίσωση διαφορικῶν.*

[3] Sir Isaac Newton (1642-1727).

[4] *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica* (1685) ἤ *Μαθηματικές Ἀρχές τῆς Φυσικῆς Φιλοσοφίας.*

κατηγορίες:

1. Σ'αὐτές ὅπου ἡ *ροή* εἶναι συνάρτηση μόνο τοῦ $x$ ἤ τοῦ $y$, δηλαδή[5]:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \quad \text{ἤ} \quad \frac{dy}{dx} = f(y)\,,$$

2. Σ'αὐτές ὅπου ἡ ροή εἶναι συνάρτηση καί τῶν δύο *καί*

3. Στίς διαφορικές ἐξισώσεις μέ μερικές παραγώγους ἤ *Μερικές Διαφορικές Ἐξισώσεις*[6].

Ὁ Newton θεώρησε τήν ἀνακάλυψη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων τόσο σημαντική ὥστε τήν κωδικοποίησε σ'ἕνα ἀνάγραμμα τό ὁποῖο σέ ἐλεύθερη ἀπόδοση μᾶς λέγει ὅτι:

*Οἱ νόμοι τῆς φύσεως ἐκφράζονται μέ διαφορικές ἐξισώσεις.*

Μιά ἀπό τίς σημαντικότερες συνεισφορές τοῦ Newton ἦταν ἡ ἀνάπτυξη τῶν συναρτήσεων σέ δυναμοσειρές, ἀπ'ὅπου προέρχεται καί ἡ ἀπόδειξη τοῦ *Θεωρήματος Cauchy-Κοβαλέφσκαγια*, τό ὁποῖο ἐξασφαλίζει τοπική ὕπαρξη λύσεων μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἐκπεφρασμένων σέ δυναμοσειρές πολλῶν μεταβλητῶν. Ἡ ἐπίλυση διαφορικές ἐξισώσεις διά τῆς μεθόδου τῶν δυναμοσειρῶν, ἀποτελεῖ πραγματοποίηση τοῦ δευτέρου ἀναγράμματος τοῦ Newton τό ὁποῖο οὐσιαστικά λέγει ὅτι:

---

[5] Ὁ Newton χρησιμοποιοῦσε γιά τά διαφορικά τό συμβολισμό

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x) \quad \text{ἤ} \quad \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(y)\,.$$

Ὁ σύγχρονος συμβολισμός τῶν διαφορικῶν, ἐπεκράτησε στή Βρεττανία ἕνα αἰῶνα ἀργότερα ἀπό τήν ὑπόλοιπη Εὐρώπη, μέ ἀρκετά δυσάρεστες συνέπειες γιά τήν ἀνάπτυξη τοῦ *Διαφορικοῦ Λογισμοῦ* στή χώρα αὐτή.

[6] Ἡ ὁρολογία αὐτή, πού ἀποτελεῖ αὐτολεξεί ἀπόδοση τῆς ἀντιστοίχου γερμανικῆς *Partiellen Differentialgleichungen*, καθώς καί τῆς μετέπειτα ἀγγλικῆς *Partial differential equations*, ἐπεκράτησε τῆς ἐναλλακτικῆς ὀνομασίας: *Διαφορικές ἐξισώσεις μέ μερικές παραγώγους*, ὁρολογία πού προκαλεῖ ὀλιγότερες συγχύσεις καί χρησιμοποιεῖται τόσο στή γαλλική: *Équations differentielles aux dérivées partielles*, ὅσο καί στή ρωσική βιβλιογραφία.

*Γιά νά λύσει κάποιος μία διαφορική ἐξίσωση πρέπει νά ἀντικαταστήσει τίς συναρτήσεις μέ δυναμοσειρές καί νά ἐξισώσει τούς συντελεστές τῶν ἀντιστοίχων δυνάμεων.*[7]

Σκαπανεῖς στή μελέτη τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων, ἐκτός ἀπό τούς Newton καί Leibniz, θεωροῦνται καί οἱ ἀδελφοί Bernoulli, Jakob (1654-1705) καί Johann (1667-1748) μέ σημαντική συνεισφορά στό *Λογισμό τῶν Μεταβολῶν* (*Calculus of Variations.*) Ὁ δέ Daniel Bernoulli (1700-1782), υἱός τοῦ Johann, εἶναι γνωστός γιά τίς ἀνακαλύψεις του στήν *Ὑδροδυναμική*. Τό ὄνομά του φέρει ὁ *Νόμος τῆς ροῆς ἰσεντροπικοῦ δυναμικοῦ*:

$$v_t + \frac{1}{2}|\nabla v|^2 + \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)\frac{p}{\rho} \;=\; g\,.$$

Στόν Daniel Bernoulli ἀποδίδεται ἡ *Μέθοδος χωρισμοῦ τῶν μεταβλητῶν*[8] (***separation of variables***) καθώς καί ἡ *Ἀρχή τῆς ὑπερθέσεως*[9] (*Principle of superposition*). Τήν ἴδια ἐποχή ἐμφανίζονται καί οἱ Euler[10] καί Lagrange[11], οἱ ὁποῖοι εἰσήγαγαν τή *μέθοδο τῆς κυμάνσεως τῶν παραμέτρων* βασισμένη σέ ἰδέες τοῦ Euler στά 1740 ἀλλά μέ τελική μορφή ἀποδιδόμενη στόν Lagrange σέ ἐργασία τοῦ 1774. Τήν ἴδια περίπου ἐποχή ὁ Laplace[12] μελετοῦσε φυσικά φαινόμενα καί πῶς ἀπό αὐτά προκύπτουν διαφορικές ἐξισώσεις, καθώς ἐπίσης καί στό πῶς τά ἤδη ὑπάρχοντα ἀποτελέσματα μποροῦν νά ἐφαρμοσθοῦν σέ φυσικά φαινόμενα. Σημαντική δέ καί ἡ συνεισφορά του στήν *Οὐράνια Μηχανική*

---

[7]Τό ἀνάγραμμα ἐμφανίζεται σέ γράμμα πού ἐστάλη στό Leibniz στίς 26 Ὀκτωβρίου 1676, κωδικοποιημένο στή μορφή: 6a, 2c, d, ae, 13e, 2f, 7i, 3l, 9n, 4o, 4q, 2r, 4s, 8t, 12u, x. Ἀποκρυπτογραφήθηκε ἀργότερα στά λατινικά ὡς: *Data æquatione quotcumque fluentes quantitates involvente, fluxiones invenire et vice versa.*

[8]Réflexions et éclaircissements sur les nouvelles vibrations des cordes, *Mémoires de l'Academie Royale des Sciences et des belles lettres,* Berlin, num. 1753 (1755).

[9]Commentario physico-mechanica generalior principii de coexistentia vibrationum simplicium haum perturbaturum in systemate compositio, *Novi Commentarii Academiæ Scientiarum Imperialis Metropolitanæ,* vol. 19, (1775), pp. 239.

[10]Leonhard Euler (1707-1783).

[11]Compte Joseph-Louis Lagrange (1736-1813).

[12]Marquis Pierre-Simon de Laplace (1749-1827).

ἡ ὁποία ἐπισφραγίζεται ἀπό τό πεντάτομο ἔργο *Traité de Mécanique Méleste* (1799-1825). Τό ὄνομά του φέρει καί ἡ ἐξίσωση δυναμικοῦ

$$\Delta u \ = \ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \ = \ 0 \ ,$$

καθώς καί ὁ ἀντίστοιχος διαφορικός τελεστής $\Delta = \sum_{i=1}^{n} \partial^2/\partial x_i^2$. Ἡ ἴδια ἐξίσωση εἰσήχθη καί ἀπό τόν Lagrange, γιά τό δυναμικό ταχύτητος ροῆς. Τέλος ἡ ἐξίσωση κύματος

$$\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - c^2 \Delta v \ = \ f \ ,$$

ὅπου $c$ ἡ ταχύτητα τοῦ περιγραφόμενου κύματος, ἐμφανίζεται γιά πρώτη φορά στό ἔργο τοῦ Poisson[13], *Mémoire sur la théorie du son*[14], τό 1808, ὡς ἐξίσωση περιγράφουσα ἠχητικά κύματα.

Ἀπό τό δεύτερο ἥμισυ τοῦ 19ου αἰῶνος γίνεται συστηματική μελέτη καί τῆς ποιοτικῆς θεωρίας τῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων. Μέχρι τότε τά κύρια ἐρωτήματα ἦταν ἡ *προέλευση* (*derivation*) καί ἡ ἐπίλυση. Ὁρόσημο ἀποτελεῖ τό θεώρημα Cauchy-Κοβαλέφσκαγια τό ὁποῖο μᾶς παραχωρεῖ τοπική ὕπαρξη λύσεων σέ κατάλληλα διατυπωμένα προβλήματα ἀρχικῶν τιμῶν (γενικότερα, προβλήματα Cauchy), ὅταν τόσο ἡ ἐξίσωση ὅσο καί τά δεδομένα ἀποτελοῦν ἀναλυτικές συναρτήσεις ὅλων τους τῶν μεταβλητῶν. Ὁ Cauchy[15] ἔδωσε τήν ἀπόδειξη στήν περίπτωση γραμμικῶν συστημάτων[16], ἐνῶ ἡ Κοβαλέφσκαγια[17] ἔδωσε ἀπόδειξη στήν περίπτωση καί μή γραμμικῶν συστημάτων[18].

[13]Simeon Denis Poisson, (1781-1840).

[14]Δημοσιεύτηκε στό *J. de l'École Polytechnique*, Tome VII, Cahier XIV, pp. 319-392.

[15]Augustin Louis Cauchy (1789-1857).

[16]Mémoire sur les intégrales des systèmes d'équations différentielles aux derivées partielles, et sur le developpements de ces intégrales en séries ordonnées suivant les puissances ascendentes d'un paramètre que renferment les équations proposées, *C.R. Acad. Sci. Paris*, Vol. 40, (1842), pp. 141-146.

[17]Σοφία Κοβαλέφσκαγια (1850-1891).

[18]Zur Theorie der Partiellen Differentialgleichungen, *J. Reine Angew. Math.* Vol. 80 (1875), pp. 1-32.

Κατά τή διάρκεια τοῦ εἰκοστοῦ αἰῶνος, δίδεται ὁλοένα καί μεγαλύτερη ἔμφαση στίς ἀριθμητικές μεθόδους προσεγγίσεως τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων - συνήθων καί μερικῶν. Αὐτές περιλαμβάνουν *Μεθόδους Πεπερασμένων Διαφορῶν*, *Μεθόδους Πεπερασμένων Στοιχείων* καί *Φασματικές Μεθόδους*, οἱ ὁποῖες βασίζονται σέ διαδικασίες προσεγγίσεως γνωστές ἀπό πολύ παλαιότερα. Μέσω τῶν προσεγγιστικῶν μεθόδων, πέραν τῶν ἀριθμητικῶν ἀποτελεσμάτων, λαμβάνονται πολύτιμες πληροφορίες πού ὑποβοηθοῦν στήν ἀνάπτυξη τῆς ποιοτικῆς θεωρίας. Ἄν γιά παράδειγμα ἦταν δυνατόν νά ἀποδειχθεῖ μέ αὐστηρό τρόπο ὅτι οἱ προσεγγιστικές λύσεις συγκλίνουν, τότε θά εἴχαμε αὐτόματα καί ἀπόδειξη ὑπάρξεως λύσεων τῆς ἀριθμητικά προσεγγιζόμενης ἐξισώσεως. Τέτοιο παράδειγμα ἔχουμε στήν περίπτωση τοῦ βαθμωτοῦ *Διατηρητικοῦ Νόμου*:

$$u_t + f(u)_x \;=\; 0\,,$$

ὅπου $u = u(x,t)$ τό διατηρούμενο μέγεθος καί $f$ ἡ συνάρτηση ροῆς, διατυπωμένου ὡς προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, μέ τήν προσθήκη τῆς ἀρχικῆς συνθήκης $u(x,0) = f(x)$. Συγκεκριμένα, ἡ προσεγγιστική μέθοδος Lax[19]:

$$u_k^{n+1} \;=\; \frac{u_{k-1}^n + u_{k+1}^n}{2} + \frac{\Delta t}{2\Delta x}\left(f_{k-1}^n + f_{k+1}^n\right)\,,$$

ὅπου $u_k^n = u(k\Delta x, n\Delta t)$ καί $f_k^n = f(u_k^n)$, ἀπεδείχθη[20] ὅτι συγκλίνει σέ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν. Ὡς ἐκ τούτου προέκυψε ἀποτέλεσμα ὑπάρξεως λύσεων τοῦ προσεγγιζομένου προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν. Πέραν ὅμως τῶν ἀποτελεσμάτων ὑπάρξεως λύσεων, λαμβάνουμε καί πληροφορίες σχετικές μέ τή μορφή καί συμπεριφορά τῶν λύσεων.

[19] Weak solutions of nonlinear hyperbolic equations and their numerical computation, *Comm. Pure Appl. Math.*, 7 (1954), pp. 159-193.

[20] Ὁ P.D. Lax ἔδωσε ἀπόδειξη γιά εἰδική περίπτωση συναρτήσεως ροῆς $f$ στό: Hyperbolic systems of conservation laws II, *Comm. Pure Appl. Math.*, 10 (1957), pp. 537-566. Ἡ περίπτωση γιά αὐθαίρετη, κυρτή συνάρτηση ροῆς, δίδεται ἀπό τήν Ν.Δ. Ββεντένσκαγια στό: Solutions of the Cauchy problem for a nonlinear equation with discontinuous initial conditions by the method of finite differences, *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S.)*, 111 (1956), pp. 517-520.

Τήν τελευταία εἰκοσαετία ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν ἀριθμητικά ἀποτελέσματα πού τεκμηριώνουν καί ταξινομοῦν τή χαοτική συμπεριφορά τῶν λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν μή γραμμικῶν ἐξισώσεων. Χαρακτηριστικό παράδειγμα τά ἀπειροδιάστατα δυναμικά συστήματα πού προκύπτουν ἀπό μή γραμμικές ἐξισώσεις μέ διάχυση, ὅπου μέσω τῆς ἀριθμητικῆς μελέτης προέκυψαν σοβαρές εἰκασίες σχετικά μέ τήν ὕπαρξη *καθολικῶν ἑλκυστῶν* (*global attractors*), ἀλλά καί τή φύση καί διάστασή τους. Ἀντίστοιχα αὐστηρά θεωρητικά ἀποτελέσματα, ὅπως εἶναι ἀναμενόμενο, ἐμφανίζονται μέ σημαντική χρονική καθυστέρηση.

# Κεφάλαιο 2

# Προκαταρκτικές γνώσεις

## 2.1 Εὐκλείδειοι χώροι

῾Ως $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ θά συμβολίζουμε τά διανύσματα στόν $\mathbb{R}^n$, ἐνῶ $\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{y} = \sum_{k=1}^{n} x_k\, y_k$, τό σύνηθες ἐσωτερικό γινόμενο καί $|\boldsymbol{x}| = (\boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x})^{1/2}$ τήν κατά συνεπακόλουθο τρόπο, ὁριζόμενη εὐκλείδεια νόρμα στόν $\mathbb{R}^n$. ῎Εστω τώρα $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τετραγωνικός πίνακας. ῾Η *ἐπαγόμενη νόρμα* ὁρίζεται ὡς

$$||A|| \;=\; \sup_{|x|=1} |A\boldsymbol{x}|$$

καί πράγματι ἀποτελεῖ νόρμα στό γραμμικό χῶρο $R^{n\times n}$. ᾿Ισχύει δέ ὅτι

$$|A\boldsymbol{x}| \;\leq\; ||A|| \cdot |\boldsymbol{x}|\;.$$

῎Αν τώρα $A,\, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ τότε ἰσχύει ὅτι

$$||AB|| \;\leq\; ||A|| \cdot ||B|| \quad \textit{καί} \quad ||A^k|| \;\leq\; ||A||^k\,,$$

γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$. ῎Εστω τώρα $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ καί $r > 0$. Θά συναντοῦμε συχνά τά ἑξῆς σύνολα:

1. ᾿Ανοικτή σφαίρα κέντρου $\boldsymbol{\xi}$ καί ἀκτίνος $r$

$$B(\boldsymbol{\xi}, r) \;=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| < r\,\}\,.$$

2. Κλειστή σφαίρα κέντρου $\boldsymbol{\xi}$ καί ἀκτίνος $r$

$$\bar{B}(\boldsymbol{\xi}, r) \;=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| \leq r\,\}\,.$$

3. Ἐπιφάνεια σφαίρας κέντρου $\boldsymbol{\xi}$ καί ἀκτίνος $r$

$$S(\boldsymbol{\xi}, r) \;=\; \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \,:\, |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}| = r\,\}\,.$$

Ὑπενθυμίζουμε τούς πιό κάτω ὁρισμούς ἀπό τήν *Πραγματική Ἀνάλυση*:

**Ὁρισμός 2.1.1** *Ἔστω $\{\boldsymbol{x}^k\}_{k\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία σημείων τοῦ $\mathbb{R}^n$ μέ $\boldsymbol{x}^k = (x_1^k, \ldots, x_n^k)$ καί $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Λέγεται ὅτι ἡ ἀνωτε΄ρω ἀκολουθία συγκλίνει στό $\boldsymbol{x}$, συμβολικά $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$, ἄν*

$$\lim_{k\to+\infty} |\boldsymbol{x}_k - \boldsymbol{x}| \;=\; 0\,.$$

*Ἄν τώρα $A$ ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$, λέγεται ὅτι τό $\boldsymbol{x}$ ἀποτελεῖ ὁριακό σημεῖο τοῦ $A$ ἄν ὑπάρχει ἀκολουθία σημείων τοῦ $A$ πού συγκλίνει στό $\boldsymbol{x}$.*

Ἐπίσης:

**Ὁρισμός 2.1.2** *Ἔστω $A \subset \mathbb{R}^n$. Τότε:*

1. *Τό $A$ ὀνομάζεται **ἀνοικτό**, ἄν ἀποτελεῖ ἕνωση ἀνοικτῶν σφαιρῶν.*
2. *Τό $A$ ὀνομάζεται **κλειστό**, ἄν ἀποτελεῖ συμπλήρωμα ἀνοικτοῦ (ἤτοι: $\mathbb{R}^n \setminus A$ ἀνοικτό.) Ἰσοδύναμα, ἄν περιέχει κάθε ὁριακό του σημεῖο.*
3. *Τό $A$ ὀνομάζεται **φραγμένο**, ἄν $A \subset B(\mathbf{o}, r)$, γιά κάποιο $r > 0$.*
4. *Τό $A$ ὀνομάζεται συμπαγές, ἄν εἶναι κλειστό καί φραγμένο. Ἰσοδύναμα, ἄν κάθε ἀκολουθία σημείων του περιέχει συγκλίνουσα, μέσα σ'αὐτό, ὑπακολουθία.*

5. *Τό $A$ ὀνομάζεται συνεκτικό, ἄν ὁποτεδήποτε*

$$A \subset \Omega_1 \cap \Omega_2 \,,$$

*ὅπου $\Omega_1$ καί $\Omega_2$ ἀνοικτά καί ξένα, τότε κάποιο ἀπ'αὐτά εἶναι τό κενό.*

6. *Κλειστή θήκη τοῦ $A$, συμβολικά $\bar{A}$, εἶναι ἡ τομή ὅλων τῶν κλειστῶν ὑπερσυνόλων τοῦ $A$. Διαφορετικά τό σύνολο τῶν ὁριακῶν σημείων τοῦ $A$.*

7. *Σύνορο τοῦ $A$, συμβολικά $\partial A$, εἶναι ἡ τομή τῶν $\bar{A}$ καί τοῦ $\overline{A^c}$.*

8. *Ἐσωτερικό τοῦ $A$, συμβολικά $A^o$, εἶναι ἡ ἕνωση ὅλων τῶν ἀνοικτῶν ὑποσυνόλων τοῦ $A$. Ἀποτελεῖ τό συμπλήρωμα τῆς κλειστῆς θήκης τοῦ συμπληρώματος τοῦ $A$.*

## 2.2 Πολυδεῖκτες καί πολλαπλές παράγωγοι

Σκοπιμότητες οἰκονομίας συμβόλων ἐπιβάλλουν τήν εἰσαγωγή τοῦ πιό κάτω συμβολισμοῦ, γνωστοῦ ὡς, *Συμβολισμοῦ Laurent Schwartz.*

*Πολυδεῖκτες* ὀνομάζονται οἱ $n$-άδες $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$, ὅπου $\mathbb{N}$ τό σύνολο τῶν μή ἀρνητικῶν ἀκεραίων. Ὁρίζουμε ὡς τάξη τοῦ $\boldsymbol{\alpha}$ τό ἄθροισμα

$$|\boldsymbol{\alpha}| \;=\; \alpha_1 + \ldots + \alpha_n \,, \quad \boldsymbol{\alpha}! \;=\; \alpha_1! \cdots \alpha_n! \,.$$

*Πολλαπλή παράγωγος* εἶναι

$$D^{\alpha} \;=\; D_{x_1}^{\alpha_1} \cdots D_{x_n}^{\alpha_n} \;=\; \frac{\partial^{\alpha_1 + \ldots + \alpha_n}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \;=\; \frac{\partial^{|\alpha|}}{\partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_n}^{\alpha_n}} \,,$$

ὅπου $D_{x_k} = \partial / \partial x_k$. Ἄν τώρα $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ διάνυσμα, χρησιμοποιώντας τόν ἀνωτέρω συμβολισμό ἁπλουστεύεται καί ἡ γραφή τοῦ μονονύμου:

$$\boldsymbol{x}^{\alpha} \;=\; x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n} \,.$$

Ἰδιαιτέρως ἄν $\boldsymbol{\alpha} = (0,\ldots,0)$, τότε $D^\alpha u = u$. Ὁ συμβολισμός Laurent Schwartz μᾶς ἐπιτρέπει νά γενικεύσουμε τόν *Τύπο τοῦ Leibniz* γιά πολλαπλές μερικές παραγώγους:

$$D^\alpha(fg) \;=\; \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\boldsymbol{\alpha}!}{\boldsymbol{\beta}!\boldsymbol{\gamma}!} D^\beta f\, D^\gamma g\,.$$

[Βλέπε ἄσκηση 1 στή σελίδα 27.] Ἐπίσης καί τό *Ἀνάπτυγμα Taylor*, τό ὁποῖο στήν περίπτωση πολυωνύμων πολλῶν μεταβλητῶν βαθμοῦ $m$, $P(\boldsymbol{x}) = \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha x^\alpha$, ὅπου $\boldsymbol{x} = (x_1,\ldots,x_n)$, παρέχει τήν ἀκόλουθη γραφή:

$$P(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha P(0)\boldsymbol{x}^\alpha\,.$$

Ἀνάλογα γενικεύεται καί τό ἀνάπτυγμα Taylor γιά αὐθαίρετες συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν. [Βλέπε ἄσκηση 3 στή σελίδα 27.]

## 2.3 Ὁμοιόμορφη σύγκλιση

**Ὁρισμός 2.3.1** *Ἔστω $S$ μή κενό σύνολο καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων, $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιόμορφα ἐπί τοῦ $S$ στήν $\varphi : S \to \mathbb{R}$, ἄν γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ὑπάρχει $N = N(\varepsilon)$ φυσικός ὥστε:*

$$n > N \implies |\varphi_n(t) - \varphi(t)| < \varepsilon \qquad\qquad \text{γιά κάθε } t\in S\,.$$

*Ἤτοι: Ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει σέ κάθε $t \in S$ καί γιά κάθε $\varepsilon > 0$, τό $N$ ἐξαρτᾶται ἀπό τό $\varepsilon$ καί εἶναι ἀνεξάρτητο ἀπό τό $t$. Ἡ συνάρτηση $\varphi$ ὀνομάζεται ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἀκολουθίας.*

Ἡ ὁμοιόμορφη σύγκλιση εἶναι βεβαίως ἰσχυρότερη τῆς *κατά σημεῖον* συγκλίσεως ὅπου ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων συγκλίνει σέ κάθε $t \in S$ καί τό $N$ ἐξαρτᾶται, τόσο ἀπό τό $\varepsilon$, ὅσο καί ἀπό τό $t$.

**Παράδειγμα**

Ἔστω $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varphi_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, μέ τύπο $\varphi_n(t) = t^n$. Τότε

$$\varphi(t) \;=\; \lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t) \;=\; \begin{cases} 0 & \textit{ἄν} \quad t \neq 1 \\ 1 & \textit{ἄν} \quad t = 1\,, \end{cases}$$

κατά σημεῖο. Ἡ ἀνωτέρω σύγκλιση δέν εἶναι ὁμοιόμορφη λόγω τῆς *Προτάσεως 2.3.1*. Ὡστόσο, εὔκολα διαπιστοῦται ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀκολουθία συγκλίνει ὁμοιόμορφα στό διάστημα $[0,\alpha]$ γιά κάθε $\alpha < 1$.

**Πρόταση 2.3.1** Ἔστω $S$ μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^m$ καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων, $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$. Ἄν ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει ὁμοιόμορφα ἐπί τοῦ $S$ στήν $\varphi : S \to \mathbb{R}$, τότε ἡ $\varphi$ εἶναι ἐπίσης συνεχής ἐπί τοῦ $S$. Ἤτοι:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{t\to\tau}\varphi_n(t)\right) \;=\; \lim_{t\to\tau}\left(\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t)\right)\,. \tag{2.1}$$

**Ἀπόδειξη :** Ἔστω $\tau\in S$, $\varepsilon > 0$ καί $N = N(\varepsilon/3)$, ἀπό τόν *Ὁρισμό 2.3.1*. Τότε

$$|\varphi_N(t) - \varphi(t)| \;<\; \varepsilon/3\,,$$

γιά κάθε $t\in I$. Ἐπειδή ἡ $\varphi_N$ εἶναι συνεχής στό $\tau$ ὑπάρχει $\delta > 0$ ὥστε:

$$|t-\tau| < \delta \quad\Longrightarrow\quad |\varphi_N(t) - \varphi_N(\tau)| < \varepsilon/3\,.$$

Ἔστω τώρα $|t-\tau| < \delta$ τότε

$$\begin{aligned} |\varphi(t) - \varphi(\tau)| \;&\leq\; |\varphi(t) - \varphi_N(t)| + |\varphi_N(t) - \varphi_N(\tau)| + |\varphi_N(\tau) - \varphi(\tau)| \\ &\leq\; < \varepsilon/3 + \varepsilon/3 + \varepsilon/3 = \varepsilon\,. \end{aligned}$$

Ἄρα πράγματι ἡ $\varphi$ εἶναι συνεχής. □

Ἔχουμε ἐπίσης τό ἑξῆς ἀποτέλεσμα:

**Πρόταση 2.3.2** Ἔστω $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συνεχῶν συναρτήσεων, $\varphi_n : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$, ἡ ὁποία συγκλίνει ὁμοιόμορφα ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ στήν $\varphi : [\alpha,\beta] \to \mathbb{R}$. Ἄν $\tau\in[\alpha,\beta]$ καί

$$\psi_n(t) \;=\; \int_\tau^t \varphi_n(s)ds\;, \quad t\in[\alpha,\beta]\,,$$

τότε ἡ $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει ἐπίσης ὁμοιόμορφα ἐπί τοῦ $[\alpha,\beta]$ στήν

$$\psi(t) \;=\; \int_{\tau}^{t} \varphi(s)ds\;, \quad t\in[\alpha,\beta]\,.$$

Ἤτοι:

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\int_{\tau}^{t} \varphi_n(s)ds\right) \;=\; \int_{\tau}^{t}\left(\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(s)\right)ds\,.$$

**Ἀπόδειξη :** Ἔστω ὅτι $n\geq N(\varepsilon)$, ὅπου $N(\varepsilon)$ σύμφωνα μέ τόν *Ὁρισμό 2.3.1.* Τότε

$$\begin{aligned}|\psi_n(t)-\psi(t)| \;&=\; \left|\int_{\tau}^{t}\varphi_n(s)ds-\int_{\tau}^{t}\varphi(s)ds\right| \\ &\leq\; \int_{\tau}^{t}|\varphi_n(s)-\varphi(s)|ds \;\leq\; \varepsilon(\beta-\alpha)\,.\end{aligned}$$

□

Ὁ *Ὁρισμός 2.3.1* εἶναι ἰσοδύναμος μέ τόν πιό κάτω:

**Ὁρισμός 2.3.2** *Ἔστω $S$ μή κενό σύνολο καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων, ὅπου $\varphi_n : S\to\mathbb{R}$. Ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ὀνομάζεται ὁμοιόμορφα Cauchy ἐπί τοῦ $S$, ἄν γιά κάθε $\varepsilon>0$ ὑπάρχει $N=N(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ ὥστε*

$$m,\,n>N \implies |\varphi_m(t)-\varphi_n(t)| \,<\, \varepsilon \qquad \text{γιά κάθε } t\in S\,.$$

Παρατηρεῖστε ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων

$$\varphi_n(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!} \qquad , \quad t\in\mathbb{R}\,,$$

δέν συγκλίνει ὁμοιόμορφα σ'ὅλο τό $\mathbb{R}$. Συγκλίνει ὅμως ὁμοιόμορφα σέ κάθε φραγμένο ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$.

**Ὁρισμός 2.3.3** *Ἔστω $S$ μή κενό σύνολο καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων, $\varphi_n : S\to\mathbb{R}$. Λέγεται ὅτι ἡ $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει τοπικά ὁμοιόμορφα ἐπί τοῦ $S$ στήν $\varphi : S\to\mathbb{R}$, ἄν συγκλίνει ὁμοιόμορφα σέ κάθε $K$ συμπαγές (κλειστό καί φραγμένο) ὑποσύνολο τοῦ $S$.*

## 2.4 Χῶροι συναρτήσεων

Ἔστω $\Omega$ ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$ ἀνοικτό. Ὁ χῶρος $C(\Omega)$ ἀποτελεῖ τό γραμμικό χῶρο τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἐπί τοῦ $\Omega$. Γενικότερα ὁ χῶρος $C^m(\Omega)$ ἀποτελεῖται ἀπό τίς $m$ φόρες συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις ἐπί τοῦ $\Omega$:

$$C^m(\Omega) \;=\; \{u : \Omega \to \mathbb{R} \,|\, D^\beta u \in C(\Omega) \text{ γιά κάθε } |\beta| \le m\}\,.$$

Ὡς $C^m(\bar\Omega)$ θά συμβολίζουμε τό χῶρο τῶν συνάρτησεων οἱ ὁποῖες εἶναι $m$ φορές συνεχῶς διαφορίσιμες στό $\Omega$ καί ὅλες τους οἱ μερικές παράγωγοι τάξεως μικρότερης ἤ ἴσης τοῦ $m$ (ἤτοι: $\partial^\beta u$, μέ $|\boldsymbol{\beta}| \le m$) ἐπεικτείνονται συνεχῶς στό $\bar\Omega$. Στήν περίπτωση πού τό $\Omega$ εἶναι φραγμένο, τό $\bar\Omega$ εἶναι συμπαγές καί στόν $C^m(\bar\Omega)$ ὁρίζεται ἡ νόρμα:

$$||u|| \;=\; \sup_{x\in\Omega}\{|D^\alpha u(x)| \;|\; |\boldsymbol{\alpha}| \le m\}\;.$$

Θά συναντήσουμε ἐπίσης τούς ἑξῆς χώρους

$$C^\infty(\Omega) \;=\; \cap_{m=1}^\infty C^m(\Omega) \quad \text{καί} \quad C^\infty(\bar\Omega) \;=\; \cap_{m=1}^\infty C^m(\bar\Omega)\,.$$

Ἔστω τώρα $u \in C(\Omega)$. *Φορέας (support)*, τῆς $u$ ὀνομάζεται ἡ κλειστή θήκη τοῦ συνόλου στό ὁποῖο ἡ $u$ δέν μηδενίζεται. Τό σύνολο $C_0^m(\Omega)$ ἀποτελεῖ τό χῶρο τῶν συναρτήσεων μέ συμπαγῆ φορέα οἱ ὁποῖες ἀνήκουν στό $C^m(\Omega)$. Παρομοίως ὁρίζουμε καί τό χῶρο:

$$C_0^\infty(\Omega) \;=\; \cap_{m=1}^\infty C_0^m(\Omega)\,.$$

Μιά συνάρτηση $u \in C^\infty(\Omega)$, ὀνομάζεται ἀναλυτική ἐπί τοῦ $\Omega$, ἄν μπορεῖ νά ἐκφρασθεῖ ὡς δυναμοσειρά γύρω ἀπό κάθε $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$. Ἤτοι, γιά κάθε $\boldsymbol{\xi} \in \Omega$ ὑπάρχει $r > 0$ ὥστε γιά κάθε $\boldsymbol{h} \in B(\mathbf{o}, r)$ νά ἰσχύει

$$u(\boldsymbol{\xi} + \boldsymbol{h}) \;=\; \sum_{|\alpha|\ge 0} \frac{1}{\boldsymbol{\alpha}!} D^\alpha u(\boldsymbol{\xi}) \boldsymbol{h}^\alpha\,,$$

πού ἀποτελεῖ $n$-διάστατη γενίκευση τῆς δυναμοσειρᾶς. Τό σύνολο τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων ἐπί τοῦ $\Omega$ συμβολίζεται μέ $C^\omega(\Omega)$.

Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τό σύνολο $L^p(\Omega)$, ὅπου $p\in[1,+\infty)$, ὁρίζεται ὡς:

$$L^p(\Omega) \;=\; \left\{ f:\Omega\to\mathbb{R} \,|\, f \text{ μετρήσιμη καί } \int_\Omega |f|^p\,dx < +\infty \right\} ,$$

πού ἀποτελεῖ χῶρο μέ νόρμα:

$$||f||_p \;=\; \left(\int_\Omega |f|^p\,dx\right)^{1/p} .$$

Στήν περίπτωση ὅπου $p=+\infty$, ὁ χῶρος $L^\infty(\Omega)$ ἀποτελεῖται ἀπ'ὅλες τίς *οὐσιαστικά* φραγμένες συναρτήσεις, δηλαδή τίς μετρήσιμες συναρτήσεις, $f:\Omega\to\mathbb{R}$, γιά τίς ὁποῖες ὑπάρχει $M>0$ ὥστε τό σύνολο

$$Z_{f,M} \;=\; \{\boldsymbol{x}\in\Omega \,|\, |f(\boldsymbol{x})| > M\}$$

νά ἔχει μέτρο μηδέν. Ὁ $L^\infty(\Omega)$ μπορεῖ νά ἐφοδιαστεῖ μέ νόρμα, τήν $||\cdot||_\infty$, πού ἀποτελεῖ τό ἐλάχιστο τέτοιο $M$. Ἤτοι:

$$||f||_\infty \;=\; \inf\{M \,|\, \text{Τό μέτρο τοῦ } Z_{f,M} \text{ ἴσον μέ μηδέν}\} .$$

Ἄν βεβαίως ἡ $f$ εἶναι συνεχής, τότε

$$||f||_\infty \;=\; \sup_{x\in\Omega} |f(x)| .$$

Ἔστω τώρα $f\in L^p(\Omega)$ καί $g\in L^q(\Omega)$, μέ $1/p+1/q=1$ καί $p,\,q\in[1,+\infty]$. Τότε $fg\in L^1(\Omega)$ καί ἰσχύει ἡ *Ἀνισότης Hölder*:

$$\left|\int_\Omega f(x)g(x)\,dx\right| \;\le\; ||f||_p\cdot||g||_q .$$

Ἄν θέσουμε $p=q=2$ λαμβάνουμε τήν *Ἀνισότητα Cauchy-Schwartz*. Τέλος ὁ χῶρος $L^1_{loc}$ ὁρίζεται ὡς:

$$L^1_{loc}(\Omega) \;=\; \{f:\Omega\to\mathbb{R} \,|\, f\in L^1(K) \text{ γιά κάθε } K\subset\Omega \text{ συμπαγές}\} .$$

## 2.5 Στοιχεῖα λογισμοῦ πολλῶν μεταβλητῶν

### 2.5.1 Πολικές συντεταγμένες

Κάθε σημεῖο τοῦ ἐπιπέδου, πλήν τῆς ἀρχῆς τῶν ἀξόνων, παρίσταται κατά μοναδικό τρόπο μέσω τῶν πολικῶν συντεταγμένων. Ἄν δηλαδή $(x,y) \neq (0,0)$ τότε ὑπάρχει $r > 0$ καί $\vartheta \in [0, 2\pi)$ ὥστε

$$x \;=\; r\cos\vartheta \qquad \textit{καί} \qquad y \;=\; r\sin\vartheta\,.$$

Τά $r$ καί $\vartheta$ ἀποτελοῦν τίς *πολικές συντεταγμένες* τοῦ σημείου $(x,y)$. Προφανῶς $r = (x^2+y^2)^{1/2}$ καί $\vartheta = \tan^{-1}(y/x)$, ὅταν $x \neq 0$. Ἡ ἀλλαγή συντεταγμένων, ἀπό καρτεσιανές σέ πολικές, εἶναι ἰδιαίτερα χρήσιμη ὅταν ὁλοκληρώνουμε σέ κυκλικά χωρία. Ἔτσι

$$\int_{x^2+y^2<r^2} f(x,y)\,dx\,dy \;=\; \int_0^r \varrho\left(\int_0^{2\pi} f(\varrho\cos\vartheta, \varrho\sin\vartheta)\,d\vartheta\right)d\varrho\,,$$

διότι ἡ Ἰακωβιανή τῆς ἀλλαγῆς συντεταγμένων ἰσοῦται μέ $r$. Δηλαδή

$$J \;=\; \det\begin{pmatrix} x_r & x_\vartheta \\ y_r & y_\vartheta \end{pmatrix} \;=\; \det\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -r\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & r\cos\vartheta \end{pmatrix} \;=\; r\,.$$

Ἄρα

$$dx\,dy \;=\; \varrho\,d\varrho\,d\vartheta\,.$$

Στίς $n$ διαστάσεις, ἄν $d\sigma$ ἀποτελεῖ στοιχεῖο ὁλοκληρώσεως ἐπί τῆς μοναδιαίας σφαίρας, τότε

$$dx \;=\; dx_1 \cdots dx_n \;=\; \varrho^{n-1}\,d\varrho\,d\sigma\,.$$

Ἔτσι λοιπόν ἡ ὁλοκλήρωση ἐπί τῆς ἀνοικτῆς σφαίρας γίνεται:

$$\int_{B(0,r)} f(x)\,dx \;=\; \int_0^r \varrho^{n-1}\left(\int_{S(0,1)} f(\varrho\sigma)\,d\sigma\right)d\varrho.$$

Ἰδιαιτέρως δέ ἰσχύει ὅτι

$$\int_{S(0,r)} f(\sigma)\,d\sigma \;=\; r^{n-1}\int_{S(0,1)} f(r\sigma)\,d\sigma\,.$$

Ἔτσι ἔχουμε ἐπίσης ὅτι:

$$\int_{B(0,r)} f(x)\,dx \;=\; \int_0^r \left( \int_{S(0,\varrho)} f(\sigma)\,d\sigma \right) d\varrho\,.$$

### 2.5.2 Ὁμαλές ἐπιφάνειες

Ἔστω $S \subset R^n$ καί $k \geq 1$. Ἡ $S$ λέγεται ὅτι ἀποτελεῖ $C^k$ (ἀντ. $C^\infty$, ἀντ. $C^\omega$) ὑπερεπιφάνεια, ἄν γιά κάθε $\boldsymbol{\xi} \in S$ ὑπάρχει $r > 0$ καί $\varphi \in C^k(B(\boldsymbol{\xi}, r))$ (ἀντ. $\varphi \in C^\infty(B(\boldsymbol{\xi}, r))$, ἀντ. $\varphi \in C^\omega(B(\boldsymbol{\xi}, r)))$ ὥστε $\nabla\varphi(\boldsymbol{x}) \neq 0$ γιά κάθε $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{\xi}, r)$ καί

$$\{\boldsymbol{x} \,|\, \varphi(\boldsymbol{x}) = 0\,\} \;=\; S \cap B(\boldsymbol{\xi}, r)\,.$$

Ἄν ἡ $S$ ἀποτελεῖ $C^1$ ὑπερεπιφάνεια τοῦ $\mathbb{R}^n$, τότε σέ κάθε της σημεῖο $\boldsymbol{\xi}$ ὁρίζεται ἡ μοναδιαία κάθετος $\boldsymbol{\nu} = \boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi})$. Αὐτή θά πρέπει νά εἶναι παράλληλη πρός τήν κλίση τῆς $\varphi$ πού ὁρίζεται ἀνωτέρω. Πράγματι, ἄν $\boldsymbol{\gamma}$ ὁμαλή καμπύλη μέ $\boldsymbol{\gamma}(0) = \boldsymbol{\xi}$ καί

$$\boldsymbol{\gamma}(t) \;=\; (x_1(t), \ldots, x_n(t)) \in S\,, \quad t \in I,$$

τότε $\varphi(\boldsymbol{\gamma}(t)) = 0$ ἄρα παραγωγίζοντας ὡς πρός $t$ ἔχουμε ὅτι

$$\nabla\varphi(\boldsymbol{\xi}) \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}(0) \;=\; 0\,.$$

Ἄρα ἡ κλίση τῆς $\varphi$ εἶναι κάθετη σέ ἐφαπτόμενο διάνυσμα τῆς $S$ στό $\boldsymbol{\xi}$ καί ὡς ἐκ τούτου εἶναι *κάθετη* στήν $S$. Ὁρίζουμε λοιπόν ὡς μοναδιαία κάθετο στήν ἐπιφάνεια $S$ στό σημεῖο $\boldsymbol{\xi}$ τήν

$$\boldsymbol{\nu}(\boldsymbol{\xi}) \;=\; \frac{\nabla\varphi}{|\nabla\varphi|}\,.$$

Προφανῶς ἐδῶ ἔχουμε δύο ἐπιλογές στό πρόσημο τῆς καθέτου.

Ἄν τώρα $\Omega$ ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$ θά λέγεται ὅτι τό σύνορο τοῦ $\Omega$ εἶναι $C^k$ (ἀντ. $C^\infty$, ἀντ. $C^\omega$) ἄν ἀποτελεῖ $C^k$ (ἀντ. $C^\infty$, ἀντ. $C^\omega$) ὑπερεπιφάνεια.

### 2.5.3 Ἀντίστροφη καί ἔμμεσα ὁρισμένη συνάρτηση

**Θεώρημα 2.5.1 (Θεώρημα ἀντίστροφης συναρτήσεως)** Ἔστω $U$ ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{\xi} \in U$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n$ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση μέ ἀντιστρέψιμη ἰακωβιανή στό $\boldsymbol{\xi}$, δηλαδή

$$\det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right) \neq 0\,.$$

Τότε ὑπάρχουν $V$, ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $U$ καί $W$ ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^n$ μέ $\boldsymbol{\xi} \in V$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}) \in W$, ὥστε ἡ $\boldsymbol{f} : V \to W$ νά εἶναι $1-1$ καί ἐπί καί ἡ ἀντίστροφή της $\boldsymbol{f}^{-1} : W \to V$, νά εἶναι ἐπίσης συνεχῶς διαφορίσιμη.

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε W.Rudin, *Principles of Mathematical Analysis.* $\Box$.

Συνέπεια τοῦ ἀνωτέρω εἶναι τό πιό κάτω θεώρημα πού εἶναι γνωστό καί ὡς *Θεώρημα Πεπλεγμένης Συναρτήσεως:*

**Θεώρημα 2.5.2 (Θεώρημα τῆς ἔμμεσα ὁρισμένης συναρτήσεως)** Ἔστω $U$ ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{m+n}$,

$$\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) : U \to \mathbb{R}^n\,,$$

συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση, τήν ὁποία γράφουμε καί ὡς $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y})$, μέ $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^m$ καί $\boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^m$, $(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \in U$, καί ἰσχύει ὅτι

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) = 0\,.$$

Ἄν ἐπί πλέον ἔχουμε ὅτι

$$\det\left(\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{y}}\right)(\boldsymbol{\xi}, \boldsymbol{\eta}) \neq 0\,,$$

τότε ὑπάρχει συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση $\boldsymbol{g} : W \to \mathbb{R}^n$, ὅπου $W$ ἀνοικτή περιοχή τοῦ $\boldsymbol{\xi}$ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{\xi}) = \boldsymbol{\eta} \quad \textit{καί} \quad \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})) = 0\,,$$

γιά κάθε $\boldsymbol{x} \in W$.

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε W.Rudin, *Principles of Mathematical Analysis.* □.

**Ἐφαρμογή**

*Πότε οἱ διπαραμετρική οἰκογένεια*

$$X(s,t)\,, \quad Y(s,t)\,, \quad Z(s,t)\,,$$

*ὅπου* $(s,t)\in U$ *ἀνοικτό, ὁρίζει ἐπιφάζεια στόν* $\mathbb{R}^3$;

**Ἀπάντηση**

Αὐτό συμβαίνει ὅταν

$$\begin{vmatrix} X_s & X_t \\ Y_s & Y_t \end{vmatrix} \neq 0\,,$$

λόγω τοῦ *Θεωρήματος 2.5.2.* [Βλέπε ἄσκηση 8 στή σελίδα 28.]

## 2.6 Στοιχεῖα θεωρίας συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων

Ἀναφέρουμε τή συνήθη τριάδα ἀποτελεσμάτων: *Ὑπάρξεως, Μοναδικότητος* καί *Ὁμαλῆς Ἐξαρτήσεως τῶν Λύσεων ἀπό Παραμετρούς.* Θά χρειασθοῦμε τόν ἑξῆς ὁρισμό:

**Ὁρισμός 2.6.1** *Ἔστω* $g:[a,b]\to\mathbb{R}$. *Λέγεται ὅτι ἡ* $g$ *ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη Lipschitz, ἤ εἶναι συνεχής Lipschitz στό* $[a,b]$ *μέ σταθερά* $k>0$, *ἄν ἰσχύει ὅτι:*

$$|g(x_1)-g(x_2)| \;\leq\; \kappa\,|x_1-x_2|\,,$$

*γιά κάθε* $x_1,x_2\in[a,b]$.

Ἡ συνέχεια Lipschitz εἶναι βεβαίως ἰσχυρότερη τῆς ὁμοιόμορφης συνέχειας ἀλλά ἀσθενέστερη τῆς συνεχοῦς διαφορισιμότητος:

**Λῆμμα 2.6.1** Ἄν ἡ συνάρτηση $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη τότε ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη Lipschitz στό $[a,b]$ μέ σταθερά

$$\kappa \;=\; \max_{x\in[a,b]} |g'(x)|\,.$$

Εἴμαστε ἕτοιμοι νά δώσουμε τό θεώρημα ὑπάρξεως καί μοναδικότητος λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν ὅταν πληροῦται ἡ συνθήκη Lipschitz:

**Θεώρημα 2.6.2 (Picard-Lindelöf)** Ἔστω $\boldsymbol{f} : D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής συνάρτηση ὅπου $D$ ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{n+1}$ ἀνοικτό,

$$K = [\tau-\alpha, \tau+\alpha] \times \bar{B}(\boldsymbol{\xi}, \beta) \subset D$$

γιά κάποια $\alpha$, $\beta > 0$, καί $M = \max_{(x,t)\in K} |\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})|$. Ἐπίσης, ἔστω ὅτι ἡ $\boldsymbol{f}$ ἱκανοποιεῖ τή συνθήκη Lipschitz ὡς πρός τή δεύτερη μεταβλητή:

$$|\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_1) - \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}_2)| \;\le\; \kappa|\boldsymbol{x}_1 - \boldsymbol{x}_2|$$

γιά κάθε $(t,\boldsymbol{x}_1)$, $(t,\boldsymbol{x}_2) \in K$ καί $\kappa$ θετική σταθερά. Τότε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\left\{ \begin{array}{lcl} \boldsymbol{x}' & = & \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(\tau) & = & \boldsymbol{\xi} \end{array} \right.$$

ἔχει μοναδική λύση $\boldsymbol{\varphi}$ πού ὁρίζεται στό διάστημα $[\tau-\gamma, \tau+\gamma]$, ὅπου:

$$\gamma \;=\; \min\left\{\alpha, \frac{\beta}{M}\right\}\;.$$

Ἡ $\boldsymbol{\varphi}$ προκύπτει ὡς ὁμοιόμορφο ὅριο τῆς ἐπαναληπτικῆς μεθόδου Picard. Ἤτοι:

$$\boldsymbol{\varphi}(t) \;=\; \lim_{k\to\infty} \boldsymbol{\varphi}_k(t)\;, \quad t \in [\tau-\gamma, \tau+\gamma]$$

ὅπου:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\varphi}_0(t) &= \boldsymbol{\xi} \qquad \text{καί}\\ \boldsymbol{\varphi}_{k+1}(t) &= \boldsymbol{\xi} + \int_\tau^t \boldsymbol{f}(s, \boldsymbol{\varphi}_k(s))ds\end{aligned}$$

γιά κάθε $k \in \mathbb{N}$. □

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, σελίδα 23. □.

Ἀναφέρουμε καί τό θεώρημα ὁμαλῆς ἐξαρτήσεως τῶν λύσεων προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες:

**Θεώρημα 2.6.3** Ἔστω $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n) : D \to \mathbb{R}^n$ συνεχής, ὅπου $D$ ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^{n+1}$. Ἔστω ἐπίσης ὅτι $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, ὅπου $t \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n$ καί $\boldsymbol{f}_x = (\partial f_i / \partial_{x_j})_{i,j=1,\ldots,n}$, συνεχεῖς στό $D$. Ἄν $\tau \in \mathbb{R}$, $\boldsymbol{\xi} \in \mathbb{R}^n$ καί $(\tau, \boldsymbol{\xi}) \in D$, τότε ὑπάρχει ἀνοικτή περιοχή $\Omega \subset D$ τοῦ $(\tau, \boldsymbol{\xi})$ στήν ὁποία ὁρίζεται ἡ συνάρτηση $\boldsymbol{\varphi} = \boldsymbol{\varphi}(t, \boldsymbol{\eta})$ ὡς λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} \boldsymbol{x}' = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}) \\ \boldsymbol{x}(\tau) = \boldsymbol{\eta}, \end{cases}$$

καί στήν ὁποία ἡ $\boldsymbol{\varphi}$ εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη ὡς πρός ὅλες τίς μεταβλητές της.

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε E. Coddington and N. Levinson, *Theory of Ordinary Differential Equations*, σελίδα 25. □.

Ἄμεση ἐφαρμογή τοῦ ἀνωτέρω θεωρήματος τό πιό κάτω πόρισμα:

**Πόρισμα 2.6.4** Ἔστω $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ : $D \to \mathbb{R}$ συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις, ὅπου $D$ ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}^3$. Ἐπίσης ἔστω $f$, $g$, $h$ :

$I \to \mathbb{R}$ συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις, ὅπου $I$ ἀνοικτό διάστημα. Ἄν $s_0 \in I$ τότε ὑπάρχουν συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις

$$X = X(s,t), \quad Y = Y(s,t), \quad \text{καί} \quad Z = Z(s,t),$$

ὁρισμένες ἐπί ἀνοικτῆς περιοχῆς τοῦ σημείου $(s_0, 0)$ καί ἱκανοποιοῦσες τό σύστημα

$$\begin{cases} x_t &= \alpha(x,y,z) \\ y_t &= \beta(x,y,z) \\ z_t &= \gamma(x,y,z) \end{cases}$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες

$$\alpha(s,0) = f(s)\,, \quad \beta(s,0) = g(s)\,, \quad \text{καί} \quad \gamma(s,0) = h(s)\,.$$

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε ἄσκηση 9 στή σελίδα 28.

## 2.7 Ὁλοκλήρωση κατά μέρη καί συζυγής τελεστής

Τό *Θεμελιῶδες Θεώρημα τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ* μᾶς λέγει ὅτι

$$\int_a^b f'(x)\,dx = f(b) - f(a)\,, \tag{2.2}$$

γιά κάθε $f$ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση στό $[a,b]$. Ἄμεση συνέπεια αὐτοῦ ὁ *τύπος ὁλοκληρώσεως κατά μέρη*:

$$\int_a^b f'(x)\,g(x)\,dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f(x)\,g'(x)\,dx\,. \tag{2.3}$$

Γενίκευση τοῦ (2.2) στίς $n$ διαστάσεις ἀποτελεῖ τό *Θεώρημα Ἀποκλίσεως* (*Divergence Theorem*) τό ὁποῖο μᾶς παρέχει ὅτι:

$$\int_\Omega \nabla \cdot \boldsymbol{u}(x)\,dx = \int_{\partial\Omega} \boldsymbol{u}(s) \cdot \boldsymbol{\nu}(s)\,ds\,, \tag{2.4}$$

ὅπου τά $dx$, $ds$ ἀντιπροσωπεύουν ὁλοκληρώσεις ἐπί τοῦ ἀνοικτοῦ χωρίου $\Omega$, ὑποσυνόλου τοῦ $\mathbb{R}^n$ καί τοῦ συνόρου αὐτοῦ $\partial\Omega$ ἀντιστοίχως, ἐνῶ τό διάνυσμα $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \ldots, \nu_n)$ ἀποτελεῖ τή μοναδιαία ἐξωτερική κάθετο στό $\partial\Omega$. Ἐπίσης $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $\nabla \cdot \boldsymbol{u} = \sum_{k=1}^{n} D_{x_k} u_k$ καί $D_{x_k} u_k = \partial u_k / \partial x_k$. Γιά νά ἰσχύει τό ἀνωτέρω ὑποθέτουμε ὅτι τό σύνορο $\partial\Omega$ εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλό, ἐνῶ γιά τήν συνάρτηση $\boldsymbol{u}$, ὅτι ἀνήκει στό $C^1(\bar{\Omega})$. Συνέπεια τοῦ (2.4) εἶναι ἡ ταυτότητα:

$$\int_{\Omega} D_{x_k} w(x)\, dx \;=\; \int_{\partial\Omega} w(s)\, \nu_k(s)\, ds\,, \tag{2.5}$$

ἡ ὁποία μᾶς παρέχει τήν ὁλοκλήρωση κατά μέρη:

$$\int_{\Omega} v\, D_{x_k} u\, dx \;=\; \int_{\partial\Omega} v\, u\, \nu_k\, ds - \int_{\Omega} D_{x_k} v\, u\, dx\ . \tag{2.6}$$

Παρατηρεῖστε ὅτι ἡ (2.3) ἀποτελεῖ εἰδική περίπτωση τῆς (2.6). Γενικότερα, ἔστω ὅτι μᾶς δίδεται ὁ γραμμικός τελεστής $L = \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(x) D^\alpha$. Ἄν τώρα $u,\, v \in C^m(\bar{\Omega})$ καί $c_\alpha \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$, τότε ἐφαρμόζοντας τήν (2.6) ἀλλεπάλληλα καί μεταφέρουμε διαδοχικά ὅλες τίς μερικές παραγώγους ἀπό τή $u$ στή $v$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} v \sum_{|\alpha| \le m} c_\alpha(x) D^\alpha u\, dx \;= \\ &\qquad \int_{\Omega} \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha \left(v c_\alpha(x)\right)\, u\, dx + \int_{\partial\Omega} B(v, u, \boldsymbol{\nu})\, ds\,, \end{aligned}$$

ὅπου $B$ κατάλληλη τριγραμμική μορφή. Στήν $B$ ἐμφανίζονται μερικές παράγωγοι τῶν $u$ καί $v$ ἕως καί τάξεως $m-1$. Ἡ ἀνωτέρω μπορεῖ νά γραφεῖ οἰκονομικότερα ὡς

$$\int_{\Omega} v\, Lu\, dx \;=\; \int_{\Omega} L^* v\, u\, dx + \int_{\partial\Omega} B(v, u, \boldsymbol{\nu})\, ds\,, \tag{2.7}$$

πού εἶναι γνωστή ὡς *ταυτότητα Lagrange-Green*. Ὁ τελεστής $L^*$ ἀποτελεῖ τόν *συζυγῆ* (*conjugate*) τοῦ $L$ καί ὁρίζεται ὡς:

$$L^* u \;=\; \sum_{|\alpha| \le m} (-1)^{|\alpha|} D^\alpha (c_\alpha(x) u)\,. \tag{2.8}$$

Στήν ἁπλή περίπτωση ὅπου

$$L \;=\; \Delta = \sum_{k=1,\dots,n} D^2_{x_k} \;,$$

δηλαδή στήν περίπτωση τοῦ τελεστοῦ *Laplace*, χρησιμοποιώντας κατάλληλα τήν (2.6) γιά $u,\, v\in C^2(\bar\Omega)$, λαμβάνουμε:

$$\int_\Omega u\,\Delta v\,dx \;=\; -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu}\,ds\,, \tag{2.9}$$

ὅπου $\partial/\partial\nu$ παράγωγος στήν κατεύθυνση τῆς ἐξωτερικῆς καθέτου ἐπί τοῦ συνόρου τοῦ $\Omega$. Ἄλλιῶς $\partial v/\partial\nu = \nabla v\cdot\boldsymbol{\nu}$. Παρομοίως:

$$\int_\Omega v\,\Delta u\,dx \;=\; -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} v\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds\,. \tag{2.10}$$

Ἀφαιρώντας τίς (2.9) καί (2.10) λαμβάνουμε:

$$\int_\Omega u\,\Delta v\,dx \;=\; \int_\Omega v\,\Delta u\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)\,ds\,. \tag{2.11}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ εἰδική περίπτωση τῆς (2.7) καί βεβαίως συζυγής τοῦ τελεστοῦ $\Delta$ εἶναι ὁ ἑαυτός του. Σ'αὐτή τήν περίπτωση (ἤτοι: $L^* = L$), ὁ τελεστής μας ὀνομάζεται *αὐτοσυζυγής*. Ἡ δέ τριγραμμική μας μορφή εἶναι ἡ

$$B(v,u,\boldsymbol{\nu}) \;=\; u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu} \;=\; (u\nabla v - v\nabla u)\cdot\boldsymbol{\nu}\,.$$

Παρατηροῦμε ὅτι, ὅταν μηδενίζονται ὅλοι οἱ συνοριακοί ὅροι, ἡ (2.7) καθίσταται:

$$\int_\Omega v\,Lu\,dx \;=\; \int_\Omega L^*v\,u\,dx\,. \tag{2.12}$$

## 2.8 Στοιχεῖα Συναρτησιακῆς Ἀναλύσεως

**Ὁρισμός 2.8.1** *Ἔστω $E$ γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$. Ἡ συνάρτηση $||\cdot|| : E \to \mathbb{R}$, ὀνομάζεται νόρμα ἐπί τοῦ $E$, ἄν ἱκανοποιοῦνται τά πιό κάτω:*

1. *Γιά κάθε $x \in E$ ἰσχύει ὅτι $||x|| \geq 0$ καί ἡ ἰσότης ἰσχύει μόνον ὅταν $x = 0$.*
2. *Γιά κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ καί $x \in E$ ἰσχύει ὅτι*
$$||\lambda x|| = |\lambda| \cdot ||x|| .$$
3. *Γιά κάθε $x, y \in E$ ἰσχύει ὅτι*
$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| .$$

Ἕνας χῶρος ἐφοδιασμένος μέ νόρμα ὀνομάζεται *Χῶρος μέ νόρμα* (*Normed space*.) Ἡ νόρμα ὁρίζει στόν $E$ *ἀπόσταση* ἤ ἄλλως *μετρική*, τήν $d(x,y) = ||x-y||$, καί ὡς ἐκ τούτου *τοπολογική δομή*. Ἔτσι, ὅπως καί στόν $\mathbb{R}^n$ ὁρίζονται οἱ ἀνοικτές (ἀντ. κλειστές) σφαῖρες:

$$B(x,r) = \{y \in E : ||y-x|| < r\},$$
$$(\text{ ἀντ. } \bar{B}(x,r) = \{y \in E : ||y-x|| \leq r\}.)$$

Ἐπίσης ὁρίζεται καί σύγκλιση:

$$x_n \to x \text{ στόν } E \iff ||x_n - x|| \to 0 .$$

Κατ'αὐτό τόν τρόπο ὁρίζεται καί ἡ ἀκολουθία Cauchy.

**Ὁρισμός 2.8.2** *Ἔστω $E$ χῶρος μέ νόρμα. Ὁ $E$ ὀνομάζεται χῶρος Banach ἄν κάθε ἀκουλουθία Cauchy στοιχείων τοῦ $E$ συγκλίνει σέ στοιχεῖο τοῦ $E$.*

*Ἤτοι: Ὁ $E$ εἶναι πλήρης ὡς πρός τήν μετρική πού ὁρίζει ἡ νόρμα.*

**Παραδείγματα χώρων Banach**

1. Ὁ Εὐκλείδειος χῶρος $\mathbb{R}^n$ μέ νόρμα

$$|\boldsymbol{x}|_p \;=\; \begin{cases} \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k|^p\right)^{1/p} & \breve{\alpha}\nu \quad p \in [1, +\infty) \\ \max_{k=1,\ldots,n} |x_k| & \breve{\alpha}\nu \quad p = +\infty\,. \end{cases}$$

2. Ὁ χῶρος $l^p(\mathbb{N})$ πού ὁρίζεται ὡς

$$l^p(\mathbb{N}) = \{\boldsymbol{u} = \{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} : ||\boldsymbol{u}||_p < +\infty\}$$

ὅπου

$$||\boldsymbol{u}||_p \;=\; \begin{cases} \left(\sum_{n=1}^{+\infty} |u_n|^p\right)^{1/p} & \breve{\alpha}\nu \quad p \in [1, +\infty) \\ \max_{n\in\mathbb{N}} |u_n| & \breve{\alpha}\nu \quad p = +\infty\,. \end{cases}$$

3. Ὁ χῶρος $C(K)$ τῶν συνεχῶν συναρτήσεων ἐπί συμπαγοῦς συνόλου $K$ μέ νόρμα

$$||u|| \;=\; \max_{x\in K} |u(x)|\,.$$

4. Οἱ χῶροι $L^p(\Omega)$ μέ τήν νόρμα τους.

**Χῶροι μέ ἐσωτερικό γινόμενο**

**Ὁρισμός 2.8.3** *Ἔστω $X$ γραμμικός χῶρος ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ καί*

$$(\cdot,\cdot) : X \times X \to \mathbb{R}\,,$$

*συνάρτηση με τίς ἀκόλουθες ἰδιότητες*

1. *Συμμετρικότης:* $(x, y) = (y, x)$ *γιά κάθε* $x,\, y \in X$.

2. *Γραμμικότης:* $(\lambda x+\mu y, z) = \lambda(x,z)+\mu(y,z)$, *γιά κάθε* $x,\, y,\, z\in X$ *καί* $\lambda,\, \mu\in R$.

3. *Θετικότης:* $(x,x) > 0$ *ἄν* $x \neq 0$,

*ὀνομάζεται ἐσωτερικό γινόμενο ἐπί τοῦ* $X$. *Ὁ δέ χῶρος* $X$ *ὀνομάζεται χῶρος μέ ἐσωτερικό γινόμενο.*

Ἄν τώρα $X$, χῶρος μέ ἐσωτερικό γινόμενο $(\cdot,\cdot)$, τότε ἡ συνάρτηση

$$||x|| \;=\; (x,x)^{1/2}\,,$$

ἀποτελεῖ νόρμα ἐπί τοῦ $X$, ὅπως μπορεῖ εὔκολα νά ἐξακριβωθεῖ. Ἡ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τήν *ἐπαγώμενη* ἀπό τό ἐσωτερικό γινόμενο νόρμα. Ἰσχύει δέ ὅτι

$$|(x,y)| \;\leq\; ||x||\cdot||y||\,,$$

γιά κάθε $x,\, y\in X$, πού ἀποτελεῖ τήν ἀνισότητα Cauchy-Schwartz. Ἔτσι λοιπόν ἕνας χῶρος μέ ἐσωτερικό γινόμενο καθίσταται αὐτόματα καί χῶρος μέ νόρμα.

**Ὁρισμός 2.8.4** *Ἔστω* $H$ *χῶρος μέ ἐσωτερικό γινόμενο. Ὁ* $H$ *ὀνομάζεται χῶρς Hilbert ἄν ἀποτελεῖ χῶρο Banach ὡς πρός τήν ἐπαγώμενη ἀπό τό ἐσωτερικό γινόμενο νόρμα.*

## Παραδείγματα χώρων Hilbert

1. Ὁ εὐκλείδειος χῶρος $\mathbb{R}^n$ μέ τό σύνηθες ἐσωτερικό γινόμενο.

2. Ὁ χῶρος $L^2(\Omega)$ μέ ἐσωτερικό γινόμενο

$$\int_\Omega f(x)\,g(x)\,dx\,,$$

ἀποτελεῖ τό χαρακτηριστικότερο ἴσως παράδειγμα. Τό σύνολο τῶν συνεχῶν συναρτήσεων πού συγχρόνως ἀνήκουν στό $L^2(\Omega)$, δέν ἀποτελοῦν χῶρο Hilbert ἀλλά πυκνό ὑποσύνολο τοῦ $L^2(\Omega)$, ὡς πρός τήν νόρμα τοῦ $L^2(\Omega)$.

3. Ἡ διακριτή ἐκδοχή τοῦ ἀνωτέρω, δηλαδή ὁ χῶρος $l^2(\mathbb{N})$ ἀποτελεῖ ἐπίσης χῶρο Hilbert μέ ἐσωτερικό γινόμενο

$$(\{\boldsymbol{u}\},\{\boldsymbol{v}\}) \;=\; \sum_{k=1}^{+\infty} u_k\, v_k\,.$$

Ἐπίσης:

Θεώρημα Ἀναπαραστάσεως Riesz, Lax-Milgram.

## Ἀσκήσεις 2.8

1. **Γενίκευση τύπου Leibniz** γιά πολλαπλές μερικές παραγώγους:

$$D^\alpha(fg) \;=\; \sum_{\beta+\gamma=\alpha} \frac{\alpha!}{\beta!\gamma!} D^\beta f\, D^\gamma g\,,$$

ὅπου $f,\ g \in C^{|\alpha|}$.

2. **Ἀνάπτυγμα Taylor** γιά πολυώνυμα πολλῶν μεταβλητῶν βαθμοῦ $m$:

$$P(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{|\alpha|\le m} \frac{1}{\alpha!} D^\alpha P(0) \boldsymbol{x}^\alpha\,.$$

ὅπου

$$P(\boldsymbol{x}) \;=\; \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha \boldsymbol{x}^\alpha\;,$$

$\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ καί $\boldsymbol{x}^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$

3. Πῶς γενικεύεται τό ἀνάπτυγμα Taylor γιά αὐθαίρετες συναρτήσεις πολλῶν μεταβλητῶν;

4. Ἔστω ὅτι ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\varphi\}_{n\in\mathbb{N}}$, ὅπου $\varphi_n : S \to \mathbb{R}$ καί $S$ μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$, συγκλίνει ὁμοιόμορφα στήν $\varphi$. Ἄν $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία σημείων στό $S$ συγκλίνουσα στό $t\in S$, δείξατε ὅτι

$$\lim_{n\to+\infty} \varphi_n(t_n) \;=\; \varphi(t)\,.$$

Ἰσχύει τό ἀνωτέρω συμπέρασμα ἄν ἡ σύγκλιση εἶναι κατά σημεῖο;

5. Ἔστω $S$ μή κενό ὑποσύνολο τοῦ $\mathbb{R}$ καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ὁμοιόμορφα συγκλίνουσα (ἐπί τοῦ $S$) ἀκολουθία συναρτήσεων μέ ὅριο τή συνάρτηση $\varphi$. Ἄν γιά κάθε $n\in\mathbb{N}$ τό ὅριο

$$\lim_{t\to\tau}\varphi_n(t) \;=\; l_n\,,$$

ἀποτελεῖ πραγματικό ἀριθμό, τότε τό ἴδιο συμβαίνει καί γιά τό ὅριο

$$\lim_{t\to\tau}\varphi(t) \;=\; l\,.$$

Ἐπί πλέον ἰσχύει ὅτι

$$\lim_{n\to+\infty}\left(\lim_{t\to\tau}\varphi_n(t)\right) \;=\; \lim_{t\to\tau}\left(\lim_{n\to+\infty}\varphi_n(t)\right)\,.$$

6. Δείξατε ὅτι ἡ ἀκολουθία

$$\varphi_n(t) \;=\; \sum_{k=0}^{n}\frac{t^k}{k!}\,,$$

συγκλίνει τοπικά ὁμοιόμορφα ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$.

7. Ἔστω $I$ ἀνοικτό διάστημα καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ τοπικά ὁμοιόμορφα συγκλίνουσα ἀκολουθία συναρτήσεων ἐπί τοῦ $I$. Ἄν $\tau\in I$ καί

$$\psi_n(t) \;=\; \int_{\tau}^{t}\varphi_n(s)ds\,,\quad t\in I\,,$$

τότε ἡ ἀκολουθία συναρτήσεων $\{\psi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, συγκλίνει ἐπίσης τοπικά ὁμοιόμορφα ἐπί τοῦ $I$ στήν

$$\psi(t) \;=\; \int_{\tau}^{t}\varphi(s)ds\,,\quad t\in I\,.$$

8. Πότε οἱ διπαραμετρική οἰκογένεια

$$X(s,t)\,,\quad Y(s,t)\,,\quad Z(s,t)\,,$$

ὅπου $(s,t)\in U$ ἀνοικτό καί $X,\,Y,\,Z\in C^1(U)$, ὁρίζει ἐπιφάζεια στόν $\mathbb{R}^3$;

9. Νά ἀποδειχθεῖ τό *Πόρισμα 2.6.4.*

# Κεφάλαιο 3

# Εἰσαγωγή στίς μερικές διαφορικές ἐξισώσεις

## 3.1 Ὀνοματολογία

*Μερική Διαφορική Ἐξίσωση* (ΜΔΕ) ἤ *Διαφορική Ἐξίσωση μέ Μερικές Παραγώγους*[1] , εἶναι μία ἐξίσωση τῆς μορφῆς:

$$F(\boldsymbol{x}, u, \nabla u, \ldots, \nabla^m u) \;=\; 0\,, \tag{3.1}$$

ὅπου ἡ $F$ ἀποτελεῖ συνεχῆ συνάρτηση τῶν ἀνεξαρτήτων μεταβλητῶν $(x_1, \ldots, x_n) = \boldsymbol{x}$, $n \geq 2$, τῆς *ζητούμενης συναρτήσεως* $u$ καθώς καί πεπερασμένου πλήθους μερικῶν αὐτῆς παραγώγων. Ἐδῶ

$$\nabla u \;=\; \left(\frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_n}\right)\,, \quad \nabla^2 u = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j}\right)_{i,j=1,\ldots,n}\,,$$

κ.ο.κ. .

*Τάξη* (*order*) μιᾶς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως ὀνομάζεται ἡ τάξη τῆς ὑψηλοτέρας τάξεως μερικῆς παραγώγου, τῆς ζητούμενης συναρτήσεως, πού ἐμφανίζεται στήν ἐξίσωση. Ἔτσι λοιπόν μιά μερική διαφο-

[1] Βλέπε ὑποσημείωση 6 στή σελίδα 2.

ρική ἐξίσωση δευτέρας τάξεως δύο μεταβλητῶν θά ἔχει τή μορφή

$$F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{xy}, u_{yy}) \;=\; 0\,.$$

*Λύση* τῆς (3.1) εἶναι μιά συνάρτηση $u$ ὁρισμένη σέ ἀνοικτή συνεκτική περιοχή $\Omega$ τῶν $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$, ὅπου τόσο ἡ $u$, ὅσο καί ὅλες οἱ μερικές της παράγωγοι πού ἐμφανίζονται στήν ἐξίσωση, εἶναι συνεχεῖς[2] καί ἱκανοποιοῦν τήν (3.1) στό $\Omega$.

Ἡ $F$ ἐνδέχεται νά εἶναι διανυσματική, δηλαδή $\boldsymbol{F} = (F_1, F_2, \ldots, F_p)$, ὁπότε ἔχουμε *σύστημα μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων*. Παρομοίως καί ἡ ζητούμενη συνάρτηση $u$ δύναται νά ἀποτελεῖ διάνυσμα.

Ἡ (3.1) ὀνομάζεται *γραμμική* ἄν ἡ $F$ εἶναι γραμμική ὡς πρός τή $u$ καί ὅλες τίς μερικές της παραγώγους, μέ συντελεστές ἐξαρτώμενους μόνο ἀπό τά $x_1$, $x_2, \ldots, x_n$. Ἡ γενική μορφή γραμμικῆς ἐξισώσεως πρώτης τάξεως εἶναι:

$$a_1(\boldsymbol{x})u_{x_1} + \ldots + a_n(\boldsymbol{x})u_{x_n} + b(\boldsymbol{x})u \;=\; c(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.2}$$

ὅπου τά $a_1, \ldots, a_n$, $b$ ἀποτελοῦν τούς *συντελεστές*, ἐνῶ ὁ $c$ εἶναι γνωστός ὡς ὁ *μή ὁμοιογενής ὅρος*. Εἰδικά στήν περίπτωση κατά τήν ὁποία $c \equiv 0$ (ἀντιστοίχως $c \not\equiv 0$) ἡ ἐξίσωση ὀνομάζεται *ὁμοιογενής*[3] (ἀντιστοίχως *μή ὁμοιογενής*.) Ἡ (3.2) γιά λόγους οἰκονομίας μπορεῖ νά

[2] Ὁ ὁρισμός ἐπιδέχεται γενικεύσεων ὅπου ἡ λύση δέν εἶναι κατ'ἀνάγκην τόσο ὁμαλή ὅσο ἀπαιτεῖ ἡ ἐξίσωση. Ἡ δέ ἱκανοποίηση τῆς ἐξισώσεως λαμβάνει χώραν μέσω ἀσθενέστερης διατυπώσεως, ἐνῶ οἱ λύσεις ὀνομάζονται *ἀσθενεῖς λύσεις*. Χαρακτηριστικό τέτοιο παράδειγμα ἀποτελοῦν τά *κύματα κρούσεως*, πού ἀποτελοῦν ἀσυνεχεῖς ἀσθενεῖς λύσεις μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων.

[3] Σχεδόν στό σύνολο τῆς ἑλληνικῆς βιβλιογραφίας τῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων χρησιμοποιεῖται ὁ ὅρος «*ὁμογενής*» (ἤτοι : ὁ ἔχων τό ἴδιον γένος) ἀντί τοῦ ὅρου «*ὁμοιογενής*» (ἤτοι : ὁ ἔχων ὅμοιον γένος). Ὁ ὅρος αὐτός ἀποτελεῖ ἀπόδοση τοῦ διεθνοῦς ὅρου *homogeneous*. Παρά τό γεγονός ὅτι δέν ἀποτελεῖ στόχο τῶν σημειώσεων αὐτῶν ἡ εἰς βάθος ἀναθεώρηση τῆς ὁρολογίας, κάποιες μικρές τροποποιήσεις πού ἀποδίδουν ἐπιτυχέστερα τίς ἔννοιες, τίς καθιστοῦν εὐληπτότερες καί περιορίζουν τίς συγχύσεις, εἶναι ἀπαραίτητες. Στή συγκεκριμένη περίπτωση ἀξίζει νά ἀναφερθεῖ ὅτι ὁ ὅρος *ὁμογενής* ἐμφανίζεται μέ μαθηματικά συμφραζόμενα στά *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου, ὅπου ὁμιλεῖ περί λόγων ὁμογενῶν μεγεθῶν (μῆκος ἀνά μῆκος, ἐμβαδόν ἀνά ἐμβαδόν, ὄγκος

γραφεῖ καί ὡς

$$\mathcal{L}u \;=\; c(\boldsymbol{x})\,,$$

ὅπου τό σύμβολο $\mathcal{L}$ ἀποτελεῖ ἕνα *Γραμμικό Μερικό Διαφορικό Τελεστή* (*Operator*), πρώτης τάξεως καί γράφεται ὡς

$$\mathcal{L} \;=\; a_1(\boldsymbol{x})D_{x_1} + \ldots + a_n(\boldsymbol{x})D_{x_n} + b(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.3}$$

ὅπου $D_{x_k} = \partial/\partial_{x_k}$, $k = 1,\ldots,n$. Ὁ ἀνωτέρω τελεστής ὀνομάζεται γραμμικός διότι ἱκανοποιεῖ τή σχέση

$$\mathcal{L}(c_1u_1 + c_2u_2) \;=\; c_1\mathcal{L}u_1 + c_2\mathcal{L}u_2\ ,$$

γιά κάθε συναρτήσεις $u_1$, $u_2$, συνεχῶς διαφορίσιμες καί $c_1$, $c_2$ πραγματικές σταθερές. Ὡς ἐκ τούτου ὁ χῶρος τῶν λύσεων τῆς $\mathcal{L}u = 0$ ἀποτελεῖ γραμμικό χῶρο καί συγκεκριμένα τόν *Μηδενικό Χῶρο* τοῦ $\mathcal{L}$, συμβολικά: $N(\mathcal{L})$.

Μιά μερική διαφορική ἐξίσωση $m$-στῆς τάξεως ὀνομάζεται *οἱονεί γραμμική (quasi-linear)*, ἄν ἡ συνάρτηση $F$ εἶναι γραμμική ὡς πρός τίς μερικές παραγώγους τάξεως $m$ μέ συντελεστές ἐξαρτώμενους ἀπό τά $x_1,\ldots,x_n$, καθώς καί τίς παραγώγους τάξεως μικρότερης τοῦ $m$. Ἔτσι λοιπόν, ἡ γενικότερη μορφή οἱονεί γραμμικῆς ἐξισώσεως πρώτης τάξεως εἶναι:

$$a_1(\boldsymbol{x},u)u_{x_1} + \ldots + a_n(\boldsymbol{x},u)u_{x_n} \;=\; c(\boldsymbol{x},u)\,.$$

ἀνά ὄγκο.) Ἐνῶ τό *ὅμοιο* ὡς πρόθεμα ἤ ἐπίθετο, γιά παράδειγμα στήν περίπτωση τῆς *ὁμοιότητος τριγώνων*, σημαίνει ὅτι τά τρίγωνα αὐτά ἔχουν σταθερούς λόγους ἀντιστοίχων πλευρῶν. Γενικότερα δύο γεωμετρικά σχήματα καλοῦνται ὅμοια ἄν τό ἕνα ἀποτελεῖ σμίκρυνση ἤ μεγέθυνση τοῦ ἄλλου. Οἱ ἐξισώσεις περί ὧν ὁ λόγος, χαρακτηρίζονται ἀπό τήν ἰδιότητα: *ὁποτεδήποτε ἡ $\varphi$ ἀποτελεῖ λύση αὐτῶν καί $c$ σταθερά, τότε καί ἡ $c\varphi$ ἀποτελεῖ ἐπίσης λύση.* Ἡ $c\varphi$ ὅμως ἀποτελεῖ *μεγέθυνση* (ἤ *σμίκρυνση*) τῆς $\varphi$. Ὡς ἐκ τούτου, γιά κάθε συνάρτηση πού περιέχει ὁ χῶρος λύσεων τῶν ἐξισώσεών μας, περιέχει καί ὅλες τίς *ὅμοιές* της. Τέλος ἀναφέρομε ὅτι ὁ ὅρος **homogeneous**, ὁ ὁποῖος ἐμφανίζεται καί στή Χημεία ὡς χαρακτηρισμός μειγμάτων καί γενικότερα ὑλικῶν, ἔχει ἀποδοθεῖ ἀπό τούς Ἕλληνες χημικούς ὡς *ὁμοιογενής*. Συνεπῶς, λόγω τῶν ἀνωτέρω γίνεται ἡ χρήση τοῦ ὅρου ὁμοιογενής στό ἀνά χεῖρας ἐγχειρίδιο.

Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι μιά μή γραμμική ἐξίσωση τάξεως $m$, καθίσταται οἱονεί γραμμική τάξεως $m+1$, μέσω διαφορίσεως ὡς πρός οἱοδήποτε γραμμικό τελεστή πρώτης τάξεως. [Βλέπε ἄσκηση 2 στή σελίδα 42.]

Ἕνας γραμμικός μερικός διαφορικός τελεστής $m$-ῆς τάξεως γράφεται, μέσω τοῦ συμβολισμοῦ Laurent Schwartz, ὡς:

$$\mathcal{L} \;=\; \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(\boldsymbol{x}) D^\alpha \,.$$

Ἔτσι, ἡ γενικότερη μορφή[4] γραμμικῆς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως $m$-ῆς τάξεως, εἶναι

$$\mathcal{L}u \;=\; \sum_{|\alpha|\le m} c_\alpha(\boldsymbol{x}) D^\alpha u \;=\; d(\boldsymbol{x})\,, \tag{3.4}$$

ὅπου $d(\boldsymbol{x})$ ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος. Ἡ δέ οἱονεί γραμμική $m$-ῆς τάξεως, γράφεται κατ'ἀναλογία ὡς

$$\sum_{|\alpha|=m} c_\alpha D^\alpha u \;=\; d\,,$$

ὅπου τώρα τά $c_\alpha$, $|\boldsymbol{\alpha}| = m$ καί $d$ ἐξαρτῶνται ἀπό τά $\boldsymbol{x}$ καί $D^\beta u$, $|\beta| \le m-1$.

## 3.2 Διάσημα παραδείγματα μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων

Οἱ μερικές διαφορικές ἐξισώσεις ἐμφανίζονται σέ πολλούς κλάδους τῶν Μαθηματικῶν, ἰδιαιτέρως σέ κλάδους τῆς μαθηματικῆς ἀναλύσεως καί τῆς γεωμετρίας. Ἐμφανίζονται ὅμως καί σέ πλεῖστες ἄλλες ἐπιστῆμες ὅπως στή Στατιστική, στά Οἰκονομικά[5] στή Φυσική, Χημεία, Βιολογία, Μηχανολογία καθώς καί στήν Κοινωνιολογία. Ἀναφέρουμε πιό

[4] Ἀκόμη γενικότερη μορφή εἶναι αὐτή στήν ὁποία τά $u$ καί $d$ ἀποτελοῦν διανύσματα, ἐνῶ τά $c_\alpha$ πίνακες.

[5] Εἶναι χαρακτηριστικό ὅτι τό βραβεῖο Νόμπελ στά οἰκονομικά γιά τό 1997 δόθηκε γιά τή μελέτη τῆς ἐξίσωσεως **Black-Scholes**, ἐξίσωση παραβολικοῦ τύπου, ἡ ὁποία περιγράφει τήν ἀξία τῶν *προαιρετικῶν δικαιωμάτων* (***options***).

κάτω μερικά χαρακτηριστικά παραδείγματα, σέ κάποια ἀπό τά ὁποῖα θά ἐπικεντρωθεῖ τό ἐνδιαφέρον μας.

1. Ἡ *ἐξίσωση Laplace*, ἡ ὁποία στίς δύο διαστάσεις περιγράφει τό δυναμικό ἀστρόβιλης διδιάστατης ροῆς, ἐνῶ στίς δύο καί τρεῖς διαστάσεις κατανομή ἠλεκτρικοῦ ἤ μαγνητικοῦ δυναμικοῦ ἤ στατική κατανομή θερμοκρασιῶν:

   $$\Delta u \;=\; 0\,,$$

   ὅπου ὁ *τελεστής*

   $$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\,,$$

   εἶναι γνωστός ὡς *τελεστής Laplace*. Οἱ λύσεις τῆς ἀνωτέρω εἶναι γνωστές ὡς *ἁρμονικές* συναρτήσεις. Τέτοιες, ὡς γνωστόν στίς δύο διαστάσεις, εἶναι τά πραγματικά καί φανταστικά μέρη τῶν ἀναλυτικῶν συναρτήσεων. Ἡ μή ὁμοιογενής ἐκδοχή τῆς ἀνωτέρω, γνωστή ὡς *ἐξίσωση Poisson*

   $$\Delta u \;=\; f\,,$$

   περιγράφει τήν κατανομή δυναμικοῦ παρουσίᾳ φορτίου ἐξωτερικῆς πηγῆς $f$, τόσο στίς δύο ὅσο καί στίς τρεῖς διαστάσεις.

2. Ἡ *ἐξίσωση θερμότητας*

   $$u_t \;=\; \kappa \Delta u\,,$$

   πού περιγράφει τήν ἐξέλιξη τῆς θερμοκρασίας σέ ὁμοιογενές μέσο καθώς καί φαινόμενα διαχύσεως. Ἡ συνάρτηση $u$ ἀντιπροσωπεύει τή θερμοκρασία, ἐνῶ ἡ σταθερά $\kappa$ ὀνομάζεται *σταθερά θερμικῆς ἀγωγιμότητος*. Κατ'ἀναλογία μέ τήν ἐξίσωση κύματος, ἔχει καί αὐτή ἔννοια στίς χωρικές διαστάσεις ἕνα, δύο καί τρία. Ἡ μή ὁμοιογενής ἐκδοχή αὐτῆς

   $$u_t \;=\; \kappa \Delta u + f\,,$$

   περιγράφει τήν περίπτωση παρουσίας ἐξωτερικῆς παροχῆς θερμότητος.

3. Ἡ *ἐξίσωση κύματος*

$$u_{tt} \,=\, c^2 \Delta u\,,$$

ἡ ὁποία στίς τρεῖς διαστάσεις περιγράφει τή διάδοση τοῦ ἤχου στόν ἀέρα, ἐνῶ στίς δύο διαστάσεις τήν παλλόμενη μεμβράνη. Ἔχει ἔννοια καί στή μονοδιάστατη ἐκδοχή:

$$u_{tt} \,=\, c^2 u_{xx}\,,$$

ἡ ὁποία περιγράφει τήν ἀπομάκρυνση παλλόμενης χορδῆς.

4. Ἡ *διαρμονική ἐξίσωση*

$$\Delta^2 u \,=\, 0\,,$$

πού περιγράφει τή θέση πακτωμένης μεμβράνης ἤ τό δυναμικό τῆς ἄχρονης ροῆς Stokes. Ἡ διαρμονική διατυποῦται καί στή μή ὁμοιογενῆ της ἐκδοχή ὡς

$$\Delta^2 u \,=\, f\,,$$

ὅπου $f$ ἀποτελεῖ τήν ἐξωτερική δύναμη.

5. Ἡ *ἐξίσωση Burger*

$$u_t + u u_x \,=\, 0\,, \tag{3.5}$$

ἀποτελεῖ τό ἁπλούστερο μοντέλο περιγραφῆς τῶν *κυμάτων κρούσεως* (*shock waves*). Εἶναι ἐπίσης ἡ ἁπλούστερη ἴσως ἐξίσωση μέ λύσεις πού καθίστανται ἀσυνεχεῖς μετά ἀπό πεπερασμένο χρόνο, ἀνεξαρτήτως τοῦ πόσο ὁμαλές εἶναι οἱ ἀρχικές συνθῆκες. Ἀξίζει νά σημειωθεῖ ὅτι, ἐπειδή οἱ λύσεις μέ ἀσυνέχειες πράγματι ἔχουν φυσική σημασία, εἴμαστε ὑποχρεωμένοι νά ὁρίσουμε καί *ἀσθενεῖς λύσεις* τῆς ἀνωτέρω ἐξισώσεως. Ἤτοι, λύσεις πού ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση ὑπό ἀσθενέστερη ἔννοια (ἡ ὁποία θά ἐξηγηθεῖ ἀργότερα) καί δέν ἀπαιτεῖται νά εἶναι διαφορίσιμες. Ἡ (3.5) ἀποτελεῖ ἐπίσης κατάλληλο μοντέλο μελέτης ἀριθμητικῶν μεθόδων προσεγγιζουσῶν λύσεις μέ ἀσυνέχειες.

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει καί ἡ *ἰξώδης Burger*

$$u_t + uu_x \,=\, \varepsilon u_{xx} \,,$$

ὅπου ἡ θετική σταθερά $\varepsilon$ ἀντιπροσωπεύει τό *ἰξῶδες* (*viscosity.*) Οἱ λύσεις τῆς ἰξώδους Burger προσεγγίζουν, ὡς πρός κατάλληλη νόρμα, τίς λύσεις τῆς (3.5) καθώς $\varepsilon \searrow 0$ καί εἶναι πάντα ὁμαλές.

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζει καί ἡ ἐκδοχή τῆς (3.5) μέ διασπορά, γνωστή ὡς *ἐξίσωση Korteweg-deVries*

$$u_t + uu_x \,=\, \varepsilon u_{xxx} \,,$$

πού περιγράφει φαινόμενα ἐπιφανειακῆς τάσεως στήν Ὑδροδυναμική.

6. Ἡ *ἐξίσωση ἐλαχίστων ἐπιφανειῶν*

$$(1+u_y^2)u_{xx} - 2u_x u_u u_{xy} + (1+u_x^2)u_{yy} \,=\, 0 \,,$$

ἡ ὁποία περιγράφει τήν ἐπιφάνεια ἐλαχίστου ἐμβαδοῦ στόν $\mathbb{R}^3$, ὅταν δίδεται τό σύνορο αὐτῆς. Παρατηρεῖστε ὅτι ἡ ἀνωτέρω ἀποτελεῖ οἱονεί γραμμική ἐξίσωση δευτέρας τάξεως δύο μεταβλητῶν.

7. Ἡ συνάρτηση δυναμικοῦ ταχυτήτων $\varphi = \varphi(x,y)$, διδιάστατης ἄχρονης, ἀδιαβατικῆς, ἀστρόβιλης, ἰσεντροπικῆς ροῆς ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$(1 - c^{-2}\varphi_x^2)\varphi_{xx} - 2c^{-2}\varphi_x\varphi_y\varphi_{xy} + (1 - c^{-2}\varphi_y^2)\varphi_{yy} \,=\, 0 \,, \qquad (3.6)$$

ὅπου $c$ γνωστή συνάρτηση τοῦ μέτρου τῆς ταχύτητος $v = |\nabla\varphi|$. Γιά παράδειγμα στήν περίπτωση τῶν πολυτροπικῶν ἀερίων ἔχουμε

$$c^2 \,=\, 1 - \frac{\gamma - 1}{2} q^2 \,,$$

μέ $\gamma$ τήν ἀδιαβατική σταθερά $p = A\rho^\gamma$. Παρατηρεῖστε ὅτι ἡ (3.6) παρέχει τήν ἐξίσωση Laplace γιά $|\nabla\varphi| << 1$.

8. Στήν περιοχή τῶν *Χρηματοοικονομικῶν Παραγώγων*, ἡ διασημότερη μερική διαφορική ἐξίσωση, εἶναι ἡ *ἐξίσωση Black-Scholes* (1973)
$$f_t + rSf_S + \frac{1}{2}\sigma^2 S^2 f_{SS} \;=\; rf\,,$$
ἡ ὁποία τιμολογεῖ τά *Προαιρετικά Δικαιώματα.* (*Options*).

9. Τέλος θά ἦταν παράλειψη ἡ μή ἀναφορά τῶν *ἐξισώσεων Navier-Stokes*
$$\frac{\partial u_i}{\partial t} + \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} u_k \;=\; -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \gamma \Delta u_i \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$\nabla \cdot \boldsymbol{u} \;=\; \sum_{k=1,\ldots,n} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \;=\; 0\,,$$
πού περιγράφουν τή ροή ἰξώδους, μή συμπιεστοῦ ὑγροῦ, συνδέοντας τήν ταχύτητα $\boldsymbol{u} = (u_1, \ldots, u_n)$, $n = 2$ ἤ $3$, μέ τήν πίεση $p$. Ὅπου $\gamma$ τό κινηματικό ἰξῶδες καί $\rho$ ἡ σταθερή πυκνότης τοῦ ὑγροῦ.

## 3.3 Πῶς ἐπιλύονται ἁπλές μερικές διαφορικές ἐξισώσεις

Ἄς δοῦμε πῶς ἐπιλύονται κάποιες περιπτώσεις ἁπλῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων χωρίς τή χρήση πολύπλοκης μεθοδολογίας.

**Παραδείγματα**

1. *Ποιές $u = u(x, y)$ οἱ ὁποῖες ἱκανοποιοῦν τήν ἐξίσωση $u_x \;=\; 0$;*

   Ὁλοκληρώντας ὡς πρός $x$ λαμβάνουμε $u(x, y) \;=\; f(y)$ διότι ἡ $u$ εἶναι σταθερά ὡς πρός $x$. Ἄρα λύση τῆς $u_x = 0$, ἀποτελεῖ κάθε συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση ἐξαρτώμενη μόνο ἀπό τό $y$.

2. *Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως* $u_{xy} = 0$.

   Ὁλοκληρώνοντας ὡς πρός $x$ λαμβάνουμε $u_y = g_1(y)$. Τέλος ὁλοκληρώνοντας ὡς πρός $y$ λαμβάνουμε $u = g(y) + f(x)$, ὅπου $f$, $g \in C^1$.

3. *Νά βρεθεῖ συνάρτηση u ὥστε:*

$$u_{xx} = \alpha \quad u_{xy} = \beta \quad \textit{καί} \quad u_{yy} = \gamma\,,$$

   *ὅπου* $\alpha$, $\beta$, *καί* $\gamma$ *σταθερές.*

   Ἔχουμε

$$\begin{aligned} u_{xx} = \alpha \iff & u_x = \alpha x + g_1(y) \\ \iff & u = \frac{1}{2}\alpha x^2 + g_1(y)x + g_2(y)\,. \end{aligned}$$

   Ὅμως $\beta = u_{xy} = g_1'(y)$. Ἄρα

$$g_1(y) = \beta y + c_1\,,$$

   ἐνῶ

$$\gamma = u_{yy} = g_2''(y)\,.$$

   Ἔτσι λοιπόν

$$g_2(y) = \frac{1}{2}\gamma y^2 + c_2 y + c_3\,.$$

   Ὁπότε ἐν τέλει ἡ λύση εἶναι τῆς μορφῆς:

$$u = \frac{1}{2}\alpha x^2 + \beta xy + \frac{1}{2}\gamma y^2 + c_1 x + c_2 y + c_3\,.$$

4. *Νά ἐπιλυθεῖ ἡ ἐξίσωση* $u_{xx} = u$ *ὅπου* $u = u(x, y)$ .

   Ἔχουμε καί ἐδῶ μιά συνήθη διαφορική ἐξίσωση. Ἡ λύση τῆς εἶναι $c_1 e^x + c_2 e^{-x}$ καί ἐπειδή οἱ σταθερές ἀποτελοῦν ἐν γένει συναρτήσεις τοῦ $y$, τελικῶς ἔχουμε

$$u(x, y) = f(y)e^x + g(y)e^{-x} .$$

## 3.4 Ἀρχικές καί συνοριακές συνθῆκες

Οἱ διαφορικές ἐξισώσεις - συνήθεις καί μερικές - ἔχουν ἐν γένει ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις. Προσθήκη ἐπιπλέον συνθηκῶν μέ φυσική σημασία, δυνατόν νά τίς περιορίσει τίς λύσεις, σέ μία. Μιά τέτοια κατηγορία περιορισμῶν εἶναι οἱ *Συνοριακές Συνθῆκες*. Ὁ συνδυασμός μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως καί συνοριακῶν συνθηκῶν ἀποτελεῖ τό *Πρόβλημα Συνοριακῶν Τιμῶν (ΠΣΤ)*.

*Τί μορφή ἔχουν συνήθως οἱ συνοριακές συνθήκες;*

Στήν περίπτωση τῆς ἐξισώσεως Laplace ἤ γενικότερα τῆς ἐξισώσεως Poisson, $\Delta u = f$, τό πρόβλημα συνοριακῶν τιμῶν ἀπαιτεῖ ἱκανοποίηση τῆς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως στό $\Omega$ καθώς καί ἱκανοποίηση μιᾶς ἀπό τίς πιό κάτω συνθῆκες:

1. Ἄν ἐπί τοῦ $\partial\Omega$ δίδεται τό $u$ τότε ἔχουμε *συνοριακή συνθήκη Dirichlet*.

2. Ἄν ἐπί τοῦ $\partial\Omega$ δίδεται τό $\partial u/\partial \nu$, δηλαδή ἡ παράγωγος τῆς $u$ μέ κατεύθυνση ἐξωτερική κάθετο πρός τό σύνορο, τότε ἔχουμε *συνοριακή συνθήκη Neumann*.

3. Ἄν ἐπί τοῦ $\partial\Omega$ δίδεται γραμμικός συνδυασμός τῶν $u$ καί $\partial u/\partial \nu$, δηλαδή

$$g = \alpha u + \beta \partial u/\partial \nu ,$$

   μέ $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, τότε ἔχουμε *συνθήκη Robin*.

Ἡ ἱκανοποίηση τῆς ἐξισώσεως Laplace μέ συνοριακές συνθῆκες Dirichlet ἀπό τήν $u$, προϋποθέτει ὅτι $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Στήν περίπτωση τῶν προβλημάτων Neumann καί Robin, προϋποτίθεται ὅτι $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega})$ καί ἐπί πλέον προϋποθέτουν ὅτι τό σύνορο τοῦ $\Omega$ εἶναι $C^1$.

Μιά ἄλλη κατηγορία συνθηκῶν πού συνοδεύουν τίς μερικές διαφορικές ἐξισώσεις, ὥστε νά ἐξασφαλισθεῖ μοναδικότητα τῶν λύσεων, εἶναι οἱ *Ἀρχικές Συνθῆκες*. Αὐτές εἶναι οἱ συνθῆκες πού περιγράφουν τίς τιμές ζητούμενης συναρτήσεως σέ συγκεκριμένο χρονικό σημεῖο, τόν ἀρχικό συνήθως χρόνο (γιά προβλήματα πού περιέχουν τό χρόνο.) Οἱ ἀρχικές συνθῆκες λοιπόν, συνοδεύουν τά προβλήματα στά ὁποῖα ὑπεισέρχεται ὁ χρόνος. Αὐτά τά προβλήματα ὀνομάζονται *Ἐξελικτικές Διαδικασίες*. Ὁ συνδυασμός μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων καί ἀρχικῶν τιμῶν μᾶς δίδουν τά *Προβλήματα Ἀρχικῶν Τιμῶν (ΠΑΤ)*.

**Παραδείγματα**

1. Στήν περίπτωση τῆς ἐξίσωσεως τῆς θερμότητας, συνήθης διατύπωση προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν εἶναι

$$\begin{cases} u_t \;=\; \kappa \Delta u \,, x \in \mathbb{R}^n, \;\; t > 0 \,, \\[2ex] u(x,0) \;=\; u_0(x) \,. \end{cases}$$

   Ἡ συνάρτηση $u_0$ ἀποτελεῖ τήν κατανομή θερμοκρασίας κατά τή χρονική στιγμή $t = 0$.

2. Γιά τήν ἐξίσωση κύματος, ἔχουμε τήν ἑξῆς μορφή προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν:

$$\begin{cases} u_{tt} \;=\; c^2 \Delta u \,, x \in \mathbb{R}^n, \;\; t > 0 \,, \\[2ex] u(x,0) \;=\; f(x) \,, \;\; u_t(x,0) = g(x) \,. \end{cases}$$

   Ἐδῶ ἔχουμε δύο ἀρχικά δεδομένα. Τήν ἀρχική ἀπομάκρυνση ἀπό τή θέση ἰσορροπίας $f$ καί τόν ἀρχικό ρυθμό μεταβολῆς τῆς ἀπομακρύνσεως $g$.

Ὑπάρχουν βεβαίως καί ἄλλα εἴδη συνθηκῶν πού ἐξασφαλίζουν τή μοναδικότητα. Ἕνα τέτοιο παράδειγμα εἶναι ὁ συνδυασμός ἀρχικῶν καί συνοριακῶν συνθηκῶν, ὅπως φαίνεται στό πιό κάτω πρόβλημα *ἀρχικῶν/συνοριακῶν τιμῶν*:

$$\begin{cases} u_t = \kappa u_{xx}, \ t > 0 \\ \\ u(x,0) = f(x), \ x \in (0,1)\,, \\ \\ u(0,t) = u(1,t) = 0, \ t > 0\,, \end{cases}$$

γιά τή μονοδιάστατη ἐξίσωση θερμότητος.

## 3.5 Ταξινόμηση τῶν ἐξισώσεων δευτέρας τάξεως

Τό μεγαλύτερο μέρος τῆς βιβλιογραφίας τῶν μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων ἀσχολεῖται μέ ἐξισώσεις δευτέρας τάξεως. Αὐτές στήν γραμμική τους ἐκδοχή, δύο μεταβλητῶν γράφονται ὡς:

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + du_x + eu_y + fu + g \ = \ 0\,, \tag{3.7}$$

ὅπου οἱ *συντελεστές* $a$, $b$, $c$, $d$, $e$, $f$ καί ὁ *μή ὁμοιογενής ὅρος* $g$ εἶναι συνεχεῖς συναρτήσεις τῶν $x$ καί $y$. Ὁρίζουμε ὡς $\Delta = b^2 - 4ac$ τή διακρίνουσα τῆς (3.7). Ἔχουμε τήν ἑξῆς ταξινόμηση:

1. Ἄν $\Delta < 0$ τότε λέγεται ὅτι ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι *ἐλλειπτική*.
2. Ἄν $\Delta = 0$ τότε λέγεται ὅτι ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι *παραβολική*.
3. Ἄν $\Delta < 0$ τότε λέγεται ὅτι ἡ ἐξίσωσή μας εἶναι *ὑπερβολική*.

Ἡ ἀνωτέρω ταξινόμηση ἔχει ἔννοια ἀκόμη καί στήν περίπτωση τῶν οἱονεί γραμμικῶν ἐξισώσεων

$$au_{xx} + bu_{xy} + cu_{yy} + d \ = \ 0\,,$$

ὅπου τά $a$, $b$, $c$ καί $d$ εἶναι συναρτήσεις τῶν $x$, $y$, $u$, $u_x$ καί $u_y$.

**Παραδείγματα**

1. Ἡ ἐξίσωση Laplace

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0,$$

ἀποτελεῖ τό κλασσικότερο παράδειγμα ἐλλειπτικῆς ἐξισώσεως.

2. Ἡ ἐξίσωση θερμότητας

$$u_t = \kappa u_{xx},$$

εἶναι παραβολική. Ἀποτελεῖ δέ τό χαρακτηριστικότερο παράδειγμα παραβολικῆς ἐξισώσεως.

3. Τό δέ κλασσικότερο παράδειγμα ὑπερβολικῆς ἐξισώσεως ἀποτελεῖ ἡ ἐξίσωση κύματος

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}.$$

4. Ὑπάρχει ὅμως καί τό ἐνδεχόμενο ἡ ταξινόμηση νά ἐξαρτᾶται ἀπό τίς ἐλεύθερες μεταβλητές. Ἔστω ἡ ἐξίσωση

$$(x^2 - 1)u_{xx} - 2yu_{xy} - u_{yy} = 0 \tag{3.8}$$

ὁπότε

$$\mathit{\Delta} = 4(x^2 + y^2 - 1).$$

Προκύπτουν λοιπόν τά ἑξῆς ὑποσύνολα τοῦ $\mathbb{R}^2$:

$C_1 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$ ὅπου ἡ (3.8) εἶναι ἐλλειπτική.
$C_2 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ ὅπου ἡ (3.8) εἶναι παραβολική.
$C_3 = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 > 1\}$ ὅπου ἡ (3.8) εἶναι ὑπερβολική.

Σημειωτέον ὅτι στίς οἱονεί γραμμικές ἐξισώσεις, ἡ ταξινόμηση ἐνδέχεται νά ἐξαρτᾶται καί ἀπό τίς τιμές τῆς λύσεως.

### Ἀσκήσεις 3.5

1. Ποιά ἡ γενικότερη δυνατή μορφή οἱονεί γραμμικῆς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως δευτέρας τάξεως;

2. Πῶς μιά μή γραμμική ἐξίσωση καθίσταται οἱονεί γραμμική μέσω μιᾶς παραγωγίσεως;

3. Ποιές συναρτήσεις $u = u(x, y)$ ἱκανοποιοῦν τήν $u_{xx} + u = 0$;

4. Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως $u_{xyz} = 0$ δοθέντος ὅτι $u = u(x, y, z)$.

5. Νά βρεθεῖ ἡ γενική λύση τῆς ἐξισώσεως $u_{xxyy} = 0$ δοθέντος ὅτι $u = u(x, y)$.

# Κεφάλαιο 4

# Θεωρία κατανομῶν

## 4.1 Κατανομές καί ἀσθενεῖς λύσεις

Στήν περίπτωση τοῦ *προβλήματος συνοριακῶν τιμῶν Dirichlet* [1]:

$$\begin{cases} Lu = f \quad \text{στό} \qquad \Omega \\ \\ \partial^\beta u = 0 \quad \text{ἐπί τοῦ} \quad \partial\Omega \quad \text{γιά κάθε} \quad |\beta| < m \ , \end{cases} \tag{4.1}$$

ἰσχύει ἡ ἑξῆς συνέπεια τοῦ τῆς (2.12):

$$\int_\Omega f\, v\, dx \ = \ \int_\Omega u\, L^* v\, dx\,, \tag{4.2}$$

γιά κάθε $v \in C_0^m(\Omega)$. Ὁ πιό πάνω τύπος ὁρίζει τίς ἀσθενεῖς λύσεις τῆς ἐξισώσεως $Lu = f$.

Συγκεχριμένα: *Μιά τοπικά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση $u$ ὀνομάζεται ἀσθενής λύση τῆς ἐξισώσεως $Lu = f$ ἄν ἱκανοποιεῖ τήν (4.2) γιά κάθε $v \in C_0^m(\Omega)$.*

---

[1] Ἰσοδύναμα γράφεται ὡς

$$\begin{cases} Lu = f \quad \text{στό} \qquad \Omega \\ \\ \partial_\nu^k u = 0 \quad \text{ἐπί τοῦ} \quad \partial\Omega \quad \text{γιά κάθε} \quad k < m \ . \end{cases}$$

ὅπου $\partial_\nu = \partial/\partial\nu$.

Ἡ ἔννοια τῆς ἀσθενοῦς λύσεως, στήν ὁποία θά ἐπανέλθουμε, γενικεύεται στήν ἔννοια τῆς *λύσεως κατανομῆς*, ἡ ὁποία δέν εἶναι ἀπαραίτητα συνάρτηση, ἀλλά γραμμικό συναρτησοειδές. Γιά νά ὁρίσουμε τίς *γενικευμένες* αὐτές *συναρτήσεις* ξεκινοῦμε ἀπό τήν περίπτωση ὅπου πράγματι αὐτές εἶναι συναρτήσεις.

Ἔστω $f \in L^1_{loc}(\Omega)$, τότε ὁρίζεται ἡ γραμμική ἀπεικόνιση

$$f[\varphi] \;=\; \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx\,, \tag{4.3}$$

γιά κάθε $\varphi \in \mathcal{D} = C_0^\infty(\Omega)$. Τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα ὁρίζει ἕνα *γραμμικό συναρτησοειδές*, ἤτοι μιά γραμμική ἀπεικόνιση ἀπό τό σύνολο τῶν *συναρτήσεων δοκιμῆς* $\mathcal{D}$, στό σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἄν ἡ $f$ εἶναι συνεχής τότε οἱ τιμές τοῦ συναρτησοειδοῦς $f[\varphi]$, στίς διάφορες συναρτήσεις δοκιμῆς, ὁρίζουν μονοσήμαντα τήν $f$. (Πῶς;) Ἄν τώρα ἡ $f$ ἦταν συνεχῶς διαφορίσιμη τότε γιά κάθε συνάρτηση δοκιμῆς θά εἴχαμε ὅτι

$$\int_\Omega f(x)\,D_{x_k}\varphi(x)\,dx \;=\; -\int_\Omega D_{x_k}f(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Ἡ ἀνωτέρω παρατήρηση μᾶς ἐπιτρέπει νά ὁρίσουμε τή παράγωγο οἱουδήποτε συναρτησοειδοῦς. Ἔστω $f:\mathcal{D}\to\mathbb{R}$ γραμμικό συναρτησοειδές, ὁρίζουμε τήν μερική του παράγωγο $\partial_{x_k} f$, ὡς τό συναρτησοειδές πού δίδεται ἀπό τό δεξιό μέλος τῆς

$$D_{x_k}f[\varphi] \;=\; -f[D_{x_k}\varphi]\,,$$

γιά $\varphi \in \mathcal{D}$. Τά γραμμικά συναρτησοειδῆ ἐπί τοῦ $\mathcal{D}$, δηλαδή τό σύνολο ὅλων τῶν γραμμικῶν συναρτήσεων ἀπό τό $\mathcal{D}$ στό $\mathbb{R}$, ἀποτελοῦν σύνολο πολύ μεγαλύτερο ἀπ'ὅτι χρειαζόμαστε. Ἕνας εἰδικός ὑπόχωρος, ἐφοδιασμένος μέ τοπολογικές ἰδιότητες[2], εἶναι ὁ χῶρος τῶν κατανομῶν:

[2] Ὁ χῶρος $\mathcal{D} = C_0^\infty(\Omega)$ ἐφοδιάζεται μέ δομή *Γραμμικοῦ Τοπολογικοῦ Χῶρου* μέ βάση περιοχῶν τοῦ μηδενός ἀποτελούμενη ἀπό τά σύνολα $U_N$, $N \in \mathbb{N}$ ὅπου

$$U_N \;=\; \{\varphi \in \mathcal{D}\,|\,\mathrm{supp}\varphi \subseteq K_N \text{ καί } |\partial^\alpha\varphi(x)| < 1/N \text{ γιά κάθε } |\alpha| \le N\}\,,$$

ὅπου $K_N$, $N \in \mathbb{N}$, συμπαγῆ ὑποσύνολα τοῦ $\Omega$ γιά τά ὁποῖα $\cup_{N\in\mathbb{N}} K_N = \Omega$ καί $K_N \subset K_{N+1}$ γιά κάθε $N \in \mathbb{N}$, ἐνῶ $\mathrm{supp}\varphi$, *ὁ φορέας τῆς* $\varphi$, πού ὁρίζεται ὡς ἡ κλειστή θήκη τοῦ ὑποσυνόλου τοῦ $\Omega$ στό ὁποῖο ἡ $\varphi$ δέ μηδενίζεται. Ὁ $\mathcal{D}$ καθίσταται, μέ τήν ἀνωτέρω δομή, *Χῶρος Fréchet* (ἤτοι: Τοπικά κυρτός καί πλήρης ὡς πρός ἀναλλοίωτη μετρική.)

**῾Ορισμός 4.1.1** *Κατανομή (distribution) ἐπί τοῦ $\Omega$ εἶναι ἕνα γραμμικό συναρτησοειδές*

$$f \, : \, \mathcal{D} = C_0^\infty(\Omega) \, \longrightarrow \, \mathbb{R} \, ,$$

*τό ὁποῖο εἶναι συνεχές ὑπό τήν ἑξῆς ἔννοια: ῞Εστω $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων δοκιμῆς, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} f[\varphi_n] \; = \; 0 \, ,$$

*δοθέντος ὅτι:*

1. *Οἱ $\varphi_n$ μηδενίζονται ἐκτός τοῦ ἰδίου συμπαγοῦς ὑποσυνόλου $K$ τοῦ $\Omega$ καί*

2. *Γιά κάθε πολυδείκτη $\boldsymbol{\alpha}$*

$$\lim_{n\to\infty} \partial^\alpha \varphi_n \; = \; 0 \, ,$$

*ὁμοιόμορφα.*

*Τό σύνολο τῶν κατανομῶν ἐπί τοῦ $\Omega$ συμβολίζεται μέ $\mathcal{D}'(\Omega)$, ἤ ἁπλῶς $\mathcal{D}'$, ὅταν δέν ὑπάρχει κίνδυνος παρανοήσεως.*

Κάθε συνεχής καί γενικότερα τοπικά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση $f$, ὁρίζει μιά κατανομή, τήν

$$u_f[\varphi] \; = \; \int_\Omega f(x) \, \varphi(x) \, dx \, .$$

Πράγματι, ἔστω $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ καί $\{\varphi_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ἀκολουθία συναρτήσεων δοκιμῆς πληροῦσα τίς προϋποθέσεις τοῦ προηγουμένου ὁρισμοῦ καί μηδενιζομένων ἐκτός τοῦ συμπαγοῦς $K \subset \Omega$, τότε ἔχουμε

$$\begin{aligned}
|u_f[\varphi_n]| \; &= \; \left| \int_K f(x) \, \varphi_n(x) \, dx \right| \\
&\leq \; \int_K |f(x)| \, |\varphi_n(x)| \, dx \\
&\leq \; \left( \int_K |f(x)| \, dx \right) \, \max_{x\in K} |\varphi_n(x)| \, .
\end{aligned}$$

Τό δεξιό μέλος τῆς τελευταίας τείνει στό μηδέν. (Γιατί;)

Κατανομή ὁρίζει καί κάθε *μέτρο Borel* $\mu$, ἐπί τοῦ $\Omega$. Ἄν $\mu$ ἕνα τέτοιο, τότε τό συναρτησοειδές

$$u_\mu[\varphi] \;=\; \int_\Omega \varphi \, d\mu\,,$$

ἔχει ὅλες τίς ἰδιότητες τοῦ ἀνωτέρω ὁρισμοῦ.

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ *συνάρτηση Dirac* μέ ἰδιομορφία στό $\xi$, πού ὁρίζεται ὡς

$$\delta_\xi[\varphi] \;=\; \varphi(\xi)\,,$$

γιά $\xi$ ἐντός τοῦ $\Omega$. Ἡ ἀνωτέρω, ἡ ὁποία πράγματι ὁρίζει κατανομή ὅπως εὔκολα ἐξακριβοῦται, δέν μπορεῖ νά ὁρισθεῖ μέσω τοπικά ὁλοκληρώσιμης συναρτήσεως. Δίδεται δέ καί ἀπό τήν ἑξῆς *συμβολική* γραφή:

$$\delta_\xi[\varphi] \;=\; \int_\Omega \delta_\xi(x)\,\varphi(x)\,dx\,.$$

Φυσιολογικά ὁρίζεται καί ἰσότητα τῶν κατανομῶν:

*Οἱ κατανομές $f$ καί $g$ εἶναι ἴσες ἄν $f[\varphi] = g[\varphi]$ γιά κάθε $\varphi \in \mathcal{D}$.* Ἰδιαιτέρως: *Ἄν $D$ ἀνοικτό ὑποσύνολο τοῦ $\Omega$, τότε λέγεται ὅτι οἱ κατανομές $f$ καί $g$ συμφωνοῦν στό $D$ ἄν $f[\varphi] = g[\varphi]$ γιά κάθε $\varphi$ μέ φορέα ἐντός τοῦ $D$.*

**Ὁρισμός 4.1.2** *Μιά καταμονή $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ ὀνομάζεται παραστάσιμη ἀπό τοπικά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση, ἄν ὑπάρχει $f \in L^1_{loc}(\Omega)$ ὥστε γιά κάθε $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ νά ἰσχύει $u = u_f$ ἤ*

$$u[\varphi] \;=\; \int_\Omega f(x)\,\varphi(x)\,dx\;.$$

### Παρατηρήσεις

1. Ἄν ὑπάρχει τέτοια $f$ τότε αὐτή εἶναι μοναδική στόν χῶρο $L^1_{loc}(\Omega)$.

2. Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός θά μποροῦσε εὔκολα νά τροποποιηθεῖ γία κατανομές παραστάσιμες ἀπό συνεχεῖς ἤ $C^m$ ἤ $C^\omega$ συναρτήσεις.

Ἄν τώρα $u$ κατανομή τότε ἡ παράγωγος αὐτῆς $D_{x_k}u$, ὁρίζεται, ὅπως εἴδαμε καί πρίν, ὡς τό γραμμικό συναρτησοειδές

$$D_{x_k}u[\varphi] \;=\; -u[D_{x_k}\varphi]\,.$$

Ἀποδεικνύεται εὔκολα καί αὐτή ὅτι εἶναι ἐπίσης κατανομή. Γενικότερα ὁρίζουμε διαδοχικά

$$D^\alpha u[\varphi] \;=\; (-1)^{|\alpha|}u[D^\alpha\varphi]\,.$$

Ἄν τώρα $\psi\in C^\infty(\Omega)$ μποροῦμε νά ὁρίσουμε καί τήν κατανομή

$$\psi\, u[\varphi] \;=\; u[\psi\varphi]\,,$$

ἀπ'ὅπου προκύπτει φυσιολογικά (βλέπε (2.12) ) καί ὁ ὁρισμός τῆς κατανομῆς $Lf$, ὡς

$$Lf[\varphi] \;=\; f[L^*\varphi]\,,$$

μέ $L=\sum_{|\alpha|\le m} c_a(x)D^\alpha$ καί $c_\alpha\in C^\infty(\Omega)$.

Ἄν ἡ κατανομή $u$ εἶναι παραστάσιμη ἀπό τοπικά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση $f$, τότε δέν σημαίνει ὅτι καί ἡ μερική της παράγωγος $D_{x_k}u$ εἶναι ἐπίσης παραστάσιμη ἀπό τοπικά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση. Ἄν ὅμως ἡ $D_{x_k}u$ εἶναι πράγματι παραστάσιμη ἀπό τήν τοπικά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση $g$ τότε ἡ $g$ ὀνομάζεται *ἀσθενής παράγωγος τῆς* $f$.

Σημαντική ἰδιότητα τῶν κατανομῶν εἶναι τό γεγονός ὅτι εἶναι *τοπικά πεπερασμένης τάξεως:*

**Πρόταση 4.1.1** *Ἔστω $u$ κατανομή στό $\Omega$ καί $K$ συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ $\Omega$. Τότε ὑπάρχει φυσικός $n$ καί θετική σταθερά $c$ ὥστε:*

$$|u[\varphi]| \;\le\; c\sum_{|\alpha|\le n}\max_{x\in K}|D^\alpha\varphi(x)| \tag{4.4}$$

*γιά κάθε $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$ τῆς ὁποίας ὁ φορέας περιέχεται στό $K$.*

**Ἀπόδειξη :**

Ἄν δέν ἴσχυε τότε γιά κάθε $n$ φυσικό, θά ὑπῆρχε $\psi_n$, συνάρτηση δοκιμῆς, ὥστε:

$$|u[\psi_n]| \;>\; n \sum_{|\alpha|\leq n} \max_{x\in K} |D^\alpha \psi_n(x)|\,.$$

Ἔστω $\varphi_n = \psi_n/|u[\psi_n]|$. Τότε $D^\alpha\varphi_n \to 0$ γιά κάθε πολυδείκτη $\alpha$, ἀλλά $f[\varphi_n] = 1$ τό ὁποῖο εἶναι ἄτοπο. □.

Στήν πραγματικότητα οἱ κατανομές - τοπικά - ἀποτελοῦν παραγώγους συνεχῶν συναρτήσεων:

**Θεώρημα 4.1.2** *Ἔστω $u$ κατανομή στό $\Omega$ καί $K$ συμπαγές ὑποσύνολο τοῦ $\Omega$. Τότε ὑπάρχει πολυδείκτης $\boldsymbol{\alpha}$ καί συνεχής συνάρτηση $g$ ὥστε:*

$$u[\varphi] \;=\; \int_\Omega (-1)^{|\alpha|} g(x) D^\alpha \varphi(x)\,dx\,,$$

*γιά κάθε συνάρτηση δοκιμῆς $\varphi$ τῆς ὁποίας ὁ φορέας περιέχεται στό $K$.*

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε W.Rudin, *Functional Analysis.* □.

Σημειωτέον ὅτι τό ἀνωτέρω ἰσχύει μόνο τοπικά. Γιά παράδειγμα τό γραμμικό συναρτησοειδές:

$$u[\varphi] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)\,,$$

ὅπως εὔκολα διαπιστοῦται, ὁρίζει κατανομή ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$, ἡ ὁποία δέν ἀποτελεῖ παράγωγο (ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν) καμιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως. [Βλέπε ἄσκηση 13 στή σελίδα 54.]

Φυσιολογικά προκύπτει καί ὁ ὁρισμός τῆς - ἀσθενοῦς[3] - συγκλίσεως τῶν κατανομῶν:

[3] Ἡ ἰσχυρά σύγκλιση κατανομῶν ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

**῾Ορισμός 4.1.4** *῎Εστω $u_n$, $n \in \mathbb{N}$, $u$ κατανομές ἐπί τοῦ $\Omega$. Λέγεται ὅτι*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \;=\; u\,,$$

*γιά κάθε $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$.*

Θά μᾶς ἀπασχολήσουν οἱ κατανομές πού ἀποτελοῦν λύσεις τῆς ἐξισώσεως

$$Lu \;=\; \delta_\xi\;.$$

Αὐτές ὀνομάζονται *Θεμελιώδεις Λύσεις* τῆς ἐξισώσεως $Lu = 0$ μέ πόλο $\xi$ τοῦ τελεστοῦ $L$. Οἱ κατανομές αὐτές, ὅπως θά δοῦμε ἀργότερα, γεννοῦν τίς λύσεις τῆς ἀντίστοιχης μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως $Lv = f$, μέσω συνελίξεων. ῎Αν $w = v * f$ τότε συμβολικά

$$Lw \;=\; L(v*f) \;=\; Lv*f \;=\; \delta_\xi * f \;=\; f(\xi)\,.$$

῎Αν τώρα $v$ συνήθης λύση τῆς $Lv = 0$ καί $u$ θεμελιώδης, τότε τό ἄθροισμα τῶν δύο εἶναι ἐπίσης θεμελιώδης λύση. Εἶναι ἀξιοσημείωτο

---

**῾Ορισμός 4.1.3** *῎Εστω $u_n$, $n\in\mathbb{N}$, $u$ κατανομές ἐπί τοῦ $\Omega$. Λέγεται ὅτι*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n \;=\; u\,,$$

*ἄν*

$$\lim_{n\to+\infty} u_n[\varphi] \;=\; u[\varphi]\,,$$

*ὁμοιόμορφα σέ κάθε ὑποσύνολο $\mathcal{E}$ τοῦ $\mathcal{D}$ τοῦ ὁποίου τά στοιχεῖα μηδενίζονται ἐκτός κοινοῦ συμπαγοῦς ὑποσυνόλου $K$ τοῦ $\Omega$ καί ὅλες οἱ μερικές τους παράγωγοί ἔχουν κοινά ἀπόλυτα φράγματα. ῏Ητοι:*

$$|D^\alpha\varphi(x)| \;\le\; M_\alpha \;<\; +\infty \quad \text{γιά κάθε πολυδείκτη } \alpha \text{ καί } x\in K\,.$$

*γιά κάθε $\varphi\in\mathcal{E}$.*

ὅτι μιά συγκεκριμένη κατανομή εἶναι πολύ συχνά ὁρίσιμη ἐπί πολύ γενικοτέρων συναρτήσεων ἀπό αὐτές τοῦ χώρου $\mathcal{D}$. Γιά παράδειγμα οἱ συναρτήσεις Dirac εἶναι ὁρίσιμες ἐφ'ὅλων τῶν συνεχῶν συναρτήσεων. Παρομοίως, ἄν $u$ τοπικά ὁλοκληρώσιμη καί $L = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(x) D_\alpha$ μέ $c_\alpha \in C^{|\alpha|}(\Omega)$, τότε ἡ $Lu[\varphi]$ εἶναι ὁρίσιμη γιά κάθε $\varphi \in C^m(\bar{\Omega})$. Αὐτή ἡ παρατήρηση μᾶς ἐπιτρέπει νά ὁρίσουμε ἐκ νέου τήν ἔννοια τῆς ἀσθενοῦς λύσεως:

**Ὁρισμός 4.1.5** *Ἔστω $L = \sum_{|\alpha|\leq m} c_\alpha(\boldsymbol{x}) D^\alpha$ καί $c_\alpha \in C^{|\alpha|}(\bar{\Omega})$, γιά κάθε $|\alpha| \leq m$. Ἡ τοπικά ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση $u$ ὀνομάζεται ἀσθενής λύση τῆς ἐξισώσεως $Lu = f$ ἄν*

$$\int_\Omega f\,\varphi\,dx \;=\; \int_\Omega u\,L^*\varphi\,dx\,,$$

*γιά κάθε $\varphi \in C_0^m(\Omega)$.*

**Παραδείγματα**

1. Ἔστω $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ καί $u' = 0$ ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν, τότε ὑπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ὥστε $u = c$. Δηλαδή ἡ $u$ εἶναι παραστάσιμη διά τῆς σταθερᾶς συναρτήσεως, $f(x) = c$.

   **Ἀπόδειξη :**

   Ἔστω ὅτι $u' = 0$, ἤ $u[\varphi'] = 0$ γιά κάθε συνάρτηση δοκιμῆς $\varphi$. Ἔστω τώρα $\varphi_1 \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ ὥστε $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_1(x)\,dx = 1$. Τέτοια $\varphi_1$ ὑπάρχει. (Γιατί;) Ἄν τώρα $\varphi$ τυχούσα συνάρτηση δοκιμῆς, τότε ἡ συνάρτηση $\zeta$ πού ὁρίζεται ὡς

   $$\zeta(x) \;=\; \int_{-\infty}^{x} \varphi(\xi)\,d\xi - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,d\xi\right) \int_{-\infty}^{x} \varphi_1(\xi)\,d\xi$$

   εἶναι ἐπίσης συνάρτηση δοκιμῆς (γιατί;) καί παραγωγιζόμενη δίδει:

   $$\zeta'(x) \;=\; \varphi(x) - \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\,d\xi\right) \varphi_1(x)\,.$$

Ἄρα $u[\zeta'] = 0$ καί ὡς ἐκ τούτου

$$u[\varphi] \;=\; \Big(\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\, d\xi\Big)\, u[\varphi_1] \;=\; \int_{-\infty}^{+\infty} c\, \varphi(\xi)\, d\xi\,,$$

ὅπου $c = u[\varphi_1]$. Ἄρα πράγματι ἡ $u$ εἶναι παραστάσιμη διά τῆς σταθερᾶς $c$.

2. Τό ἀνωτέρω γενικεύεται: *Ἄν $u$ κατανομή καί $u^{(n)} = 0$, τότε ἡ $u$ εἶναι παραστάσιμη διά πολυωνύμου βαθμοῦ τό πολύ $n-1$*. Αὐτό ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά ἀφοῦ παρατηρηθεῖ ὅτι $u^{(n+1)} = (u^{(n)})'$.

3. Ἐπίσης γενικεύεται στίς πολλές διάστασεις: *Ἄν $u \in calD'(\Omega)$ καί $\nabla u = 0$ ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν, τότε $u = c$*. [Βλέπε ἄσκηση 5.]

4. Ἄν $u \in \mathcal{D}'(\mathrm{I\!R})$ καί $u' = u$ τότε ἡ $u$ παραστάσιμη ἀπό συνάρτηση τῆς μορφῆς $f(x) = ce^x$. [Βλέπε ἄσκηση 10.]

5. Ἔστω $L = d/dx$ καί $\Omega = \mathrm{I\!R}$. Ἄν τώρα $u(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x)$, τότε γιά $\varphi \in C_0^\infty$ ἔχουμε

$$\begin{aligned} u'[\varphi] &= -\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x)\, \varphi'(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{0} \varphi'(x)\, dx - \frac{1}{2}\int_{0}^{+\infty} \varphi'(x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\varphi(0) - \frac{1}{2}(-\varphi(0)) \;=\; \varphi(0) \\ &= \delta_0(\varphi) \end{aligned}$$

Γενικότερα ἄν $u(x) = \frac{1}{2}\mathrm{sgn}(x-\xi)$, τότε $u' = \delta_\xi$.

6. Παρομοίως, ἄν $u(x) = \frac{1}{2}|x-\xi|$ τότε $u'' = \delta_\xi$.

7. Ἄν $f$ συνεχής στό $\mathbb{R}$ καί $c$ σταθερά, τότε ἡ συνάρτηση $u(x,t) = f(x-ct)$ ἀποτελεῖ ἀσθενῆ λύση τῆς ἐξισώσεως

$$u_t + cu_x \;=\; 0\,.$$

Πράγματι, εἰσάγοντας τό σύστημα συντεταγμένων, $\xi = x - ct$ καί $\eta = x$ τότε θά ἔχουμε $\partial_t + c\partial_x = c\partial_\eta$ καί $c\,dx\,dt = d\xi\,d\eta$. Ὁπότε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}(u_t + cu_x)\varphi\,dx\,dt \;&=\; -\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u(\varphi_t + c\varphi_x)dx\,dt\\ &=\; -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}u\,\varphi_\eta\,d\xi\,d\eta\\ &=\; -\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\varphi_\eta\,d\xi\,d\eta\,.\end{aligned}$$

Ἄν $\varphi = \psi(\xi)\vartheta(\eta)$ τότε τό ἀνωτέρω ὁλοκλήρωμα μηδενίζεται διότι:

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\varphi_\eta\,d\xi\,d\eta \;&=\; \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,\psi(\xi)\,\vartheta'(\eta)\,d\xi\,d\eta\\ &=\; \int_{-\infty}^{+\infty}f(\xi)\,d\xi\int_{-\infty}^{+\infty}\vartheta'(\eta)\,d\eta \;=\; 0\end{aligned}$$

Δοθέντος ὅτι κάθε $\varphi \in \mathcal{D}$ ἀποτελεῖ ὅριο γραμμικοῦ συνδυασμοῦ τέτοιων, λαμβάνουμε τό ζητούμενο.

8. Παρατηρεῖστε ὅτι τό γραμμικό συναρτησοειδές

$$u[\varphi] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\varphi^{(n)}(1/n)\,, \tag{4.5}$$

ἀποτελεῖ κατανομή στό $(0,+\infty)$, ἀλλά ὄχι καί στό $\mathbb{R}$. Στήν πραγματικότητα τό ἀριστερό μέλος τῆς (4.5) δέν εἶναι κἄν ὁρίσιμο γιά κάθε $\varphi \in \mathcal{D}$.

## Ἀσκήσεις 4.1

1. Ἄν ἡ κατανομή $u \in \mathcal{D}'(\Omega)$ εἶναι παραστάσιμη ἀπό συνεχῆ συνάρτηση τότε εἶναι παραστάσιμη ἀπό μοναδική συνεχῆ συνάρτηση $f$. Πῶς μποροῦμε νά βροῦμε τίς τιμές τῆς $f$ ἐντός στό $\Omega$;

2. Δείξατε ὅτι μιά θεμελιώδης λύση τοῦ τελεστοῦ $L = d^n/dx^n$ μέ πόλο τό $\xi$, εἶναι ἡ συνάρτηση
$$u(x) \;=\; \frac{1}{2(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}\mathrm{sgn}(x-\xi)\,.$$

3. (Συνέχεια) Δείξατε ὅτι ἡ $u$ εἶναι θεμελιώδης λύση τοῦ τελεστοῦ $d^n/dt^n$ μέ πόλο $\xi$ ἄν καί μόνο ἄν εἶναι τῆς μορφῆς
$$u(x) \;=\; \frac{1}{2(n-1)!}(x-\xi)^{n-1}\mathrm{sgn}(x-\xi) + p(x)\,,$$
ὅπου $p(x)$ πολυώνυμο βαθμοῦ τό πολύ $n-1$.

4. Ἄν $u$ κατανομή καί $u^{(n)} = 0$, τότε ἡ $u$ εἶναι παραστάσιμη διά πολυωνύμου βαθμοῦ τό πολύ $n-1$.

   **Ὑπόδειξη :** Αὐτό ἀποδεικνύεται ἐπαγωγικά ἀφοῦ παρατηρηθεῖ ὅτι $u^{(n+1)} = (u^{(n)})'$.

5. Ἄν $u \in calD'(\Omega)$ καί $\nabla u = 0$ ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν, τότε $u = c$.

6. Ἄν $f,\, g \in C(\mathbb{R})$ τότε $u = f(x+ct) + g(x-ct)$ ἀσθενής λύση τῆς ἐξισώσεως κύματος $u_{tt} = c^2 u_{xx}$.

7. Ἔστω $\tau_h : \mathcal{D}' \to \mathcal{D}'$ ὁ γραμμικός τελεστής πού ὁρίζεται ὡς
$$\tau_h u[\varphi] \;=\; u[\tau_{-h}\varphi]\,,$$
ὅπου $\tau_h\varphi(x) = \varphi(x * h)$. Ἔστω τώρα $u$ κατανομή ἱκανοποιοῦσα τήν
$$\tau_h u \;=\; u$$
γιά κάθε $h \in \mathbb{R}$. Δείξατε ὅτι ἡ $u$ εἶναι παραστάσιμη διά σταθερᾶς.

8. Ἔστω $f \in C(\mathbb{R})$ καί $u_h(x) = (f(x+h) - f(x))/h$. Δείξατε ὅτι
$$u_h \longrightarrow f'\,, \tag{4.6}$$
καθώς $h \to 0$, ὡς κατανομές.

9. (Συνέχεια) Νά διατυπωθεῖ καί νά ἀποδειχθεῖ ἀνάλογη τῆς (4.6) ὅταν ἡ $f$ ἀντικατασταθεῖ ἀπό συνάρτηση Dirac.

10. Δείξατε ὅτι ἄν $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ καί $u' = u$ τότε ὑπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ὥστε ἡ $u$ νά εἶναι παραστάσιμη διά τῆς συναρτήσεως $f(x) = ce^x$ .

11. Ἔστω $L = \sum_{k=0}^{n} a_k D^k$, συνήθης διαφορικός τελεστής, μέ $a_k$, $k = 0, \ldots, n$, σταθερές, $a_n \neq 0$ καί $D = d/dt$. Ἄν τώρα $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ μέ $Lu = 0$, τότε ἡ $u$ εἶναι παραστάσιμη ἀπό λύση τῆς ἀντίστοιχης συθήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως.

12. Δείξατε ὅτι τό γραμμικό συναρτησοειδές
$$u[\varphi] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(1/n)\,,$$
ἀποτελεῖ κατανομή στό $(0, +\infty)$, ἀλλά ὄχι καί στό $\mathbb{R}$.

13. Δείξατε ὅτι τό γραμμικό συναρτησοειδές:
$$u[\varphi] \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \varphi^{(n)}(n)\,,$$
ὁρίζει κατανομή ἐπί τοῦ $\mathbb{R}$ ἡ ὁποία δέν ἀποτελεῖ παράγωγο (ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν) καμμιᾶς συνεχοῦς συναρτήσεως.

# Κεφάλαιο 5

# Οἱονεί γραμμικές ἐξισώσεις πρώτης τάξεως

Ὅπως ἔχουμε ἤδη δεῖ εἶναι οἱ ἐξισώσεις τῆς μορφῆς

$$a_1(\boldsymbol{x}, u)u_{x_1} + \ldots + a_n(\boldsymbol{x}, u)u_{x_n} \;=\; b(\boldsymbol{x}, u)\,.$$

ὅπου $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$. Στήν παρούσα ἑνότητα θά μελετηθεῖ ἡ μορφή τῶν λύσεων καί ἀκολούθως πῶς μπορεῖ νά διατυπωθεῖ κατάλληλο πρόβλημα πού ἀπολαμβάνει ὑπάρξεως καί μοναδικότητος. Ἡ μοναδικότης προκύπτει ἀπό τήν προσθήκη καταλλήλων δεδομένων, τῶν *Δεδομένων Cauchy*. (*Cauchy data.*) Ἐπίσης θά ἀναπτυχθεῖ ἡ μεθοδολογία ἐπιλύσεώς τους.

Ἀρχίζουμε μέ μιά ἁπλή περίπτωση:

## 5.1 Γραμμικές ἐξισώσεις μέ σταθερούς συντελεστές

Αὐτές στίς δύο μεταβλητές, στήν ὁμοιογενῆ τους ἐκδοχή γράφονται ὡς

$$\alpha u_x + \beta u_y \;=\; 0\,, \tag{5.1}$$

ὅπου $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Πιό κάτω θά δοῦμε ποιά μορφή ἔχουν οἱ λύσεις αὐτῆς.

**Πρῶτος τρόπος:**

Ἡ (5.1) γράφεται καί ὡς

$$(\alpha\partial_x + \beta\partial_y)u \;=\; (\alpha, \beta)\cdot \nabla u \;=\; 0\,,$$

ἡ ὁποία μᾶς παρέχει τήν πληροφορία ὅτι ἡ παράγωγος τῆς συναρτήσεως $u$ στήν κατεύθυνση $(\alpha, \beta)$ εἶναι ἴση μέ μηδέν. Ἄρα ἡ $u$ σ'αὐτή τή διεύθυνση εἶναι σταθερή. Ἔτσι σέ κάθε εὐθεία

$$\Gamma_c \;=\; \{(x, y)\,|\,\beta x - \alpha y = c\}$$

ἡ $u$ εἶναι σταθερή. Ἄρα ἡ $u$ δέν εἶναι πλέον συνάρτηση τῶν $x$ καί $y$, ἀλλά τῆς τιμῆς $\beta x - \alpha y$. Δηλαδή:

$$u(x, y) \;=\; f(\beta x - \alpha y)\,.$$

Ἀντιστρόφως, ἄν $u = f(\beta x - \alpha y)$, τότε ἡ $u$ ἱκανοποιεῖ τήν (5.1).

**Δεύτερος τρόπος:**

Αὐτό μπορεῖ νά φανεῖ καί μέ τήν ἀλλαγή συντεταγμένων

$$\xi \;=\; \alpha x + \beta y \quad , \quad \eta \;=\; \beta x - \alpha y\,.$$

Ἡ ἀλλαγή αὐτή συντεταγμένων πραγματοποιεῖται ἀπό τόν 1-1 καί ἐπί μετασχηματισμό

$$\mathbb{R}^2 \ni \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & -\alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2\,,$$

μέσω ἀντιστρεψίμου πίνακα. Ὁ δέ ἀντίστροφος μετασχηματισμός μᾶς παρέχει:

$$x \;=\; \frac{\alpha\xi + \beta\eta}{\alpha^2 + \beta^2} \quad , \quad y \;=\; \frac{\beta\xi - \alpha\eta}{\alpha^2 + \beta^2}\,.$$

Ἐπίσης

$$
\begin{aligned}
u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x = \alpha u_\xi + \beta u_\eta \\
u_y &= u_\xi \xi_y + u_\eta \eta_y = \beta u_\xi - \alpha u_\eta
\end{aligned}
$$

καί ἔτσι

$$0 = \alpha u_x + \beta u_y = \alpha(\alpha u_\xi + \beta u_\eta) + \beta(\beta u_\xi - \alpha u_\eta) = (\alpha^2 + \beta^2) u_\xi \,.$$

Ἄρα $u_\xi = 0$ καί ὡς ἐκ τούτου $u = f(\eta) = f(\beta x - \alpha y)$.

Ἡ (5.1) ἔχει λοιπόν ἄπειρες τό πλῆθος λύσεις, ὅσες καί καί οἱ $f \in C^1(\mathbb{R})$. Ἡ ἐπίλογή *μιᾶς* ἐξ αὐτῶν εἶναι ἐφικτή ὅταν μᾶς δίδονται ἐπί πλέον πληροφορίες.

**Παραδείγματα**

1. Ἔστω ὅτι εἴχαμε τό *πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν*

$$
\begin{cases}
u_x + 2u_y = 0 \,, \\
\\
u(x,0) = \sin x \,.
\end{cases}
\tag{5.2}
$$

Τότε λόγω τῶν ἀνωτέρω, ἡ μερική διαφορική ἐξίσωση, συνεπάγεται ὅτι $u = f(2x - y)$. Χρησιμοποιώντας τήν *ἀρχική συνθήκη* λαμβάνουμε:

$$f(2x) = u(x,0) = \sin x \,.$$

Ἄρα

$$f(x) = \sin(x/2)$$

καί τελικῶς

$$u(x,y) = \sin(x - y/2) \,.$$

Ἡ μεθοδολογία αὐτή ἐξασφαλίζει τόσο τήν ὕπαρξη, ὅσο καί τή μοναδικότητα τῶν λύσεων τοῦ (5.2). Πράγματι ἡ $u = \sin(x - y/2)$ ἀποτελεῖ λύση τοῦ (5.2) σ'ὅλο τό $\mathbb{R}^2$, ἐνῶ ἄν $v$ ἄλλη λύση τότε ἀκολουθώντας τά ἀνωτέρω βήματα καταλήγουμε στό ὅτι $v \equiv u$.

2. Μή ὁμοιογενής περίπτωση: *Νά λυθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν:*

$$\begin{cases} u_x + u_y = x + y \\ \\ u(x,0) = e^x\,. \end{cases}$$

**Ἐπίλυση**

Θέτουμε $\xi = x + y$ καί $\eta = x - y$, ὁπότε $x = (\xi + \eta)/2$ καί $y = (\xi - \eta)/2$. Ἐπίσης

$$2u_\xi = u_x + u_y = x + y = \xi\,,$$

ἄρα

$$u(\xi,\eta) \;=\; \frac{\xi^2}{4} + c(\eta)\,,$$

ἀπ᾽ὅπου

$$u(x,y) \;=\; \frac{(x+y)^2}{4} + c(x-y)\,.$$

Χρησιμοποιώντας τήν *ἀρχική συνθήκη*

$$u(x,0) \;=\; \frac{x^2}{4} + c(x) \;=\; e^x\,,$$

λαμβάνουμε $c(x) = e^x - x^2/4$ καί ἐν τέλει

$$u(x,y) = xy + e^{x-y}\,.$$

3. Μιά ἐξίσωση περισσοτέρων τῶν δυό μεταβλητῶν, ὅπως ἡ

$$u_x + u_y + u_z \;=\; 0\,, \tag{5.3}$$

ἀντιμετωπίζεται κατά τρόπο ἀνάλογο τῆς (5.1). Ἡ (5.3) γράφεται ἰσοδύναμα ὡς:

$$(1,1,1)\cdot\nabla u \;=\; 0\,.$$

Ἄρα ἡ $u$ εἶναι σταθερή στίς εὐθεῖες παράλληλες τοῦ $\gamma = (1,1,1)$ καί ὡς ἐκ τούτου ἀποτελεῖ συνάρτηση δύο γραμμικά ἀνεξάρτητων μέ τήν $\gamma$ διευθύνσεων. Γιά παράδειγμα τά $(1,-1,0)$ καί $(0,1,-1)$. Ἔτσι

$$u(x,y,z) \;=\; f(x-y, y-z)\,.$$

## 5.2 Γεωμετρική θεώρηση τῶν οἱονεί γραμμικῶν ἐξισώσεων

Ἔστω ἡ οἱονεί γραμμική μερική διαφορική ἐξίσωση πρώτης τάξεως δύο μεταβλητῶν:

$$a(x,y,u)u_x + b(x,y,u)u_y \;=\; c(x,y,u)\,. \qquad (5.4)$$

Αὐτή γράφεται ἰσοδύναμα ὡς

$$(a(x,y,u), b(x,y,u), c(x,y,u))\cdot(u_x, u_y, -1) \;=\; 0\,. \qquad (5.5)$$

Ἄν ἡ $u = u(x,y)$ ἀποτελεῖ λύση τῆς (5.4) τότε ἡ ἐπιφάνεια $S = \{(x,y,z)\,|\,z = u(x,y)\}$ καλεῖται *ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια* τῆς (5.4). Εἶναι γνωστό ἀπό τήν Διαφορική Γεωμετρία ὅτι:

*Ἄν ἡ $S = \{(x,y,z)\,|\,\varphi(x,y,z) = 0\}$ εἶναι ὁμαλή[1] ἐπιφάνεια στόν $\mathbb{R}^3$ τότε τό διάνυσμα $(\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ εἶναι κάθετο σέ κάθε της σημεῖο.*

Ἰδιαιτέρως στήν περίπτωση πού ἡ ἐπιφάνεια ἀποτελεῖ γράφημα συνεχῶς διαφορίσιμης συναρτήσεως, δηλαδή $S = \{(x,y,z)\,|\,z = u(x,y)\}$, τότε τό διάνυσμα $(u_x, u_y, -1)$ εἶναι κάθετο στό γράφημα τῆς $u$.

Ἔτσι λοιπόν ἡ (5.5) μᾶς λέγει ὅτι: *Ἄν $S$ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια τῆς (5.4), τότε σέ κάθε της σημεῖο $P = (x_0, y_0, z_0)$ τό διάνυσμα*

$$\gamma(P) \;=\; (a(P), b(P), c(P))\,,$$

[1] Ἡ ἐπιφάνεια $S = \{(x,y,z)\,|\,\varphi(x,y,z) = 0\}$ ὀνομάζεται ὁμαλή, ἄν ἡ $\varphi$ εἶναι συνεχῶς διαφορίσιμη καί ἡ κλίση αὐτῆς $\nabla\varphi = (\varphi_x, \varphi_y, \varphi_z)$ δέ μηδενίζεται σέ κανένα σημεῖο τῆς ἐπιφανείας.

*εἶναι ἐφαπτόμενο στήν $S$.*

Τό διάνυσμα $\gamma = (a, b, c)$ ὀνομάζεται *χαρακτηριστική διεύθυνση*. Οἱ χαρακτηριστικές διευθύνσεις ὁρίζουν ἕνα αὐτόνομο διανυσματικό πεδίο. Δηλαδή τά $a$, $b$ καί $c$ δέν ἐξαρτῶνται ἀπό τό χρόνο. Τό διανυσματικό αὐτό πεδίο ὁρίζει 2-παραμετρική οἰκογένεια καμπυλῶν μέ τήν ἰδιότητα ὅτι, σέ κάθε τους σημεῖο, ἡ ἐφαπτόμενη εἶναι παράλληλη τῆς χαρακτηριστικῆς διευθύνσεως. Οἱ καμπύλες αὐτές ὀνομάζονται *χαρακτηριστικές καμπύλες* ἤ ἁπλούστερα *χαρακτηριστικές τῆς (5.4)*. Ἄν ὑποθέσουμε ὅτι οἱ συναρτήσεις $a$, $b$ καί $c$ εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλές[2] τότε οἱ χαρακτηριστικές καμπύλες δέν εἶναι τίποτα ἄλλο ἀπό τίς λύσεις τοῦ αὐτονόμου συστήματος συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων

$$\left\{\begin{array}{lcl} x' & = & a(x,y,z) \\ y' & = & b(x,y,z) \\ z' & = & c(x,y,z)\,. \end{array}\right. \tag{5.6}$$

Λόγω τῆς ὁμαλότητος τῶν $a$, $b$ καί $c$, ἀπό κάθε σημεῖο τοῦ χώρου (ἤ τοῦ κοινοῦ πεδίου ὁρισμοῦ τῶν $a$, $b$ καί $c$) διέρχεται μοναδική χαρακτηριστική καμπύλη. Ἔτσι ὁ χῶρος γράφεται ὡς ἕνωση τέτοιων οἱ ὁποῖες δέν τέμνονται.

Σ'ὅτι ἀκολουθεῖ θά δείξουμε ὅτι:

**Πρόταση 5.2.1** *Οἱ λύσεις τῆς (5.4) εἶναι ἐκεῖνες ἀκριβῶς οἱ ὁμαλές συναρτήσεις τῶν ὁποίων τό γράφημα ἀποτελεῖ ἕνωση χαρακτηριστικῶν καμπυλῶν.*

**Ἀπόδειξη :**

Πράγματι, ἄν μιά ἐπιφάνεια $S = \{(x,y,z) \mid z = u(x,y)\}$, ἀποτελεῖ ἕνωση ὁλοκληρωτικῶν καμπυλῶν, τότε γιά κάθε σημεῖο $P = (x_0, y_0, z_0)$ πού περιέχει, περιλαμβάνει καί τήν ὁλοκληρωτική καμπύλη πού διέρχεται ἀπό

[2] Ἐδῶ ἡ ἀπαίτηση τῆς ὁμαλότητος σχετίζεται μέ τήν μοναδικότητα τῶν λύσεων τοῦ συστήματος συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων (5.6) ὅταν συνοδεύεται μέ ἀρχικές συνθῆκες. Συγκεκριμένα, γιά λόγους ἁπλότητος ἀπαιτοῦμε ὅπως $a$, $b$, $c \in C^1$.

τό $P$, ἄρα ὁ ἐφαπτόμενος χῶρος τῆς καμπύλης στό $P$ περιλαμβάνει τό διάνυσμα $(a(P), b(P), c(P))$ στό ὁποῖο εἶναι κάθετη ἡ $(u_x, u_y, -1)$, ἐξ' οὗ καί ἡ (5.4).

Ἀντιστρόφως:

Ἔστω ὅτι ἡ ἐπιφάνεια $S = \{(x, y, z) \,|\, z = u(x, y)\}$, ἀποτελεῖ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια τῆς (5.4) καί τό σημεῖο $P = (x_0, y_0, z_0)$ ἀνήκει στήν $S$. Θά δείξουμε ὅτι ἄν $\gamma$ ἡ χαρακτηριστική καμπύλη πού διέρχεται ἀπό τό $P$ τότε ἡ $\gamma$ περιέχεται ἐξ ὁλοκλήρου στήν $S$. Ἔστω λοιπόν ὅτι

$$\gamma(t) \;=\; (x(t), y(t), z(t))\,, \quad t \in I$$

καί $\gamma(0) = P$. Πρέπει νά δείξουμε ὅτι $z(t) = u(x(t), y(t))$. Θέτουμε

$$d(t) \;=\; z(t) - u(x(t), y(t))$$

καί πρέπει νά δειχθεῖ ὅτι $d \equiv 0$. Ἔχουμε $d(0) = 0$ ἐνῶ

$$\begin{aligned} d'(t) &= z'(t) - u_x x'(t) - u_y y'(t) \\ &= c(x, y, z) - u_x(x, y) a(x, y, z) - u_y(x, y) b(x, y, z)\,. \end{aligned}$$

Ἔτσι λοιπόν ἡ $d = d(t)$ ἱκανοποιεῖ τή συνήθη διαφορική ἐξίσωση

$$d'(t) = c(x, y, u + d(t)) - u_x\, a(x, y, u + d(t)) - u_y\, b(x, y, u + d(t))\,.$$

Τό δεξιό μέλος τῆς ἀνωτέρω, δοθέντος ὅτι τά $x = x(t)$, $y = y(t)$, $u = u(x(t), y(t))$, $u_x = u_x(x(t), y(t))$, $u_y = u_y(x(t), y(t))$, λαμβάνουν τίς τιμές τους ἐπί τῆς γνωστῆς μας $\gamma$, θά εἶναι τῆς μορφῆς $f(t, d)$, ὅπου $f \in C^1$. Μία λύση αὐτῆς εἶναι ἡ $d \equiv 0$ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ καί τήν ἀρχική συνθήκη $d(0) = 0$. Λόγω τῆς μοναδικότητος τῶν λύσεων τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$d' \;= f(t, d) \quad , \quad d(0) = 0\,,$$

εἶναι καί ἡ μοναδική λύση. Ὅπερ σημαίνει ὅτι ἡ καμπύλη $\gamma$ βρίσκεται ἐξ ὁλοκλήρου ἐπί τῆς $S$. $\square$.

Συνέπειες τῆς ἀνωτέρω προτάσεως ἀποτελοῦν τά πορίσματα:

**Πόρισμα 5.2.2** *Ἄν δύο ὁλοκληρωτικές ἐπιφάνειες ἔχουν κοινό σημεῖο $P$ τότε περιλαμβάνουν ὅλη τή χαρακτηριστική καμπύλη πού διέρχεται ἀπό τό $P$.*

**Πόρισμα 5.2.3** *Ἄν δύο ὁλοκληρωτικές ἐπιφάνειες τέμνονται χωρίς νά ἐφάπτονται, τότε τέμνονται κατά μῆκος χαρακτηριστικῆς καμπύλης.*

## 5.3 Κατασκευή λύσεων οἱονεί γραμμικῶν ἐξισώσεων

Εἴδαμε ὅτι κάθε ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια τῆς (5.4) ἀποτελεῖ ἕνωση χαρακτηριστικῶν καμπυλῶν. Τό ἑπόμενο ἐρώτημα, πρακτικῆς φύσεως, εἶναι:

*Πῶς θά κατασκευάσουμε λύση τῆς(5.4) ὡς ἕνωση χαρακτηριστικῶν καμπυλῶν, χρησιμοποιώντας κατάλληλα δεδομένα πού ἐπιλέγουν αὐτές τίς χαρακτηριστικές καμπύλες;*

Ὅπως θά δοῦμε, αὐτό ἐπιτυγχάνεται ἄν ὑποθέσουμε ὅτι ἡ ζητούμενη ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια - τό γράφημα τῆς λύσεως - περιλαμβάνει κατάλληλη καμπύλη $\gamma$ καί ἐν τέλει τό γράφημα τῆς λύσεως δέν θά εἶναι τίποτα ἄλλο ἀπό τήν ἕνωση τῶν χαρακτηριστικῶν καμπυλῶν πού διέρχονται ἀπό τά σημεῖα τῆς $\gamma$. Συγκεκριμένα, δίδεται ἡ καμπύλη

$$\gamma(s) \;=\; (f(s), g(s), h(s))\,, \quad s \in I\,,$$

τότε, ὅπως θά δοῦμε, ὑπό κατάλληλες συνθῆκες, εἶναι ἐφικτή ἡ κατασκευή λύσεως πού περιλαμβάνει τή $\gamma$. Αὐτό ἀποτελεῖ τό *Πρόβλημα Cauchy* πού ἀπαιτεῖ:

*Νά βρεθεῖ λύση τῆς (5.4) ἡ ὁποία ἐπί τῆς $xy$-προβολῆς τῆς καμπύλης $\gamma(s)$, $s \in I$, λαμβάνει τίς τιμές*

$$u(f(s), g(s)) \;=\; h(s) \quad , \quad s \in I\,.$$

Εἰδική περίπτωση ἀποτελεῖ ἡ πιό κάτω παραμετρική περιγραφή

$$x = s, \quad y = 0, \quad z = h(s)\,,$$

ἤ

$$u(x,0) \;=\; h(x)\,,$$

ἡ ὁποία ὀνομάζεται *Ἀρχική Συνθήκη*. Ὁ δέ συνδυασμός τῆς ἀρχικῆς συνθήκης μέ τήν (5.4) ἀποτελεῖ τό *Πρόβλημα Ἀρχικῶν Τιμῶν (ΠΑΤ)*.

Ἔστω λοιπόν ὅτι $f,\ g,\ h\in C^1(I)$, ὅπου $I$ ἀνοικτό διάστημα, $s_0\in I$ καί

$$P_0 \;=\; (f(s_0), g(s_0), h(s_0)) \;=\; (x_0, y_0, z_0)\,.$$

Θά κατασκευάσουμε τοπική λύση τοῦ προβλήματος Cauchy, γύρω ἀπό τό $P_0$. Ἔστω $X(s,t)$, $Y(s,t)$, $Z(s,t)$, λύση τοῦ συστήματος συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων:

$$\left\{\begin{array}{lcl} x_t &=& a(x,y,z)\\ y_t &=& b(x,y,z)\\ z_t &=& c(x,y,z), \end{array}\right. \tag{5.7}$$

μέ ἀρχικές συνθῆκες

$$x(s,0) \;=\; f(s), \quad y(s,0) \;=\; g(s), \quad z(s,0) \;=\; h(s)\,. \tag{5.8}$$

Ὅπως προκύπτει ἀπό τά *θεωρήματα ὑπάρξεως, μοναδικότητος* καί *ὁμαλῆς ἐξαρτήσεως τῶν λύσεων ἀπό παραμέτρους*, τέτοιες συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις $X(s,t)$, $Y(s,t)$, $Z(s,t)$, ὑπάρχουν καί ὁρίζονται σέ ἀνοικτή περιοχή $U$ τοῦ $(s_0,0)$. Ὅπως θά δοῦμε τά

$$x \;=\; X(s,t), \quad y \;=\; Y(s,t), \quad z \;=\; Z(s,t)\,, \qquad (s,t)\in U\,,$$

ἀποτελοῦν παραμετρική περιγραφή τοῦ γραφήματος λύσεως τοῦ προβλήματος Cauchy ἄν τά $(s,t)$ στό $U$, μποροῦν νά ἐκφρασθοῦν μέσω τῶν $x$ καί $y$, δηλαδή $s = S(x,y)$, $t = T(x,y)$ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ ἀνωτέρω παραμετρική περιγράφή νά ὁρίζει λύση

$$u \;=\; u(x,y) \;=\; Z(S(x,y), T(x,y))\,.$$

Αὐτό εἶναι ἐφικτό ἄν πληροῦνται οἱ προϋποθέσεις τοῦ *Θεωρήματος Ἀντιστρόφου Συναρτήσεως*, ἤτοι:

$$\begin{vmatrix} X_s & X_t \\ Y_s & Y_t \end{vmatrix}(s_0,0) \;=\; \begin{vmatrix} f'(s_0) & a(P_0) \\ g'(s_0) & b(P_0) \end{vmatrix} \;\neq\; 0\,, \tag{5.9}$$

ὁπότε ὑπάρχουν ἀνοικτές περιοχές $U$, $V$ στό $\mathbb{R}^2$ τῶν $(s_0,0)$ καί $(x_0,y_0)$ ἀντιστοίχως, ὥστε ἡ

$$\Phi : U \longrightarrow V\,,$$

μέ τύπο $\Phi = (X(s,t), Y(s,t))$ νά εἶναι 1-1 καί ἐπί, συνεχῶς διαφορίσιμη καί τό ἴδιο καί ἡ ἀντίστροφή της $\Phi^{-1} = (S(x,y), T(x,y))$. Ἄρα πράγματι τά $X(s,t)$, $Y(s,t)$, $Z(s,t)$ σαρώνουν ἐπιφάνεια δοθέντος ὅτι ἱκανοποιεῖται ἡ (5.9), ἡ ὁποία μᾶς λέγει ὅτι τά διανύσματα $(a,b)$ καί $(f',g')$ δέν εἶναι παράλληλα, ἤ ὅτι ἡ χαρακτηριστική προβολή δέν ἔχει τήν ἴδια διεύθυνση μέ αὐτή τῶν δεδομένων Cauchy στό σημεῖο $P_0$. Ἔχουμε λοιπόν ὅτι:

**Πρόταση 5.3.1** *Ἄν πληροῦται ἡ (5.9) στό σημεῖο $P_0$ τότε ἡ*

$$S \;=\; \{(X(s,t), Y(s,t), Z(s,t)) \,|\, (s,t) \in U\}\,,$$

*ἀποτελεῖ ὁλοκληρωτική ἐπιφάνεια τῆς (5.4).*

**Ἀπόδειξη :**

Πράγματι, γιά κάθε σημεῖο $P \in S$ ἀνήκει στήν $S$ καί ἡ χαρακτηριστική καμπύλη πού διέρχεται ἀπό τό $P$ καί ὡς ἐκ τούτου τό διάνυσμα $(X_t, Y_t, Z_t) = (a(P), b(P), c(P))$, ἀνήκει στόν ἐφαπτόμενο χῶρο τοῦ $P$. $\square$.

Εἶναι δυνατόν νά δειχθεῖ καί εὐθέως ὅτι ἡ ἔμμεσα ὁρισμένη συνάρτηση

$$u(x,y) \;=\; Z(S(x,y), T(x,y))\,,$$

ὅπου $\Phi^{-1} = (S(x,y), T(x,y))$ ἀποτελεῖ λύση τῆς (5.4). [Βλέπε ἄσκηση 2 πού ἀκολουθεῖ.]

Ἔχουμε λοιπόν τοπική ὕπαρξη λύσεων τοῦ προβλήματος Cauchy.

Μοναδικότης:

Προκύπτει ἀπό τήν παρατήρηση ὅτι ἄν $\tilde{S}$ τό γράφημα μιᾶς ἄλλης λύσεως τοῦ προβλήματος Cauchy, τότε ἐφ'ὅσον ἡ $\tilde{S}$ περιέχει τή $\gamma$ θά πρέπει νά περιέχει καί ὅλες τίς χαρακτηριστικές πού διέρχονται ἀπό τά σημεῖα τῆς $\gamma$ καί ὡς ἐκ τούτου θά πρέπει νά ταυτίζεται τοπικά μέ τήν $S$.

ΝΑ ΠΡΟΣΤΕΘΕΙ: Βλέπε Fritz John.

### Ἀσκήσεις 5.3

1. Νά ἀποδειχθοῦν τά *Πορίσματα (5.2.2)* καί *(5.2.3)*.

2. Νά δειχθεῖ ὅτι ἡ ἔμμεσα ὁρισμένη συνάρτηση

$$u(x,y) \;=\; Z(S(x,y),T(x,y)),$$

ὅπου $\Phi^{-1} = (S(x,y),T(x,y))$, ἀποτελεῖ λύση τῆς (5.4) ἡ ὁποιά μάλιστα ἱκανοποιεῖ καί τά δεδομένα Cauchy.

# Κεφάλαιο 6

# Ἐλλειπτική θεωρία

**Ὁρισμός 6.0.1** *Μιά γραμμική μερική διαφορική ἐξίσωση δευτέρας τάξεως*

$$Lu \;=\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \beta_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + \gamma(x)u \;=\; f(x)\,, \qquad (6.1)$$

*ὀνομάζεται ἐλλειπτική στό σημεῖο* $x \in \mathbb{R}^n$, *ἄν ὑπάρχουν θετικές σταθερές* $c$, $C$, *ὥστε*

$$c|\xi|^2 \;\leq\; \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(x)\xi_i\xi_j \;\leq\; C|\xi|^2\,, \qquad (6.2)$$

*γιά κάθε* $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$.

*Ἡ (6.1) ὀνομάζεται ὁμοιόμορφα ἐλλειπτική στό* $\Omega$ *ἄν ἡ (6.2) ἱκανοποιεῖται γιά κάθε* $x \in \Omega$, *μέ θετικές σταθερές* $c$ *καί* $C$ *ἀνεξάρτητες τοῦ* $x$.

Παρατηρεῖστε ὅτι ὁ πιό πάνω ὁρισμός δέν ἔρχεται σέ ἀντίφαση μέ τήν ταξινόμηση τῆς σελίδος 40. Χαρακτηριστικό παράδειγμα ἐλλειπτικῆς ἐξισώσεως ἐξακολουθεῖ νά εἶναι ἡ ἐξίσωση Laplace στίς $n$ διαστάσεις.

## 6.1 Θεμελιώδης λύση τῆς Λαπλασιανῆς

Ἔστω $u,\ v \in C^2(\bar{\Omega})$. Ἔχουμε ἤδη δεῖ τίς πιό κάτω συνέπειες τοῦ θεωρήματος Green:

$$\int_\Omega u\,\Delta v\,dx \;=\; -\int_\Omega \nabla u\cdot\nabla v\,dx + \int_{\partial\Omega} u\frac{\partial v}{\partial\nu}\,ds \tag{6.3}$$

καί

$$\int_\Omega u\,\Delta v\,dx \;=\; \int_\Omega v\,\Delta u\,dx + \int_{\partial\Omega}\left(u\frac{\partial v}{\partial\nu} - v\frac{\partial u}{\partial\nu}\right)ds\,. \tag{6.4}$$

Εἰδικά γιά $u \equiv 1$ ἡ ἀνωτέρω παρέχει:

$$\int_\Omega \Delta v\,dx \;=\; \int_{\partial\Omega}\frac{\partial v}{\partial\nu}\,ds\,.$$

Ἄν τώρα $u = v$ τότε ἡ (6.3) παρέχει:

$$\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx + \int_\Omega u\,\Delta u\,dx \;=\; \int_{\partial\Omega} u\,\frac{\partial u}{\partial\nu}\,ds\,.$$

Ἄρα ἄν $\Delta u = 0$ στό $\Omega$ καί $u = 0$ στό σύνορο τοῦ $\Omega$ τότε $\int_\Omega |\nabla u|^2\,dx = 0$. Ἄρα $\nabla u \equiv 0$ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ εἶναι σταθερή καί τέλος, λόγω τῆς συνοριακῆς συνθήκης, ταυτοτικά μηδενική. Παρομοίως ἄν $\Delta u = 0$ στό $\Omega$ καί $\partial u/\partial\nu = 0$ ἐπί τοῦ $\partial\Omega$ τότε ἐπίσης $\nabla u \equiv 0$ καί ὡς ἐκ τούτου ἡ $u$ θά πρέπει νά εἶναι σταθερή στό $\Omega$. Ἡ παρατήρηση αὐτή μᾶς ὁδηγεῖ στήν ἀπόδειξη τῆς μοναδικότητος λύσεων στά δύο δημοφιλέστερα προβλήματα τῆς *Θεωρίας Δυναμικοῦ*:

[A] Πρόβλημα Dirichlet:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στό } \Omega \\ u = g & \text{ἐπί τοῦ } \partial\Omega\,, \end{cases} \tag{6.5}$$

[B] Πρόβλημα Neumann:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στό } \Omega \\ \frac{\partial u}{\partial\nu} = g & \text{ἐπί τοῦ } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{6.6}$$

Σημειωτέον ὅτι, ἡ μέν λύση τοῦ (6.5) ἄν ὑπάρχει εἶναι μοναδική, ἐνῶ ἡ λύση τοῦ (6.6) ἄν ὑπάρχει εἶναι μοναδική ὡς πρός προσθετική σταθερά. Ἤτοι: ἄν $u_1$ καί $u_2$ λύσεις τοῦ (6.6), τότε ἡ διαφορά τῶν $u_1$ καί $u_2$ θά πρέπει νά εἶναι σταθερά.

Γραμμικός συνδυασμός τῶν προβλημάτων Dirichlet καί Neumann ἀποτελεῖ τό:

[Γ] Πρόβλημα Robin:

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{στό } \Omega \\ \\ \alpha u + \beta \frac{\partial u}{\partial \nu} = g & \text{ἐπί τοῦ } \partial\Omega\,. \end{cases} \tag{6.7}$$

ὅπου $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$. Παρατηρεῖστε ὅτι καί τό ἀνωτέρω ἀπολαμβάνει ἀνάλογης μοναδικότητος.

Κύριο χαρακτηριστικό τῆς ἐξισώσεως Laplace εἶναι ἡ *σφαιρική συμμετρία*. Ἤτοι: ἄν $U \in \mathbb{R}^{n\times n}$ πίνακας στροφῆς καί $\boldsymbol{y} = U\boldsymbol{x}$ νέο σύστημα συντεταγμένων, τότε $\Delta_x = \Delta_y$ ἤ

$$\sum_{k=1,\ldots,n} \partial^2_{x_k} \;=\; \sum_{k=1,\ldots,n} \partial^2_{y_k}\,.$$

Ἐπίσης ἄν ἡ συνάρτηση $u$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Laplace καί $V$ ὀρθογώνιος $n\times n$ πίνακας, τότε καί ἡ συνάρτηση $v(x) = u(Vx+\xi)$, ὅπου $\xi$ σταθερό, ἐπίσης ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Laplace. Τά ἀνωτέρω καθιστοῦν εὔλογη τήν ἀναζήτηση εἰδικῶν λύσεων τῆς ἐξισώσεως Laplace, ἀναλλοιώτων ὡς πρός περιστροφές γύρω ἀπό σταθερό σημεῖο $\xi$, ἤτοι λύσεων τῆς μορφῆς:

$$v = \psi(r)\,, \quad r = |x-\xi| = \left(\sum_{k=1}^{n} |x_k - \xi_k|^2\right)^{1/2}\,.$$

Εὔκολα διαπιστοῦται ὅτι

$$\Delta v \;=\; \psi''(r) + \frac{n-1}{r}\psi'(r) \;=\; 0\,.$$

Ἄρα

$$\psi(r) \;=\; \begin{cases} c\log r & \text{ἄν} \quad n=2 \\ \\ c\frac{r^{2-n}}{2-n} & \text{ἄν} \quad n>2\,. \end{cases}$$

Μποροῦμε βεβαίως νά ἀποκτήσουμε κι'ἄλλες τέτοιες λύσεις προσθέτοντας σταθερές στή $\psi$. Ἡ ἀνωτέρω $\psi = \psi(r)$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση Laplace γιά $r > 0$, ἀπειρίζεται δέ ὅταν $r = 0$. Ὅπως θά δοῦμε πιό κάτω, ἡ $\psi$ γιά κατάλληλη τιμή τῆς σταθερᾶς $c$ καθίσταται θεμελιώδης λύση τῆς Λαπλασιανῆς.

**Πρόταση 6.1.1** *Ἔστω $v(x) = \psi(|x-\xi|)$, ὅπου*

$$\psi(r) \;=\; \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\log r & \text{ἄν} \quad n=2 \\[2ex] \frac{1}{\omega_n}\frac{r^{2-n}}{2-n} & \text{ἄν} \quad n>2\,. \end{cases}$$

*Τότε ἡ $v$ ἱκανοποιεῖ τή συμβολική ἐξίσωση*

$$\Delta v \;=\; \delta_\xi\,,$$

*ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν.*

**Ἀπόδειξη :**

Ἔστω $u \in C^2(\bar\Omega)$, $\xi \in \Omega$, $v(x) = \psi(|x-\xi|)$ καί ἔστω ὅτι ἡ κλειστή σφαίρα[1] κέντρου $\xi$ καί ἀκτίνας $\rho > 0$ , $\bar B(\xi,\rho)$ ἀποτελεῖ ὑποσύνολο τοῦ χωρίου $\Omega$. Ἐφαρμόζουμε τήν ταυτότητα (6.4) γιά τό χωρίο $\Omega_\rho = \Omega \setminus \bar B(\xi,\rho)$ καί λαμβάνουμε:

$$\int_{\Omega_\rho} v\,\Delta u\,dx \;=\; \int_{\Omega_\rho} u\,\Delta v\,dx + \int_{\partial\Omega\cup S(\xi,\rho)}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\,\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)ds\,, \qquad (6.8)$$

ὅπου $S(\xi,\rho)$ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας κέντρου $\xi$ καί ἀκτίνας $\rho$. Ἡ ἐξωτερική κάθετος στή σφαίρα $S(\xi,\rho)$, στό χωρίο $\Omega_\rho$ κατευθύνεται πρός τό $\xi$. Ἔτσι στά ἀνωτέρω ὁλοκληρώματα, ἐπί τῆς σφαίρας $S(\xi,\rho)$ ἔχουμε ὅτι $v = \psi(\rho)$, ἐνῶ $\partial v/\partial\nu = -\psi'(r)$, διότι $\partial v/\partial\nu = \nabla v\cdot\boldsymbol{\nu}$, ὅμως

$$\nabla\psi = \psi'(r)\nabla r, \quad \nabla r = \frac{1}{r}(x-\xi) \quad \text{καί} \quad \boldsymbol{\nu} = -\frac{x-\xi}{r}\,.$$

[1] Ὑπενθυμίζουμε ὅτι τό *ἐμβαδόν* τῆς ἐπιφάνειας $S(\xi,\rho)$ ἰσοῦται μέ $\omega_n\rho^{n-1}$ ἐνῶ ὁ ὄγκος τῆς $B(\xi,\rho)$ ἰσοῦται μέ $\omega_n\rho^n/n$, ὅπου $\omega_n = 2\pi^{n/2}\Gamma(n/2)$.

Ἄρα

$$\nabla r \cdot \boldsymbol{\nu} \;=\; -1\,.$$

Ἔτσι

$$\int_{S(\xi,\rho)} v\,\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds \;=\; \psi(\rho)\int_{S(\xi,\rho)} \frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds \;=\; -\psi(\rho)\int_{B(\xi,\rho)} \Delta u\,dx\,,$$

ἐνῶ

$$\int_{S(\xi,\rho)} u\,\frac{\partial v}{\partial \nu}\,ds \;=\; -\psi'(\rho)\int_{S(\xi,\rho)} u\,ds \;=\; -\frac{1}{\omega_n}\rho^{1-n}\int_{S(\xi,\rho)} u\,ds\,.$$

Ὅμως οἱ $u$, $\Delta u$ εἶναι συνεχεῖς κοντά στό $\xi$ ἄρα $\int_{B(\xi,\rho)} \Delta u\,dx = O(\rho^n)$ καί ὡς ἐκ τούτου:

$$-\psi(\rho)\int_{B(\xi,\rho)} \Delta u\,dx \;=\; \begin{cases} O(\rho^2\log\rho) & \text{ἄν}\quad n=2 \\[2ex] O(\rho^2) & \text{ἄν}\quad n>2\,. \end{cases}$$

Ἄρα

$$\lim_{\rho\to 0}\int_{S(\xi,\rho)} v\frac{\partial u}{\partial \nu}\,ds \;=\; -\lim_{\rho\to 0}\psi(\rho)\int_{B(\xi,\rho)} \Delta u\,dx \;=\; 0\,.$$

Ἐνῶ

$$\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{S(\xi,\rho)} u(s)\,ds \;\longrightarrow\; u(\xi)\,,$$

καθώς $\rho\to 0$ , διότι

$$\begin{aligned}
\left|\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{S(\xi,\rho)} u(s)\,ds - u(\xi)\right| \;&=\; \left|\frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{S(\xi,\rho)} (u(s)-u(\xi))\,ds\right| \\
&\le\; \frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{S(\xi,\rho)} |u(s)-u(\xi)|\,ds \\
&\le\; \max_{s\in S(\xi,\rho)} |u(s)-u(\xi)|
\end{aligned}$$

καί ἐπειδή ἡ $u$ εἶναι συνεχής τότε

$$\lim_{\rho\to 0}\max_{s\in S(\xi,\rho)}|u(s)-u(\xi)| \;=\; 0\,.$$

Ἄρα

$$\lim_{\rho\to 0}\psi'(\rho)\int_{S(\xi,\rho)}u\,ds \;=\; \lim_{\rho\to 0}\frac{1}{\omega_n}\rho^{1-n}\int_{S(\xi,\rho)}u\,ds \;=\; u(\xi)\,.$$

Συνολικά ἡ (6.8) γιά $\rho\to 0$ παρέχει

$$\int_\Omega v\,\Delta u\,dx \;=\; \int_{\partial\Omega}\left(v\,\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\,\frac{\partial v}{\partial\nu}\right)\,ds+u(\xi)\,. \tag{6.9}$$

Σημειωτέον ὅτι τό ἀριστερό μέλος τῆς ἀνωτέρω ὁρίζεται διότι τό γινόμενο $v\Delta u$ ἀποτελεῖ ὁλοκληρώσιμη συνάρτηση στό $\Omega$, ἀφοῦ ἡ $\Delta u$ εἶναι συνεχής, ἡ $v$ εἶναι ὁλοκληρώσιμη ἐνῶ τό $\Omega$ φραγμένο. Ἔστω τώρα $K(x,\xi)=\psi(|x-\xi|)$ ὁπότε ἡ (6.9) δίδει

$$u(\xi) \;=\; \int_\Omega K(x,\xi)\,\Delta u(x)\,dx-\int_{\partial\Omega}\left(K(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu}-u\frac{\partial K}{\partial\nu}\right)ds\,, \tag{6.10}$$

γιά κάθε $\xi\in\Omega$. Παρατηρεῖστε ὅτι ἄν $\xi\notin\bar\Omega$ τότε τό ἀριστερό μέλος τῆς ἀνωτέρω πρέπει νά ἀντικατασταθεῖ μέ το μηδέν λόγω τῆς (2.11) θέτοντας ὅπου $v(x)=K(x,\xi)$ πού ἱκανοποιεῖ, ὡς πρός $x$, τήν ἐξίσωση Laplace στό $\Omega$. Ἄν τό $u$ στήν (6.10) ἀντικατασταθεῖ ἀπό $\varphi\in C_0^\infty(\Omega)$, τότε μηδενίζονται οἱ συνοριακοί ὅροι καί λαμβάνουμε:

$$\varphi(\xi) \;=\; \int_\Omega K(x,\xi)\,\Delta\varphi(x)\,dx\,.$$

Ἤτοι ὁ πυρήνας $K(x,\xi)$ ὁρίζει μιά κατανομή $v$ :

$$v[\varphi] \;=\; \int_\Omega K(x,\xi)\varphi(x)\,dx\,,$$

γιά τήν ὁποία ἰσχύει ὅτι

$$\Delta v[\varphi] \;=\; \varphi(\xi) \;=\; \delta_\xi(\varphi)\,.$$

Ἄρα

$$\Delta v \;=\; \delta_\xi\,,$$

ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν.

**ὅ. ἔ. δ.**

Ἡ ἀνωτέρω πρόταση παρέχει ἐπίσης ὅτι:

*Ὁ πυρήνας $K(x,\xi)$ ἀποτελεῖ θεμελιώδη λύση τῆς $\Delta u = 0$ μέ πόλο τό σημεῖο $\xi$.*

## 6.2 Ἁρμονικές συναρτήσεις

**Ὁρισμός 6.2.1** *Μιά συνάρτηση $u\in C^2(\Omega)$ ὀνομάζεται ἁρμονική (ἀντ. ὑφαρμονική, ἀντ. ὑπεραρμονική) στό $\Omega$, ἄν ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση $\Delta u = 0$ (ἀντ. $\Delta u \geq 0$, ἀντ. $\Delta u \leq 0$ σ'ὅλο τό $\Omega$.*

Ἄν $u$ ἁρμονική τότε λόγω τῆς (6.10) ἔχουμε:

$$u(\xi) \;=\; -\int_{\partial\Omega}\left(K(s,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial K}{\partial\nu}\right)ds\,, \tag{6.11}$$

ἡ ὁποία ἐκφράζει τίς τιμές τοῦ $u$ στό $\Omega$ μέσω τῶν τιμῶν τοῦ $u$ καί $\partial u/\partial\nu$ στό σύνορο τοῦ $\Omega$. Αὐτό ἀποτελεῖ τή λύση τοῦ *προβλήματος Cauchy* στό $\Omega$, δοθέντος ὅτι τέτοια ὑπάρχει. Στήν πραγματικότητα, λόγω τῆς μοναδικότητος λύσεων τοῦ προβλήματος Dirichlet, οἱ τιμές τῆς $u$ στό $\partial\Omega$ παρέχουν το πολύ μία λύση καί ἔτσι δέν μποροῦν ταυτόχρονα νά μᾶς δίδονται καί οἱ τιμές τῶν $u$ καί $\partial u/\partial\nu$ στό σύνορο. Ἔτσι λοιπόν τό πρόβλημα Cauchy δέν ἔχει ἐν γένει λύση γιά τήν ἐξίσωση Laplace.

Ἡ (6.11) μᾶς παρέχει $C^\infty$ ὁμαλότητα τῶν ἁρμονικῶν συναρτήσεων. Δοθέντος ὅτι $K(x,\xi)\in C^\infty$ στό $x$ καί στό $\xi$ ὅταν $x\neq\xi$, ἡ μερική διαφόριση ὡς πρός $\xi_1,\ldots,\xi_n$ εἰσέρχεται στό ὁλοκλήρωμα φυσιολογικά καί ἔτσι $u \in C^\infty(\Omega)$. Στήν πραγματικότητα οἱ ἁρμονικές συναρτήσεις εἶναι *πραγματικές ἀναλυτικές*, ἤτοι τοπικά ἐκφράσιμες ὡς δυναμοσειρές, συμβολικά $u \in C^\omega$. Αὐτό προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι αὐτό συμβαίνει καί στόν πυρήνα $K$.

Ἔστω $w \in C^2(\bar{\Omega})$ ἁρμονική συνάρτηση τότε καί ἡ $G(x,\xi) = K(x,\xi) + w(x)$ ἀποτελεῖ ἐπίσης θεμελιώδη λύση τῆς ἐξισώσεως Laplace. Συγκεκριμένα ἡ (6.10) ἰσχύει καί ὅταν τό $K$ ἀντικατασταθεῖ ἀπό τό $G$:

$$u(\xi) \;=\; \int_\Omega G(x,\xi)\,\Delta u(x)\,dx - \int_{\partial\Omega}\left(G(x,\xi)\frac{\partial u}{\partial\nu} - u\frac{\partial G}{\partial\nu}\right)ds\,. \quad (6.12)$$

Ἐφαρμογή τῆς ἀνωτέρω παρατηρήσεως:

### Νόμος Ἀριθμητικοῦ Μέσου τοῦ Gauss

*Ἔστω ὅτι ἡ συνάρτηση $u$ εἶναι ἁρμονική (ἀντ. ὑφαρμονική, ἀντ. ὑπεραρμονική) συνάρτηση στό $\Omega$ καί $\bar{B}(\xi,\rho) \subset \Omega$. Τότε*

$$u(\xi) \;=\; \frac{1}{\omega_n\rho^{n-1}}\int_{S(\xi,\rho)} u(s)\,ds\,, \quad (\text{ἀντ.} \geq 0,\ \text{ἀντ.} \leq 0.) \qquad (6.13)$$

*ὅπου $\omega_n\rho^{n-1}$ ἡ ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας ἀκτίνας $\rho$.*

Ἄμεση συνέπεια εἶναι ἡ

$$u(\xi) \;=\; \frac{n}{\omega_n\rho^{n}}\int_{B(\xi,\rho)} u(x)\,dx\,, \quad (\text{ἀντ.} \geq 0,\ \text{ἀντ.} \leq 0.)$$

Ὁ Νόμος τοῦ Ἀριθμητικοῦ Μέσου τοῦ Gauss συνήθως διατυποῦται ὡς:

*Ἡ τιμή ἁρμονικῆς συναρτήσεως στό κέντρο σφαίρας ἰσοῦται μέ τό μέσο ὅρο τῶν τιμῶν της στήν ἐπιφάνεια τῆς σφαίρας.*

**Ἀπόδειξη :**

Ἔστω $\Omega = B(\xi,\rho)$ καί

$$G(x,\xi) = K(x,\xi) - \psi(\rho) = \psi(|x-\xi|) - \psi(\rho)\,.$$

Τότε ἐπί τοῦ συνόρου $\partial\Omega$ θά ἔχουμε:

$$G = 0\,, \quad \frac{\partial G}{\partial \nu} = \psi'(\rho) = \frac{\rho^{1-n}}{\omega_n}\,,$$

καί ἔτσι ἡ (6.12) γίνεται:

$$u(\xi) \;=\; \int_{B(\xi,\rho)} (\psi(|x-\xi|) - \psi(\rho))\ \Delta u(x)dx + \frac{1}{\omega_n \rho^{n-1}} \int_{S(\xi,\rho)} u(s)\,ds \tag{6.14}$$

ἀπ' ὅπου προκύπτει ἡ (6.13). $\square$.

## 6.3 Συνελικτική λύση τοῦ μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος

Ἐπιστρέφουμε στίς θεμελιώδεις λύσεις ὅπου, ὅπως θά δοῦμε, συνέπεια τοῦ γεγονότος ὅτι ὁ πυρήνας $K(x,\xi)$ δημιουργεῖ τίς θεμελιώδεις λύσεις τῆς ἐξισώσεως Laplace εἶναι ὁ *τύπος Poisson*:

$$u(\xi) \;=\; \Delta_\xi \int_\Omega K(x,\xi)\,u(x)\,dx\,,$$

γιά κάθε $\xi\in\Omega$ καί $u\in C^2(\bar\Omega)$.

Κατ' αὐτό τόν τρόπο οἱ θεμελιώδεις λύσεις γεννοῦν τίς λύσεις τῆς μή ὁμοιογενοῦς ἐξισώσεως μέσω συνελίξεων.

**Πρόταση 6.3.1** *Ἔστω $f \in C^2(\bar\Omega)$. Τότε ἡ συνάρτηση $v$ πού ὁρίζεται ὡς*

$$v(\xi) \;=\; \int_\Omega K(x,\xi)\,f(x)\,dx\,,$$

*ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως Poisson:*

$$\Delta v \;=\; f\,, \quad \text{στό } \Omega\,.$$

*Συμβολική ἀπόδειξη* τῆς ἀνωτέρω προτάσεως:

$$\begin{aligned}\Delta_\xi \int_\Omega K(x,\xi)\, f(x)\, dx &= \Delta_\xi \textstyle\int_\Omega \psi(|x-\xi|)\, f(x)\, dx \\ &= \textstyle\int_\Omega \Delta_\xi \psi(|x-\xi|)\, f(x)\, dx \\ &= \textstyle\int_\Omega \Delta_x \psi(|x-\xi|)\, f(x)\, dx \\ &= \textstyle\int_\Omega \delta_\xi(x)\, f(x)\, dx \;=\; f(\xi)\,.\end{aligned}$$

**Ἀπόδειξη :**

Ἄς ὑποθέσουμε κατ'ἀρχάς ὅτι $f \in C_0^2(\Omega)$, ὁπότε ἐπεκτείνοντας τήν $f$ ἐκτός τοῦ $\Omega$ ὡς τή μηδενική συνάρτηση, θά ἔχουμε ὅτι $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$. Λόγω τῆς (6.10) λαμβάνουμε:

$$f(\xi) \;=\; \int_\Omega K(x,\xi)\, \Delta f(x)\, dx \;=\; \int_{\mathbb{R}^n} K(x,\xi)\, \Delta f(x)\, dx\,,$$

ἡ ὁποία μάλιστα ἰσχύει γιά κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$. (Γιατί;) Θέτοντας $y = x - \xi$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned}f(\xi) &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x-\xi|)\, \Delta_x f(x)\, dx &&= \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|y|)\, \Delta_y f(y+\xi)\, dy \\ &= \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|y|)\, \Delta_\xi f(y+\xi)\, dy &&= \Delta_\xi \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|y|)\, f(y+\xi)\, dy \\ &= \Delta_\xi \textstyle\int_{\mathbb{R}^n} \psi(|x-\xi|)\, f(x)\, dx &&= \Delta_\xi \displaystyle\int_\Omega K(x,\xi)\, f(x)\, dx\,.\end{aligned}$$

Ἔστω τώρα $u \in C^2(\bar{\Omega})$ καί $\xi \in \Omega$. Ὁπότε ὑπάρχει $r > 0$ ὥστε $\bar{B}(\xi, r) \subset \Omega$ καί $\vartheta \in C_0^\infty(\Omega)$ ὥστε

$$\vartheta|_{B(\xi,r)} \;=\; 1\,.$$

Τότε

$$f \;=\; \vartheta f + (1-\vartheta) f\,,$$

ὅπου $\vartheta f \in C_0^2(\Omega)$ καί ἄρα

$$\Delta_\xi \int_\Omega K(x,\xi)\,\vartheta(x)\,f(x)\,dx \;=\; \vartheta(\xi)f(\xi) \;=\; f(\xi)\,, \qquad (6.15)$$

ἐνῶ

$$\begin{aligned}\Delta_\xi \int_\Omega K(x,\xi)\,(1-\vartheta(x))\,f(x)\,dx &=\\ \Delta_\xi \int_{\Omega\setminus\bar{B}(\xi,r)} K(x,\xi)\,(1-\vartheta(x))\,f(x)\,dx &= 0 \qquad (6.16)\end{aligned}$$

διότι ἡ $K(x,\xi)$ εἶναι ἁρμονική καί ἐπαρκῶς ὁμαλή στό $\Omega\setminus\bar{B}(\xi,r)$. Προσθέτοντας τίς (6.15) καί (6.16) λαμβάνουμε τό ζητούμενο. $\Box$.

### Παρατήρηση

Ἡ *ὑπερβολική ἀπαίτηση* τῆς ἀνωτέρω προτάσεως: $f\in C^2(\bar\Omega)$, μπορεῖ νά βελτιωθεῖ στήν $f\in C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$, ὅπου $\alpha\in(0,1)$ καί $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$ ὁ χῶρος *Hölder*[2]. Ὅμως τό ἀποτέλεσμα τῆς ἀνωτέρω προτάσεως δέν ἰσχύει ὅταν ἡ συνάρτηση $f$ εἶναι ἁπλῶς συνεχής.

Πιό κάτω θά δοῦμε πῶς βελτιώνεται ἡ ἀνωτέρω πρόταση ὅταν $f\in C^1(\Omega)$:

**Πρόταση 6.3.2** *Ἔστω $f\in C^1(\bar\Omega)$. Τότε ἡ συνάρτηση $v$ πού ὁρίζεται ὡς*

$$v(\xi) \;=\; \int_\Omega K(x,\xi)\,f(x)\,dx\,,$$

*ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως Poisson:*

$$\Delta v \;=\; f\,, \quad \text{στό}\,\Omega\,.$$

[2] Ὁ χῶρος Hölder $C^{0,\alpha}(\bar\Omega)$, ὅπου $\alpha\in(0,1)$, ὁρίζεται ὡς τό σύνολο τῶν συναρτήσεων μέ φραγμένη τήν νόρμα

$$\|u\|_{0,\alpha} = \max_{x\in\bar\Omega}|u(x)| + \sup_{x\neq y}\frac{|u(x)-u(y)|}{|x-y|^\alpha}\,,$$

ἡ ὁποία μάλιστα τόν καθιστᾶ χῶρο Banach.

**Ἀπόδειξη :**

Ἄς ὑποθέσουμε κατ'ἀρχάς ὅτι $f\in C_0^1(\Omega)$ καί ἔστω

$$v(\xi) \;=\; \int_\Omega K(x,\xi)\, f(x)\, dx\,.$$

Ἔστω $\Omega_\rho = \Omega \setminus \bar{B}(\xi,\rho)$ γιά ἐπαρκῶς μικρό $\rho$. Τότε ἐπειδή οἱ συναρτήσεις $K$, $\partial_{\xi_k}K$ εἶναι τοπικά ὁλοκληρώσιμες στόν $\mathbb{R}^n$ θά ἔχουμε:

$$\begin{aligned}
\partial_{\xi_k} v(\xi) &= \int_\Omega \partial_{\xi_k} K(x,\xi)\, f(x)\, dx \\
&= \int_\Omega \partial_{x_k} K(x,\xi)\, f(x)\, dx \\
&= \lim_{\rho\to 0} \int_{\Omega_\rho} \partial_{x_k} K(x,\xi)\, f(x)\, dx \\
&= \lim_{\rho\to 0} \left( -\int_{\Omega_\rho} K(x,\xi)\, \partial_{x_k} f(x)\, dx + \int_{S(\xi,\rho)} K(s,\xi)\, f(s)\, \nu_k(s)\, ds \right) \\
&= -\int_\Omega K(x,\xi)\, \partial_{x_k} f(x)\, dx
\end{aligned}$$

καί κατά συνέπεια

$$\partial^2_{\xi_k} v(\xi) \;=\; -\int_\Omega \partial_{\xi_k} K(x,\xi)\, \partial_{x_k} f(x)\, dx \;=\; -\int_\Omega \partial_{x_k} K(x,\xi)\, \partial_{x_k} f(x)\, dx\ .$$

Συνολικά

$$\Delta v(\xi) \;=\; -\int_\Omega \nabla_x K(x,\xi)\cdot \nabla_x f(x)\, dx\,,.$$

Ὅμως

$$\begin{aligned}
-\int_\Omega \nabla_x K(x,\xi)\cdot\nabla_x f(x)\, dx &= -\int_{\mathbb{R}^n} \nabla_x K(x,\xi)\cdot\nabla_x f(x)\, dx \\
&= -\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\xi,\varepsilon)} \nabla_x K(x,\xi)\cdot\nabla_x f(x)\, dx \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \left( \int_{\mathbb{R}^n\setminus B(\xi,\varepsilon)} \Delta_x K(x,\xi)\, f(x)\, dx + \int_{S(\xi,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial\nu} K(s,\xi)\, f(s)\, ds \right) \\
&= f(\xi)\,.
\end{aligned}$$

Διότι ἡ $K(x,\xi)$ εἶναι ἁρμονική, ὡς πρός $x$, καί ὁμαλή στό $\mathbb{R}^n \setminus B(\xi,\varepsilon)$, ἄρα

$$\int_{\mathbb{R}^n \setminus B(\xi,\varepsilon)} \Delta_x K(x,\xi)\, f(x)\, dx \;=\; 0\,,$$

ἐνῶ $\int_{S(\xi,\varepsilon)} \frac{\partial}{\partial \nu} K(s,\xi)\, f(s)\, ds \to f(\xi)$ .(Βλέπε σελίδα 71).

Ἡ περίπτωση $f \in C^1(\bar{\Omega})$ ἀντιμετωπίζεται ὅπως καί στήν ἀπόδειξη τῆς προηγηθείσας προτάσεως. □.

## 6.4 Ἀρχή τοῦ μεγίστου

Μιά ἀπό τίς χαρακτηριστικότερες ἰδιότητες τῶν ἁρμονικῶν συναρτήσεων εἶναι ἡ *Ἀρχή τοῦ Μεγίστου.* Ἡ ἰδιότητα αὐτή γενικεύεται σέ κατάλληλες οἰκογένειες λύσεων ἐλλειπτικῶν ἐξισώσεων.

**Ἀσθενής ἐκδοχή Ἀρχῆς τοῦ Μεγίστου**:

*Ἔστω $\Omega$ φραγμένο, ἀνοικτό καί συνεκτικό χωρίο στόν* $\mathbb{R}^n$. *Ἄν* $u \in C(\bar{\Omega}) \cup C^2(\Omega)$ *μέ* $\Delta u \geq 0$ *στό* $\Omega$ *τότε*

$$\max_{\bar{\Omega}} u \;=\; \max_{\partial\Omega} u\,. \tag{6.17}$$

**Παρατηρήσεις**

1. Τά μέγιστα στόν ἀνωτέρω τύπο λαμβάνονται διότι τά σύνολα $\bar{\Omega}$, $\partial\Omega$ εἶναι συμπαγῆ καί ἡ $u$ συνεχής.

2. Ἄν εἴχαμε τήν ἰσχυρότερη ὑπόθεση ὅτι $\Delta u > 0$ στό $\Omega$, τότε ἡ $u$ δέν θά μποροῦσε νά λαμβάνει μέγιστό σέ κάποιο $\xi \in \Omega$, διότι σέ σημεῖα τοπικοῦ μεγίστου οἱ δεύτερες παράγωγοι εἶναι μή θετικές.

**Ἀπόδειξη :**

Ἔστω $u_\varepsilon = u + \varepsilon |x|^2$. Τότε

$$\Delta u_\varepsilon \;=\; \Delta u + 2n\varepsilon > 0\,,.$$

Ἄρα, λόγω τῆς προηγηθείσης παρατηρήσεως, ἡ $u_\varepsilon$ λαμβάνει τό μέγιστό της ἐπί τοῦ συνόρου, ἤτοι:

$$\max_{\bar\Omega} u_\varepsilon \;=\; \max_{\partial\Omega} u_\varepsilon\,. \tag{6.18}$$

Ἔχουμε ὅμως

$$\max_{\bar\Omega} |x|^2 \;=\; \max_{\partial\Omega} |x|^2\,,$$

διότι $\Delta(|x|^2) = 2n > 0$. Ἄρα ἡ (6.18) μᾶς δίδει:

$$\begin{aligned}\max_{\bar\Omega} u \;&\leq\; \max_{\bar\Omega} u_\varepsilon\\ &\leq\; \max_{\partial\Omega} u + \varepsilon \max_{\partial\Omega} |x|^2\end{aligned}$$

καί ἐφ'ὅσον ἡ ἀνωτέρω ἰσχθύει γιά κάθε $\varepsilon > 0$ τότε ἰσχύει καί γιά $\varepsilon = 0$. □.

Ἄν ἡ $u$ ἦταν *ὑπεραρμονική*, δηλαδή $\Delta u \leq 0$, τότε παρομοίως θά εἴχαμε:

$$\min_{\bar\Omega} u \;=\; \min_{\partial\Omega} u\,. \tag{6.19}$$

Ἐνῶ στήν περίπτωση ἁρμονικῆς $u$ ἔχουμε:

**Πόρισμα 6.4.1** *Ἔστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, ἀνοικτό καί συνεκτικό. Ἄν $u \in C(\bar\Omega) \cup C^2(\Omega)$ μέ $\Delta u = 0$ στό $\Omega$ τότε*

$$\max_{\bar\Omega} |u| \;=\; \max_{\partial\Omega} |u|\,. \tag{6.20}$$

**Παρατήρηση**

Τό ἀνωτέρω πόρισμα ἔχει ὡς συνέπεια τή μοναδικότητα λύσεων στό *Πρόβλημα Dirichlet* χωρίς νά προϋποτίθεται ὅτι τό $\Omega$ ἔχει ὁμαλό σύνορο καί ὅτι ἡ $u$ ἔχει παραγώγους ἐπί τοῦ $\partial\Omega$.

**Ἰσχυρά ἐκδοχή ἀρχῆς τοῦ μεγίστου**:

*Ἔστω $\Omega$ φραγμένο, ἀνοικτό καί συνεκτικό χωρίο στόν $\mathbb{R}^n$. Ἄν $u \in C^2(\Omega)$ μέ $\Delta u \geq 0$ στό $\Omega$ τότε εἴτε ἡ $u$ εἶναι σταθερή ἤ θά ἰσχύει*

$$u(\xi) \;<\; \sup_{\Omega} u\,,$$

*γιά κάθε $\xi \in \Omega$.*

**Ἀπόδειξη :**

Ἔστω ὅτι $M = \sup_{\Omega} u < +\infty$ καί θέτουμε

$$\Omega_- = \{\xi \in \Omega | u(\xi) < M\} \quad , \quad \Omega_+ = \{\xi \in \Omega | u(\xi) = M\}\,,$$

Προφανῶς τό $\Omega_-$ εἶναι ἀνοικτό. Θά δείξουμε ὅτι καί τό $\Omega_+$ εἶναι ἐπίσης ἀνοικτό καί λόγω τῆς συνεκτικότητος τοῦ $\Omega = \Omega_- \cup \Omega_+$, ἕνα ἀπό τά $\Omega_-$, $\Omega_+$ θά πρέπει νά εἶναι κενό. Ἔστω $\xi \in \Omega_+$ καί $\rho$ τέτοιο ὥστε $\bar{B}(\xi,\rho) \subseteq \Omega$. Τότε λόγω τῆς (6.13) ἔχουμε:

$$\begin{aligned} 0 \;&\leq\; \int_{S(\xi,\rho)} u(s)ds - \omega_n \rho^{n-1} u(\xi) \\ &=\; \int_{S(\xi,\rho)} (u(s) - u(\xi))\; ds \;=\; \int_{S(\xi,\rho)} (u(s) - M)\, ds\,. \end{aligned}$$

Ἐπειδή ὅμως $u(x) \leq M$ καί $u$ συνεχής τότε ὑποχρεωτικά θά πρέπει νά ἰσχύει $u(x) = M$ σ᾽ὅλη τήν κλειστή σφαίρα $\bar{B}(\xi,\rho)$. □.

**Πόρισμα 6.4.2** *Ἔστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ φραγμένο, ἀνοικτό καί συνεκτικό καί $u \in C^2(\Omega) \cup C(\bar{\Omega})$ μέ $\Delta u \geq 0$ στό $\Omega$. Τότε εἴτε ἡ $u$ εἶναι σταθερή ἤ θά ἰσχύει*

$$u(\xi) \;<\; \max_{\bar{\Omega}} u\,,$$

*γιά κάθε $\xi \in \Omega$.*

# Κεφάλαιο 7

# Ὑπερβολικές ἐξισώσεις

## 7.1 Μονοδιάστατη ἐξίσωση κύματος

Ἡ μονοδιάστατη ἐξίσωση κύματος

$$u_{tt} \;=\; c^2 u_{xx}\,, \tag{7.1}$$

ὅπου $t$ ὁ χρόνος καί $x$ ἡ χωρική μεταβλητή, περιγράφει τήν ἀπομάκρυνση παλλόμενης ὁμοιογενοῦς χορδῆς καί ἀποτελεῖ τό ἁπλούστερο καί χαρακτηριστικότερο παράδειγμα ὑπερβολικῆς ἐξισώσεως[1]. Ἡ θετική σταθερά $c$ ἀποτελεῖ τήν ταχύτητα διαδόσεως τοῦ περιγραφόμενου κύματος. Ἡ ἐξίσωση κύματος ἁπλοποιεῖται μέ τόν ἀκόλουθο μετασχηματισμό:

$$\xi \;=\; x - ct\,, \quad \eta \;=\; x + ct\,,$$

ἤ

$$\begin{pmatrix} \xi \\ \eta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -c \\ 1 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}.$$

[1] Βλέπε σχετική ἀναφορά στή σελίδα 4.

Ὁπότε

$$\begin{aligned} u_x &= u_\xi \xi_x + u_\eta \eta_x &= u_\xi + u_\eta \\ u_t &= u_\xi \xi_t + u_\eta \eta_t &= c u_\eta - c u_\xi \,. \end{aligned}$$

Ἄρα[2]

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \quad , \quad \frac{\partial}{\partial t} = c\frac{\partial}{\partial \eta} - c\frac{\partial}{\partial \xi}$$

καί ἐν τέλει

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} - c^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left( c\frac{\partial}{\partial \eta} - c\frac{\partial}{\partial \xi} \right)^2 - c^2 \left( \frac{\partial}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial \eta} \right)^2 = -4c^2 \frac{\partial}{\partial \xi}\frac{\partial}{\partial \eta} \,.$$

Ἄρα λοιπόν

$$u_{tt} - c^2 u_{xx} = -4c^2 u_{\xi\eta}$$

καί ἔτσι ἡ ἐξίσωση κύματος καθίσταται ἰσοδύναμη τῆς ἐξισώσεως

$$u_{\xi\eta} = 0 \,,$$

μέ γενική λύση

$$u = F(\xi) + G(\eta) = F(x + ct) + G(x - ct) \,. \tag{7.2}$$

Ἡ ἀνωτέρω ἔκφραση ἀποτελεῖ λύση τῆς (7.1) γιά κάθε $F$, $G$ δίς συνεχῶς διαφορίσιμες συναρτήσεις, ὅπως δύναται νά διαπιστωθεῖ εὔκολα.

[2] Γενικότερα ἄν $y = Ax$, ὅπου $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n)$ καί $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$, σταθερός πίνακας, τότε

$$D_x = \left( \frac{\partial}{\partial_{x_1}}, \ldots, \frac{\partial}{\partial_{x_n}} \right) = A^T D_y \,.$$

Δηλαδή

$$\frac{\partial}{\partial x_k} = \sum_{l=1}^{n} a_{lk} \frac{\partial}{\partial y_l} \,.$$

Ἀνάλογα προκύπτει ἡ περίπτωση κατά τήν ὁποία ὁ πίνακας $A$ δέν εἶναι σταθερός καθώς καί οἱ τύποι τῶν πολλαπλῶν διαφορικῶν.

Ἄν ὅμως ὑποτεθεῖ ἁπλῶς ὅτι $F,\ G \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$, τότε ἡ $u$ ἐξακολουθεῖ νά ἀποτελεῖ λύση ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν. [Βλέπε ἄσκηση 1, σελίδα 88.]

### 7.1.1 Τό ὁμοιογενές πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

Ἡ ἐξίσωση κύματος ἐμφανίζεται συνήθως ὡς πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν ὑπό τήν ἀκόλουθη ἐκδοχή:

$$\begin{cases} u_{tt} \ = c^2 u_{xx}\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ \\ u(x,0) \ = \ f(x)\,, \quad u_t(x,0) \ = \ g(x)\,, \end{cases} \tag{7.3}$$

ὅπου $f \in C^2(\mathbb{R})$, $g \in C^1(\mathbb{R})$. Λύση τοῦ (7.3) προκύπτει ἀπό τήν (7.2), ὅπου οἱ $F$ καί $G$ μποροῦν νά βρεθοῦν μέσω τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν. Συγκεκριμένα

$$\begin{aligned} f(x) \ &= \ u(x,0) \ &= \ F(x) + G(x)\,, \\ g(x) \ &= \ u_t(x,0) \ &= \ cF'(x) - cG'(x)\,. \end{aligned}$$

Ἄρα εὔκολα ἔχουμε ὅτι

$$F'(x) \ = \ \frac{1}{2c}(cf'(x) + g(x))\,, \quad G'(x) \ = \ \frac{1}{2c}(cf'(x) - g(x))\,.$$

Ἔτσι λοιπόν

$$\begin{aligned} u(x,t) \ &= \ F(x+ct) + G(x-ct) \\ &= \ \int_0^{x+ct} F'(y)\,dy + \int_0^{x+ct} G'(y)\,dy + \alpha \\ &= \ \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy + \alpha\,. \end{aligned}$$

ὅπου $\alpha$ σταθερά. Ἡ τιμή τῆς σταθερᾶς $\alpha$ εἶναι μηδέν λόγω τῆς ἀρχικῆς συνθήκης $u(x,0) = f(x)$. Τελικά λοιπόν ἔχουμε:

$$u(x,t) \ = \ \frac{1}{2}(f(x-ct) + f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy\,. \tag{7.4}$$

Ὁ ἀνωτέρω εἶναι γνωστός ὡς τύπος d'Alembert[3]. Παρατηρεῖστε ὅτι ἄν $f\in C^2$ καί $g\in C^1$ τότε $u\in C^2$. Γενικότερα ἄν $f\in C^{k+1}$ καί $g\in C^k$ τότε $u\in C^{k+1}$ γιά κάθε $k\geq 1$.

### 7.1.2 Πεδίο ἐξαρτήσεως καί κῶνος ἐπιρροῆς

Χαρακτηριστική ἰδιότητα τῶν ὑπερβολικῶν ἐξισώσεων εἶναι ἡ πεπερασμένη ταχύτητα διαδόσεως τῶν πληροφοριῶν. Συγκεκριμένα, στήν ἐξίσωση κύματος, ἡ ταχύτητα αὐτή δέν μπορεῖ νά ξεπερνᾶ τό $c$. Ἡ (7.4) μᾶς λέγει ὅτι ἡ λύση $u$ στό σημεῖο $(x,t)$ ἐξαρτᾶται ἀπό τά ἀρχικά δεδομένα στό διάστημα $[x-ct,x+ct]$. Ὁποιαδήποτε πληροφορία βρίσκεται ἐκτός αὐτοῦ τοῦ διαστήματος δέν μπορεῖ νά ἐπηρεάσει τή λύση στό σημεῖο $(x,t)$.

Ἰσοδύναμα, οἱ ἀρχικές τιμές στό σημεῖο $x_0\in\mathbb{R}$ ἐπηρεάζουν τίς τιμές τῆς λύσεως στό *φωτεινό κῶνο*:

$$C_{x_0} \;=\; \{(x,t)\,|\,|x-x_0|\leq ct\,\}\,.$$

Ἀνάλογες ἰδιότητες ἔχουμε καί γιά τήν ἐξίσωση κύματος σέ περισσότερες χωρικές διαστάσεις.

### 7.1.3 Τό καλῶς τοποθετημένο τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

Στίς διαφορικές ἐξισώσεις *Τό Καλῶς Τοποθετημένο* (*Well-Posedness*) ἑνός προβλήματος, περιλαμβάνει τά ἑξῆς σκέλη

1. *Ὕπαρξη λύσεως.* Ἤτοι: Τό πρόβλημα ἔχει πράγματι λύση.

2. *Μοναδικότητα λύσεως.* Ἤτοι: Ἡ λύση εἶναι μοναδική.

[3] Jean le Rond d'Alembert (1717-1783), Γάλλος Φιλόσοφος καί Μαθηματικός.

3. *Εὐστάθεια λύσεως.* Ἤτοι: Ἡ λύση ἐξαρτᾶται ὁμαλά ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες ἤ συνοριακές, ἄν τέτοιες περιλαμβάνονται στό πρόβλημα, καθώς καί ὁποιεσδήποτε παραμέτρους ἔχει τό πρόβλημα. *Ὁμαλῶς* σημαίνει: *Μικρές διαταραχές τῶν δεδομένων συνεπάγονται μικρές διαταραχές τῆς λύσεως* ἤ *Οἱ διαταραχές τῆς λύσεως ἐλέγχονται ἀπό τίς διαταραχές τῶν δεδομένων.* Ἡ εὐστάθεια λοιπόν σχετίζεται τόσο μέ τήν ἐπιλογή τῶν νορμῶν, ὅσο καί τῶν παραμέτρων.

Στό (7.3) ἔχουμε τόσο ὕπαρξη ὅσο καί μοναδικότητα. Ἡ συνάρτηση $u$ πού δίδεται ἀπό τήν (7.4) πράγματι ἀποτελεῖ λύση ὅπως μπορεῖ εὔκολα νά ἐξακριβωθεῖ. Ἄν $v$ ἄλλη, τότε εἴδαμε ὅτι θά πρέπει νά εἶναι τῆς μορφῆς (7.2) καί λόγω τῶν ἀρχικῶν συνθηκῶν δέν ἔχει ἄλλη ἐπιλογή ἀπό τό νά ἰσοῦται μέ τή $u$.

Ἡ λύση τοῦ (7.3) ἐξαρτᾶται γραμμικά ἀπό τίς ἀρχικές συνθῆκες $f$ καί $g$. Ἐξαρτᾶται ὅμως καί *ὁμαλά*. Ἄν

$$u \;=\; u(x,t;f,g) \;=\; \frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy\,,$$

τότε

$$|u(x,t;\tilde f,\tilde g) - u(x,t;f,g)| \le \frac{1}{2}|\tilde f(x-ct) - f(x-ct)|$$

$$+\frac{1}{2}|\tilde f(x+ct) - f(x+ct)| + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} |\tilde g(y) - g(y)|\,dy\,,$$

ὁπότε

$$||u(\cdot,t;\tilde f,\tilde g) - u(\cdot,t;f,g)||_\infty \;\;\le\;\; ||\tilde f - f||_\infty + t||\tilde g - g||_\infty\,.$$

Ἡ μεταβολή λοιπόν τῶν $f$ καί $g$, ὡς πρός τήν $L^\infty$-νόρμα ἐλέγχει τή μεταβολή τῆς $u$, ὡς πρός τήν ἴδια νόρμα, γιά κάθε δεδομένη χρονική στιγμή. Ἔχουμε λοιπόν $L^\infty$ εὐστάθεια.

Ἡ $u$ εἶναι εὐσταθής καί ὡς πρός $c$. [Βλέπε ἄσκηση 7 πού ἀκολουθεῖ.]

## Ἀσκήσεις 7.1

1. Ἔστω ὅτι $F,\ G \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$. Δείξατε ὅτι ἡ
$$u(x,t) \ = \ F(x-ct)+G(x+ct)\,,$$
ἀποτελεῖ λύση τῆς ἐξισώσεως κύματος ὑπό τήν ἔννοια τῶν κατανομῶν. Ἤτοι: *Γιά κάθε* $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ *ἰσχύει ὅτι*
$$\int_{\mathrm{I}}\mathrm{R}\int_{\mathrm{I}}\mathrm{R}\, u(x,t)(\varphi_{tt}(x,t)-c^2\varphi_{xx}(x,t))dx\,dt \ = \ 0\,.$$

2. **Ἀρχή τοῦ παραλληλογράμμου:** *Ἔστω παραλληλόγραμμου $AB\Gamma\Delta$ τοποθετημένο στό ἡμιεπίπεδο $H=\{(x,t)\,|\,t\geq 0\}$ καί τοῦ ὁποῖες οἱ πλευρές εἶναι παράλληλες πρός τήν εὐθεία $x=ct$ ἤ τήν εὐθεία $x=-ct$. Ἄν ἡ $u$ εἶναι δίς συνεχῶς διαφορίσιμη στό $H$ καί ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση κύματος στό $H$ τότε*
$$u(A)+u(G) \ = \ u(B)+u(D)\,. \tag{7.5}$$
Ἀντιστρόφως: *Ἄν $u\in C^2(H)$ καί ἡ $u$ ἱκανοποιεῖ τήν (7.5) γιά κάθε παραλληλόγραμμο στό $H$ μέ πλευρές παράλληλες πρός τίς εὐθεῖες $x=ct$ ἤ $x=-ct$, τότε ἡ $u$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση κύματος.*

3. (Συνέχεια) Ἄν $u$ συνεχής συνάρτηση ἐπί τοῦ $\mathbb{R}^2$ ἡ ὁποία ἱκανοποιεῖ τήν ἀρχή τοῦ παραλληλογράμμου, τότε δείξατε ὅτι ἡ $u$ ἀποτελεῖ ἀσθενῆ λύση τῆς (7.3).

4. (Συνέχεια) Χρησιμοποιώντας κατάλληλα τήν *Ἀρχή τοῦ Παραλληλογράμμου* ἀναπτύξατε μεθοδολογία ἐπιλύσεως τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν/συνοριακῶν τιμῶν:
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx} \ = \ 0\,, \quad x>0\,,\ t>0\,, \\ \\ u(x,0)=f(x)\,,\ \ u_t(x,0)=g(x)\,,\ u(0,t)=h(t) \quad x>0,\, t>0\,. \end{cases}$$

5. Νά ἀναπτυχθεῖ μέθοδος ἐπιλύσεως τοῦ πιό κάτω μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν:
$$\begin{cases} u_{tt}-c^2u_{xx} \ = \ h(x)\,, \quad x\in\mathbb{R}\,, \quad t>0\,, \\ \\ u(x,0) \ = \ f(x)\,, \quad u_t(x,0) \ = \ g(x)\,. \end{cases}$$
[**Ὑπόδειξη:** Ἀναζητεῖστε εἰδική λύση τῆς μερικῆς διαφορικῆς ἐξισώσεως πού ἐξαρτᾶται μόνο ἀπό τό $x$.]

6. Νά μελετηθεῖ κατά πόσον ἔχουμε $L^p$-εὐστάθεια, ὅπου $p\in[1,+\infty)$, τῶν λύσεων τοῦ (7.3) ὡς πρός τίς ἀρχικές συνθῆκες.

7. Πόσο εὐσταθῶς ἐξαρτᾶται ἡ λύση τοῦ (7.3) ἀπό τό $c$;

## 7.2 Τό μή ὁμοιογενές πρόβλημα

Ἔστω τώρα ὅτι μᾶς δίδεται ἡ μή ὁμοιογενής ἐκδοχή τοῦ (7.3)

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} \;=\; f(x,t)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) \;=\; g(x)\,, \quad u_t(x,0) \;=\; h(x)\,. \end{cases} \tag{7.6}$$

ὅπου $f$ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση ἡ ὁποία ἀντιπροσωπεύει τήν ἐξωτερική δύναμη. Παρατηροῦμε ὅτι ἄν $u = u(x,t;f,g,h)$ ἡ λύση τοῦ (7.6), τότε

$$u(x,t;f,g,h) \;=\; u(x,t;0,g,h) + u(x,t;f,0,0)\,.$$

Ἡ λύση λοιπόν τοῦ (7.6) θά προκύψει μέσω *Ὑπερθέσεως* (*Superposition*) τῆς λύσεως τοῦ (7.3) καί λύσεως τοῦ (7.6) μέ ὁμοιογενεῖς ἀρχικές συνθῆκες:

$$\begin{cases} u_{tt} - c^2 u_{xx} \;=\; f(x,t)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,, \quad t > 0\,, \\ u(x,0) \;=\; u_t(x,0) \;=\; 0\,. \end{cases} \tag{7.7}$$

Πρός ἐπίλυση τοῦ (7.7) εἰσάγουμε ἐκ νέου τήν ἀλλαγή μεταβλητῶν

$$\xi \;=\; x - ct\,, \quad \eta \;=\; x + ct\,,$$

πού μετατρέπει τό (7.7) στό

$$\begin{cases} U_{\xi\eta} \;=\; -\frac{1}{4c^2} F(\xi,\eta)\,, \\ U(s,s) = U_\xi(s,s) = U_\eta(s,s) = 0\,, \quad s \in \mathbb{R}\,, \end{cases} \tag{7.8}$$

ὅπου

$$U(\xi,\eta) = u\left(\frac{\xi+\eta}{2}, -\frac{\xi-\eta}{2c}\right)\,, \quad F(\xi,\eta) = f\left(\frac{\xi+\eta}{2}, -\frac{\xi-\eta}{2c}\right)\,.$$

Ὁλοκληρώνοντας τήν $U_{\xi\eta}$ ὡς πρός τήν πρώτη μεταβλητή στό διάστημα $[\xi,\eta]$ λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} U_\eta(\xi,\eta) &= U_\eta(\eta,\eta) + \int_\eta^\xi U_{\xi\eta}(s,\eta)\,ds \\ &= -\frac{1}{4c^2}\int_\eta^\xi F(s,\eta)\,ds\,. \end{aligned}$$

Ἀκολούθως ὁλοκληρώνουμε ὡς πρός τή δεύτερη μεταβλητή ἐπίσης στό $[\xi,\eta]$, ὁπότε

$$\begin{aligned} U(\xi,\eta) &= U(\xi,\xi) + \int_\xi^\eta U_\eta(\xi,\vartheta)\,d\vartheta \\ &= -\frac{1}{4c^2}\int_\xi^\eta\int_\vartheta^\xi F(s,\vartheta)\,ds\,d\vartheta\,. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Χρησιμοποιοῦμε τώρα τόν ἀντίστροφο μετασχηματισμό

$$\tau = -\frac{s-\vartheta}{2c}, \quad \sigma = \frac{s+\vartheta}{2}, \tag{7.10}$$

μέ Ἰακωβιανή $2c$. Τό πεδίο ὁλοκληρώσεως στό (7.9) περιγραφέται τώρα στόν χῶρο τῶν $(\sigma,\tau)$ ὡς

$$T_{(x,t)} = \{(\sigma,\tau) \mid |\sigma - x| \le t-\tau\}\,.$$

Ἔτσι ἡ (7.9) ἐν τέλει δίδει

$$u(x,t) = \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t+\tau)} f(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\,. \tag{7.11}$$

Παρατηρεῖστε ὅτι τό δεξιό μέρος τῆς ἀνωτέρω ἀποτελεῖ τό μέσο ὅρο τῆς $f$ στό τρίγωνο $T_{(x,t)}$ πολλαπλασιασμένο ἐπί $t/2$. Συνολικά λοιπόν ἡ λύση τοῦ (7.6) δίδεται ἀπό τόν τύπο:

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \frac{1}{2}(f(x-ct)+f(x+ct)) + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} g(y)\,dy \\ &\quad + \frac{1}{2c}\int_0^t\int_{x-c(t-\tau)}^{x+c(t+\tau)} f(\sigma,\tau)\,d\sigma\,d\tau\,. \end{aligned}$$

## Ἀσκήσεις 7.2

1. Νά ἐξακριβωθεῖ ὅτι τό δεξιό μέλος τῆς (7.11) πράγματι ἀποτελεῖ λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (7.6).

2. Νά μελετηθεῖ τό καλῶς τοποθετημένο τοῦ μή ὁμοιογενοῦς προβλήματος (7.6). Συγκεκριμένα πῶς μπορεῖ νά φραχθεῖ ἡ $L^\infty$ νόρμα τῆς διαφορᾶς

$$u(\cdot,t;\tilde f,\tilde g,\tilde h)-u(\cdot,t;f,g,h)$$

ἀπό τίς τίς νόρμες τῶν ἀντιστοίχων διαφορῶν τῶν ἀρχικῶν δεδομένων καί τοῦ μή ὁμοιογενοῦς ὅρου.

## 7.3 Ὑπερβολικά συστήματα

Ἕνα γραμμικό σύστημα πρώτης τάξεως δύο μεταβλητῶν ἔχει τή ἀκόλουθη μορφή

$$A(x,t)\boldsymbol{u}_t+B(x,t)\boldsymbol{u}_x \;=\; C(x,t)\boldsymbol{u}+\boldsymbol{d}(x,t)\,. \tag{7.12}$$

Ἡ ζητούμενη συνάρτηση ‛ $\boldsymbol{u}=(u^1,\dots,u^n)$, ἀποτελεῖ $n$-διάστατο διάνυσμα, οἱ συντελεστές $A$, $B$ καί $C$ ἀποτελοῦν πίνακες $n\times n$, (τούς πίνακες τῶν συντελεστῶν), ἐνῶ $\boldsymbol{d}$, ὁ μή ὁμοιογενής ὅρος, ἐπίσης $n$-διάστατο διάνυσμα. Τό πρόβλημα Cauchy συμπληρώνεται μέ τά δεδομένα Cauchy:

$$\boldsymbol{u}(x,\varphi(x)) \;=\; \boldsymbol{f}(x)\,,\quad x\in I\,. \tag{7.13}$$

Ἡ ὁμαλή καμπύλη $t=\varphi(x)$ ἀποτελεῖ τήν προβολή τῶν δεδομένων Cauchy, ἐνῶ $\boldsymbol{f}=(f^1,\dots,f^n)$. Ἡ καμπύλη ἐπί τῆς ὁποίας περιγράφονται τά δεδομένα Cauchy ὀνομάζεται *μή χαρακτηριστική* ἄν ἐπ' αὐτῆς, συνδυάζοντας τή μερική διαφορική ἐξίσωση (7.12) καί τά δεδομένα Cauchy (7.13), μποροῦμε νά ὑπολογίσουμε ὅλες τίς μερικές παραγώγους τίς $\boldsymbol{u}$ ἐπί τῆς καμπύλης αὐτῆς. Συγκεκριμένα ἀπό τήν (7.13) προκύπτει ὅτι

$$\boldsymbol{u}_x(x,\varphi(x))+\varphi'(x)\boldsymbol{u}_t(x,\varphi(x)) \;=\; \boldsymbol{f}'(x)\,, \tag{7.14}$$

καί σέ συνδυασμό μέ τήν (7.12) ὅτι

$$(A(x,t) - \varphi'(x)B(x,t))\,\boldsymbol{u}_t \;=\; C(x,t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}(x,t) - B(x,t)\boldsymbol{f}'(x,t)\,.$$

Ἄρα, ἄν γνωρίζουμε τήν $\boldsymbol{u}_t$, μποροῦμε νά βροῦμε καί τήν $\boldsymbol{u}_t$ ἀπό τήν (7.14) καί διαδοχικά ὅλες τίς μερικές παραγώγους τῆς $\boldsymbol{u}$ ἐπί τῆς $t = \varphi(x)$, ἄν βεβαίως τά $A$, $B$, $C$, $\boldsymbol{d}$, $\boldsymbol{f}$ καί $\varphi$ εἶναι ἐπαρκῶς ὁμαλά. Ὡς ἐκ τούτου ἡ *Συνθήκη Μή Χαρακτηριστικότητος* στή συγκεκριμένη περίπτωση εἶναι

$$\det\left(A(x,t) - \varphi'(x)B(x,t)\right) \;\neq\; 0\,.$$

Ἄν δέ τά δεδομένα Cauchy ἐδίδοντο ὡς

$$\boldsymbol{u}(f(s), g(s)) \;=\; \boldsymbol{h}(s)\,, \quad s \in I\,,$$

τότε ἡ συνθήκη μή χαρακτηριστικότητος θά ἦταν

$$\det\left(f'(s)A(f(s), g(s)) - g'(s)B(f(s), g(s))\right) \;\neq\; 0\,.$$

Ἰδιαιτέρως στήν περίπτωση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν ὅπου τά δεδομένα Cauchy περιγράφονται ἐπί τῆς εὐθείας $t = 0$, ἡ συνθήκη μή χαρακτηριστικότητος εἶναι $\det A \neq 0$. Ἔτσι λοιπόν, στήν περίπτωση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν, μποροῦμε νά ἀπαλλαγοῦμε ἀπό τό πίνακα $A$ πολλαπλασιάζοντας τήν ἐξίσωσή μας ἐπί $A^{-1}$. Τό μή χαρακτηριστικό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν γράφεται στήν ἑξῆς μορφή:

$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + B(x,t)\boldsymbol{u}_x \;=\; C(x,t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}(x,t) \\ \\ \boldsymbol{u}(x,0) \;=\; \boldsymbol{f}(x)\,. \end{cases} \tag{7.15}$$

Στήν περίπτωση αὐτή χαρακτηριστική εἶναι μιά καμπύλη $x = \xi(t)$ γιά τήν ὁποία

$$\det\left(\xi'(t)I - B(\xi(t), t)\right) \;\neq\; 0\,.$$

Ἰσοδύναμα λύση τῆς συνήθους διαφορικῆς ἐξισώσεως

$$\xi' \;=\; \lambda_k(\xi, t)\;,$$

ὅπου $\lambda_k(x,t)$ ἰδιοτιμή τοῦ πίνακα $B(x,t)$.

Ξεχωριστό ἐνδιαφέρον παρουσιάζει ἡ περίπτωση τῶν συστημάτων στά ὁποία ὁ πίνακας $B = B(x,t)$, εἶναι διαγωνοποιήσιμος μέ πραγματικές ἰδιοτιμές.

**Ὁρισμός 7.3.1** *Τό γραμμικό σύστημα μερικῶν διαφορικῶν ἐξισώσεων*

$$\boldsymbol{u}_t + B(x,t)\boldsymbol{u}_x \;=\; C(x,t)\boldsymbol{u} + \boldsymbol{d}(x,t)\,,$$

*ὀνομάζεται ὑπερβολικό ἄν ὁ πίνακας $B$ εἶναι διαγωνοποιήσιμος μέ πραγματικές ἰδιοτιμές. Ἤτοι:*

$$B(x,t) \;=\; U^{-1}(x,t)\Lambda(x,t)U(x,t)\,,$$

*ὅπου $\Lambda(x,t) = \operatorname{diag}(\lambda_1(x,t),\ldots,\lambda_n(x,t))$.*

**Παρατήρηση**

Ὁ ἀνωτέρω ὁρισμός μπορεῖ εὔκολα νά γενικευθεῖ στήν περίπτωση οἱονεί γραμμικοῦ συστήματος.

Σέ μιά τέτοια περίπτωση γραμμικοῦ συστήματος τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν (7.15) γράφεται ἰσοδύναμα ὡς

$$\begin{cases} \boldsymbol{v}_t + \Lambda(x,t)\boldsymbol{v}_x \;=\; \tilde{C}(x,t)\boldsymbol{v} + \tilde{\boldsymbol{d}}(x,t)\,, \\[2ex] \boldsymbol{v}(x,0) \;=\; \tilde{\boldsymbol{f}}(x)\,, \end{cases} \tag{7.16}$$

ὅπου $\boldsymbol{v} = U\boldsymbol{u}$, $\tilde{C} = U_x + \Lambda U_x + UCU^{-1}$, $\tilde{\boldsymbol{d}} = U\boldsymbol{d}$ καί $\tilde{\boldsymbol{f}} = U\boldsymbol{f}$. Χάριν ἁπλουστεύσεως, θά ἀπαλλαγοῦμε ἀπό τίς περισπωμένες ( $\tilde{}$ ), ὁπότε τό (7.16) γράφεται ἰσοδύναμα ὡς

$$\begin{cases} v^k_t + \lambda_k v^k_x \;=\; \sum_{i=1}^n c_{ik}v^k + d^k\,, \\[2ex] v^k(x,0) \;=\; f^k(x)\,. \end{cases} \tag{7.17}$$

γιά κάθε $k, i = 1, \ldots, n$, ὅπου $\boldsymbol{v} = (v_1, \ldots, v^n)$, $\lambda_k$, $c_{ik}$, $d_k$ καί $f_k$ εἶναι συναρτήσεις τῶν $x$ καί $t$. Ἄν τώρα ἡ καμπύλη $x = \xi_k(t)$ ἱκανοποιεῖ τή διαφορική ἐξίσωση $x' = \lambda_k(x,t)$ τότε ἐπί τοῦ γραφήματός της ἡ $v^k$ θά ἱκανοποιεῖ

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} v^k(\xi_k(t), t) &= v_t^k + \xi_k' v_x^k \\ &= v_t^k + \lambda_k v_x^k \\ &= \sum_{i=1}^{n} c_{ki} v^i + d^k \end{aligned} \tag{7.18}$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ συνήθη διαφορική ἐξίσωση ἐπί τῆς $k$-χαρακτηριστικῆς. Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι ἀπό κάθε σημεῖο $(x,t)$, τοῦ *θετικοῦ ἡμιεπιπέδου*, $t > 0$, εἴχαμε $n$ *ἀνάδρομες χαρακτηριστικές* πού καταλήγουν στόν ἄξονα τῶν $x$. Ἤτοι: Λύσεις $\chi_k = \chi_k(t; X, T)$, $k = 1, \ldots, n$, τῶν προβλημάτων ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = \lambda_k(x,t) \\ x(T; X, T) = X\,. \end{cases}$$

Τότε ὁλοκληρώνοντας τήν (7.18) λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} v^k(X,T) &= v^k(\chi_k(0; X, T), 0) + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^{n} c_{ki} v^i + d_k \right) dt\,, \\ &= f_k(\chi_k(0; X, T)) + \int_0^T \left( \sum_{i=1}^{n} c_{ki} v^i + d_k \right) dt\,, \end{aligned}$$

ὅπου $k = 1, \ldots, n$. Μέσω αὐτῆς τῆς διαδικασίας, μετετράπη τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν σέ *Ὁλοκληρωτική Ἐξίσωση* τῆς μορφῆς:

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{b} + \mathcal{S}\boldsymbol{v}\,, \tag{7.19}$$

ὅπου $\boldsymbol{b} = (b^1, \ldots, b^n)$, μέ

$$b^k(x,t) = f^k(\chi_k(0; x, t)) + \int_0^t d^k(\chi_k(s; x, t), s)\, ds\,, \tag{7.20}$$

ἐνῶ ὁ *Γραμμικός Ὁλοκληρωτικός Τελεστής* $\mathcal{S}$ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

$$\mathcal{S}\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{w}\,,$$

ὅπου $\boldsymbol{w} = (w^1, \ldots, w^n)$ μέ

$$w^k(x,t) \;=\; \int_0^t \sum_{i=1}^n c_{ki}(\chi_k(s;x,t),s)v^i(\chi_k(s;x,t),s)\,ds\,.$$

Στόχος μας εἶναι νά ἀποδείξουμε ὅτι ἡ (7.19) ἔχει λύση σέ κατάλληλο χῶρο. Ἡ λύση θά ἀποτελεῖ σταθερό σημεῖο τῆς ἀπεικονίσεως

$$\mathcal{F}\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{b} + \mathcal{S}\boldsymbol{v}\,,$$

τό ὁποῖο θά προκύψει ὡς ὅριο τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας[4]

$$\boldsymbol{v}_{n+1} \;=\; \boldsymbol{b} + \mathcal{S}\boldsymbol{v}_n\,. \tag{7.21}$$

Ἡ σύγκλιση αὐτῆς τῆς ἀκολουθίας προκύπτει ἀπό τό γεγονός ὅτι ἡ $\mathcal{S}$ ἀποτελεῖ συσταλτική ἀπεικόνιση ὡς πρός κατάλληλη νόρμα καί βεβαίως κατάλληλο χῶρο Banach. Ὡς πρώτη δοκιμή θά χρησιμοποιήσουμε τό χῶρο τῶν συνεχῶν καί φραγμένων συναρτήσεων ἀπό τό $\mathbb{R}\times[0,T]$ στόν $\mathbb{R}^n$, δηλαδή τό χῶρο πού θά συμβολίζουμε μέ $C_b(\mathbb{R}\times[0,T])$, μέ νόρμα

$$||\boldsymbol{u}||_\infty \;=\; \sup_{x,t,k} |u^k(x,t)|\;,$$

[4] Ἡ ἀκολουθία αὐτή εἶναι ἐν πολλοῖς ὑπομιμνήσκουσα τῆς ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας Picard ἡ ὁποία χρησιμοποιήθηκε στήν κατασκευή ἀναδρομικῆς ἀκολουθίας

$$\begin{aligned}\varphi_0(t) \;&=\; \xi\,,\\ \varphi_{n+1}(t) \;&=\; \xi + \int_\tau^t f(s,\varphi_n(s))\,ds\,,\end{aligned}$$

συγκλίνουσας στή λύση προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} x' = f(t,x)\\ x(\tau) = \xi\,,\end{cases}$$

συνήθων διαφορικῶν ἐξισώσεων. Στήν πραγματικότητα ἐφαρμόζεται ἀκριβῶς ἡ ἴδια ἰδέα.

ἡ ὁποία καί τόν καθιστᾶ πράγματι χῶρο Banach. Εὔκολα διαπιστοῦται ὅτι

$$||\boldsymbol{\mathcal{S}u}||_\infty \;\le\; T \sup_{k,t,x} \sum_{i=1}^{n} |c_{ki}(x,t)| \cdot ||\boldsymbol{u}||_\infty \,,$$

ἀπ'ὅπου προκύπτει ἕνα ἄνω φράγμα τῆς νόρμας τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{S}$ ἡ ὁποία ὁρίζεται ὡς

$$||\mathcal{S}||_\infty \;=\; \sup_{||v||_\infty = 1} ||\boldsymbol{\mathcal{S}v}||_\infty \,.$$

Δηλαδή

$$||\mathcal{S}||_\infty \;\le\; T \sup_{k,t,x} \sum_{i=1}^{n} |c_{ki}(x,t)| \;=\; s(T)\,.$$

Προφανῶς γιά κατάλληλο $T > 0$ θά ἔχουμε ὅτι $s(T) < 1$ καί ὡς ἐκ τούτου ὁ τελεστής $\mathcal{S}$ καθίσταται συσταλτικός. Γιά ἕνα τέτοιο $T$ θά ἰσχύει ὅτι $||\mathcal{S}||_\infty < 1$ καθώς καί ὅτι $||\mathcal{S}^n||_\infty \le ||\mathcal{S}||_\infty^n < 1$ . Θά χρειαστοῦμε τό πιό κάτω *Λῆμμα*:

**Λῆμμα 7.3.1** Ἔστω $B$ χῶρος Banach καί $\mathcal{T} : B \to B$ φραγμένος τελεστής νόρμας $||\mathcal{T}|| < 1$, τότε γιά κάθε $w \in B$ ἡ ἐξίσωση $v = w + \mathcal{T}v$, ἔχει μοναδική λύση στόν $B$.

**Ἀπόδειξη :** Ὁρίζουμε τήν ἀναδρομική ἀκολουθία

$$v_0 = 0\,, \quad v_{n+1} \;=\; w + \mathcal{T}v_n\,.$$

Τότε

$$v_{n+1} - v_n \;=\; \mathcal{T}(v_n - v_{n-1}) \;=\; \mathcal{T}^{n-1}(v_1 - v_0) \;=\; \mathcal{T}^{n-1}w\,,$$

ὁπότε

$$v_n \;=\; \sum_{k=1}^{n}(v_k - v_{k-1}) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\mathcal{T}^{k-1}(v_1 - v_0) \;=\; \sum_{k=1}^{n}\mathcal{T}^{k-1}w\,.$$

Ἡ ἀκολουθία $\{v_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ εἶναι ἀκολουθία Cauchy. Πράγματι

$$||v_m - v_n|| \le \sum_{k=m+1}^{n} ||\mathcal{T}^k w|| \le \sum_{k=m+1}^{n} ||\mathcal{T}||^k \cdot ||w|| \le ||\mathcal{T}||^m \frac{||w||}{1-||\mathcal{T}||}\,.$$

Ὡς ἐκ τούτου συγκλίνει καί λόγω τῆς συνέχειας τοῦ τελεστοῦ $\mathcal{T}$ τό ὅριο $v$ τῆς ἀκολουθίας θά ἱκανοποιεῖ $v = w + \mathcal{T}v$. □.

Τό ὅριο τῆς ἀκολουθίας (7.21) ἀποτελεῖ μέλος τοῦ συνόλου $C_b(\mathbb{R}\times[0,T])$ καί ὡς ἐκ τούτου δέν ὑποχρεοῦται νά ἀποτελεῖ συνεχῶς διαφορίσιμη συνάρτηση, ὥστε νά ἱκανοποιεῖ τή διαφορική ἐξίσωση. Θεραπεία στό πρόβλημα αὐτό προκύπτει μέσω ἀλλαγῆς τῆς νόρμας. Σταθεροποιῶντας ἐκ νέου τό χρόνο, ὁρίζουμε τό χῶρο $C_b^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ τῶν συναρτήσεων $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}\times[0,T] \to \mathbb{R}^n$ γιά τίς ὁποῖες οἱ $\boldsymbol{u}$ καί $\boldsymbol{u}_x$ εἶναι συνεχεῖς καί φραγμένες. Φυσιολογική νόρμα εἶναι ἡ

$$||\boldsymbol{u}||_{1,\infty} \;=\; \sup_{x.t.k}\left\{|u^k(x,t)|,\, |u^k_x(x,t)|\right\}\,,$$

μέ τήν ὁποία ὁ $C_b^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ καθίσταται ἐπίσης χῶρος Banach. Ἄν $\boldsymbol{u}\in C_b^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ τότε καί $\mathcal{S}\boldsymbol{u}\in C_b^1(\mathbb{R}\times[0,T])$ ἐπίσης μέ τήν προϋπόθεση ὅτι τά στοιχεῖα $c_{ik}$, τοῦ πίνακα $C$, εἶναι συνεχεῖς καί φραγμένες μέ παραγώγους ὡς πρός $x$ ἐπίσης συνεχεῖς φραγμένες. Διαπιστοῦται εὔκολα ὅτι

$$||\mathcal{S}||_{1,\infty} \le T\left(\sum_{k=1}^{n}\left(\sup_{i,t,x}(|c_{ik}(x,t)| + |c_{ik,x}(x,t)|)\right)\sup_{t,X,T}|\chi_{i,X}(t;X,T)|\right) + T\sup_{k,t,x}\sum_{i=1}^{n}|c_{ki}(x,t)| \;=\; s(T)\,.$$

Ἄν ἐπιλέξουμε ἐπαρκῶς μικρό $T$ ὁ τελεστής $\mathcal{S}$ καθίσταται $||\cdot||_{1,\infty}$-συσταλτικός καί ὡς ἐκ τούτου, βάσει τοῦ *Λήμματος 7.3.1*, ἡ ἐξίσωση

$$\boldsymbol{v} \;=\; \boldsymbol{b} + \mathcal{S}\boldsymbol{v}\,,$$

ἔχει μοναδικό σταθερό σημεῖο ἐντός τοῦ $C_b^1(\mathbb{R}\times[0,T])$. Εὔκολα διαπιστοῦται ὅτι τό σταθερό αὐτό σημεῖο θά εἶναι συνάρτηση συνεχῶς διαφορίσιμη καί ὡς πρός $t$. Παρά τό γεγονός ὅτι ἡ μέθοδος πού περιγράψαμε ἐξασφαλίζει λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶν (7.16) μόνο γιά *μικρό* χρόνο $T$, ἀλλεπάλληλη ἐπανάληψη τῆ μεθόδου δύναται νά μᾶς παραχωρήσει καθολική λύση. Συγκεκριμένα, ἄν θεωρήσουμε τά *τελικά δεδομένα* τῆς $\boldsymbol{v}$, δηλαδή τήν $\boldsymbol{v}(\cdot, T)$, ὡς ἀρχικά, μποροῦμε νά ἐπαναλάβουμε τήν προαναφερθεῖσα διαδικασία καί νά παραγάγουμε λύση σέ διάστημα χρόνου $[T, \overline{T}]$. Ἡ διαδικασία αὐτή μπορεῖ νά συνεχισθεῖ ad infinitum καί νά κατασκευάσει καθολική λύση τοῦ προβλήματος ἀρχικῶν τιμῶμ (7.12), ἐφ'ὅσον μᾶς τό ἐπιτρέπουν τά φράγματα τῶν $c_{ik}$, $c_{ik,x}$ καί $\chi_{i,X}$ .

**Ἀσκήσεις 7.3**

1. Δείξατε ὅτι πράγματι οἱ χῶροι $C_b(F)$ καί $C_b^1(F)$ εἶναι χῶροι Banach, ὅπου $F$ κλειστό ὑποσύνολο Εὐκλειδείου χώρου

2. Νά μετατραπεῖ τό μή ὁμοιογενές πρόβλημα (7.6) σέ σύστημα πρώτης τάξεως καί ἀκολούθως νά ἐπιλυθεῖ ὡς σύστημα.

3. Νά γενικευθεῖ ἡ ἀνωτέρω μέθοδος στήν περίπτωση τῶν οἱονεί γραμμικῶν συστημάτων. Συγκεκριμένα, ἔστω ὅτι ἔχουμε τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} \boldsymbol{u}_t + B(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}_x = \boldsymbol{d}(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}), \\ \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, 0) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, 0), \end{cases} \tag{7.22}$$
ὅπου $B = U^{-1}\Lambda U$ καί $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}), \ldots, \lambda_n(\boldsymbol{x}, t, \boldsymbol{u}))$, $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Ὑπό ποιές προϋποθέσεις ἐξασφαλίζεται τοπική (στό χρόνο) λύση τοῦ (7.22);

## 7.4 Ἡ ἐξίσωση κύματος στίς $n$ διαστάσεις

Σ'ὅτι ἀκολουθεῖ θά μελετηθεῖ τό πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν
$$\begin{cases} u_{tt} = c^2 \Delta u \\ \\ u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x), \end{cases} \tag{7.23}$$
ὅπου $x \in \mathbb{R}^n$, ἐνῶ $t > 0$.

Ὁ τελεστής $\Box = \partial^2/\partial t^2 - c^2\Delta$ ὀνομάζεται *Τελεστής d'Alembert*.

## 7.4.1 Μέθοδος τῶν σφαιρικῶν μέσων ὅρων

Ἔστω $v \in C(\mathbb{R}^n)$ καί $r > 0$. Ὁρίζουμε ὡς $M^u(x,r)$ τό μέσο ὅρο τῶν τιμῶν τῆς $u$ ἐπί τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας μέ κέντρο $x$ καί ἀκτίνα $r$. Δηλαδή:

$$\begin{aligned} M^u(x,r) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(x,r)} u(s)\, ds \\ &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}} \int_{S(0,r)} u(x+s)\, ds \\ &= \frac{1}{\omega_n} \int_{S(0,1)} u(x+rs)\, ds\,. \end{aligned}$$

Ὁ ἀνωτέρω τύπος μᾶς ἐπιτρέπει νά ὁρίσουμε τήν $M^u(x,r)$ γιά κάθε $r \in \mathbb{R}$. Εἶναι μάλιστα, ἡ ἀνωτέρω συνάρτηση, ἀρτία ὡς πρός $r$.

**Παρατηρήσεις**

1. Ἄν $u \in C^k(\mathbb{R}^n)$ τότε εὔκολα προκύπτει ὅτι $M^u \in C^k(\mathbb{R}^{n+1})$.

2. Ἡ $u$ λαμβάνεται ἀπό τήν $M^u$ μέσω ὁρίου:

$$\lim_{r\to 0} M^u(x,r) = u(x)\,. \tag{7.24}$$

### Ὁ τύπος τοῦ Darboux[5]

Ἔστω τώρα ὅτι $u \in C^2(\mathbb{R}^n)$, ὁπότε ἐφαρμόζοντας τήν ταυτότητα Green λαμβάνουμε:

$$\begin{aligned} \int_{B(x,r)} \Delta u(y)\, dy &= \int_{S(x,r)} \nabla u(s) \cdot \nu(s)\, ds \\ &= \int_{S(0,r)} \nabla u(x+s) \cdot \nu(s)\, ds \end{aligned}$$

[5] Jean Gaston Darboux (1842-1917).

$$
\begin{aligned}
&= r^{n-1}\int_{S(0,1)} \nabla u(x+rs)\cdot s\,ds\\
&= r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}\int_{S(0,1)} u(x+rs)\,ds\\
&= \omega_n r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M^u(x,r)
\end{aligned}
$$

Ὡς ἐκ τούτου

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial r}M^u(x,r) &= \frac{1}{\omega_n r^{n-1}}\int_0^r \left(\varrho^{n-1}\Delta_x\int_{S(0,1)} u(x+\varrho s)\,ds\right)d\varrho\\
&= \frac{1}{r^{n-1}}\int_0^r \varrho^{n-1}\Delta_x M^u(x,\varrho)\,d\varrho\,,
\end{aligned}
$$

ἀπ'ὅπου, παραγωγίζοντας ὡς πρός $r$, προκύπτει ὅτι

$$
\frac{\partial}{\partial r}\left(r^{n-1}\frac{\partial}{\partial r}M^u(x,r)\right) = \Delta_x\left(r^{n-1}M^u(x,r)\right)\,,
$$

καί ἐν τέλει ὅτι

$$
\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M^u(x,r) = \Delta_x M^u(x,r)\,, \tag{7.25}
$$

πού ἀποτελεῖ τόν *Τύπο τοῦ Darboux.*

**Ἀναδιατύπωση τοῦ προβλήματος Cauchy**:

Ἔστω τώρα $u=u(x,t)$ λύση τοῦ (7.23). Τότε μελετώντας τούς σφαιρικούς μέσους τῆς $u$ ὡς πρός $x$ λαμβάνουμε τά ἀκόλουθα: Ἔστω

$$
M^u(x,t,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)} u(x+rs)\,ds\,.
$$

Τότε

$$
\Delta_x M^u(x,t,r) = \frac{1}{\omega_n}\int_{S(0,1)} \Delta_x u(x+rs)\,ds
$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{c^2\omega_n}\int_{S(0,1)} u_{tt}(x+rs)\,ds \\
&= \frac{1}{c^2\omega_n}\frac{\partial^2}{\partial t^2} \\
&= \int_{S(0,1)} u_{tt}(x+rs)\,ds \\
&= \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}M^u(x,t,r)\,.
\end{aligned}$$

Λόγω λοιπόν τοῦ (7.25) ἡ $M^u(x,t,r)$ θά ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}M^u(x,t,r) \;=\; c^2\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{n-1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)M^u(x,r)\,. \tag{7.26}$$

Ἄν τώρα $n$ περιττός καί συγκεκριμένα ἄν $n = 2m+1$ τότε πολλαπλασιάζοντας τήν (7.26) ἐπί $r^m$ λαμβάνουμε τήν

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(r^m M^u(x,t,r)\right) \;=\; c^2\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(r^m M^u(x,r)\right)\,, \tag{7.27}$$

ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τή μονοδιάστατη ἐξίσωση κύματος. Εἰδικά στήν περίπτωση $n = 3$ ἔχουμε ὅτι $m = 1$ καί λαμβάνουμε ὅτι ἡ συνάρτηση $rM^u(x,t,r)$ ἱκανοποιεῖ τήν ἐξίσωση

$$\left(rM^u\right)_{tt} \;=\; c^2\left(rM^u\right)_{xx}\,,$$

μέ τίς ἀκόλουθες ἀρχικές συνθῆκες:

$$rM^u(x,0,r) \;=\; rM^\varphi(x,0,r) \quad \text{καί} \quad rM^u_t(x,0,r) \;=\; rM^\psi(x,0,r)\,.$$

Ἄρα, ἐφαρμόζοντας τόν τύπο d'Alembert θά ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned}
rM^u(x,t,r) \;=\; &\frac{1}{2}\left((r-ct)M^\varphi(x,0,r-ct)+(r+ct)M^\varphi(x,0,r+ct)\right) \\
&+\frac{1}{2c}\int_{r-ct}^{r+ct}\varrho M^\psi(x,0,\varrho)\,d\varrho\,.
\end{aligned}$$

Ἡ $u = u(x,t)$ μπορεῖ νά προκύψει ὡς ἀπό τήν (7.24). Προκύπτει ὅμως καί ὡς

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \lim_{r\to 0}\left(M^u(x,t,r) + rM_r^u(x,t,r)\right) \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}(rM^u(x,t,r)) \\ &= \lim_{r\to 0}\frac{\partial}{\partial r}(rM^u(x,t,r)) \end{aligned}$$

# Κεφάλαιο 8

# Παραβολικες ἐξισώσεις

## 8.1 Ἡ ἐξίσωση θερμότητος

Ἡ ἐξίσωση θερμότητος

$$u_t \;=\; \kappa \Delta u\,, \tag{8.1}$$

ἀπότελεῖ τή χαρακτηριστικότερη παραβολική ἐξίσωση. Περιγράφει τήν ἐξέλιξη τῆς κατανομῆς θερμοκρασιῶν σέ ὁμοιογενές μέσο στίς μία, δύο ἤ τρεῖς διαστάσεις. Στήν (8.1), τό $u(x,t)$ ἀποτελεῖ τή θερμοκρασία τή χρονική $t$ στή θέση $x$, ἐνῶ τό $\kappa$ ἀποτελεῖ τή σταθερά *θερμικῆς ἀγωγιμότητος* καί εἶναι θετική. Ἡ (8.1) συνοδεύεται συνήθως ἀπό συνθῆκες πού συνθέτουν εἴτε πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν, ὅταν μᾶς δίδεται ἡ ἀρχική κατανομή θερμοκρασιῶν, εἴτε πρόβλημα ἀρχικῶν/συνοριακῶν τιμῶν, ὅταν τό ὁμοιογενές μέσο στό ὁποῖο μελετᾶται ἡ ἐξέιλιξη τῆς κατανομῆς θερμοκρασιῶν ἔχει σύνορο. Ἡ ἐξίσωση θερμότητος ἔχει καί μή ὁμοιογενῆ ἐκδοχή

$$u_t \;=\; \kappa \Delta u + f\,,$$

μέ τό μή ὁμοιογενῆ ὅρο νά ἀντιπροσωπεύει παροχή θερμότητος ἀπό ἐξωτερικό αἴτιο. Ἀπό τώρα καί στό ἑξῆς θά ὑποθέτουμε ὅτι ἡ χωρική μεταβλητή $x$ ἀποτελεῖ στοιχεῖο τοῦ $\mathbb{R}^n$ καί πρόβλημα ἀναφορᾶς θά ἀποτελεῖ τό σύνηθες πρόβλημα ἀρχικῶν τιμῶν

$$\begin{cases} u_t \;=\; \kappa\Delta u\,, \\ \\ u(x,0) \;=\; f(x)\,. \end{cases} \tag{8.2}$$

Εἰδική λύση τῆς (8.1) ἀποτελεῖ ἡ

$$u(x,t) \;=\; e^{i\xi\cdot x-\kappa t|\xi|^2}\,, \tag{8.3}$$

ἡ ἀποτελεῖ λύση τοῦ (8.2) γιά ἀρχική συνθήκη

$$f(x) \;=\; e^{\xi\cdot x}\,,$$

δηλαδή μιά *συχνότητα*. Βλέπουμε λοιπόν ὅτι ὅσο μεγαλύτερη ἡ συχνότητα $\xi$, τόσο ταχύτερα *πεθαίνει* ἡ λύση. Ἄν τώρα ἦταν δυνατόν νά ἀναλυθεῖ ἡ αὐθαίρετα ἐπιλεγμένη ἀρχική $f$ ὡς γραμμικός συνδυασμός τε΄τοιων συχνοτήτων τότε λύση τοῦ (8.2) θά ἦταν ἕνας γραμμικός συνδυασμός συναρτήσεων τῆς μορφῆς (8.3). Αὐτό εἶναι πράγματι ἐφικτό γιά ἀρκετά καλές συναρτήσεις $f$. Συγκεκριμένα γιά στοιχεῖα τῆς *κλάσεως τοῦ Schwartz* $\mathcal{S}$ πού ὁρίζεται ὡς ἑξῆς:

*Ἔστω* $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$ *πολυδεῖκτες καί* $f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ . *Θέτουμε*

$$M_{\alpha,\beta}(f) \;=\; \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha D^\beta f(x)\right|\,,$$

*ὁπότε ἔχουμε τό πιό κάτω σύνολο*

$$\mathcal{S} \;=\; \{f\in C^\infty(\mathbb{R}^n)\,|\,M_{\alpha,\beta}(f)<+\infty \text{ γιά κάθε } \boldsymbol{\alpha},\,\boldsymbol{\beta}\}\;.$$

Τά στοιχεῖα τῆς κλάσεως Schwartz ἀναλύονται ὡς *ἀθροίσματα* συχνοτήτων:

**Λῆμμα 8.1.1** *¿'Estw* $f\in\mathcal{S}$ . *T'ote*

$$f(x) \;=\; (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi\,,$$

*¡'opou*

$$\hat{f}(\xi) \;=\; (\mathcal{F}f)(\xi) \;=\; (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{-i\xi\cdot x}f(x)\,dx\,. \tag{8.4}$$

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε W.Rudin, *Functional Analysis.* $\square$.

Ὁ τελεστής $\mathcal{F}$ πού ὁρίζεται ἀπό τήν (8.4) ὀνομάζεται *μετασχηματισμός Fourier.* Ἔχει δέ τίς ἑξῆς ἰδιότητες:

**Πρόταση 8.1.2** *¿'Estw $\mathcal{S}$ ¡h kl'ash* Schwartz *¿ep'i to˜u* $\mathbb{R}^n$. *T'ote ¿isq'uoun t'a ¿ak'olouja:*

1. *¡O metasqhmatism'oc* Fourier $\mathcal{F}f = \hat{f}$, *¡or'izetai gi'a k'aje stoiqe˜io t˜hc $f|1|in\mathcal{S}$ ka'i ¿apotele˜i telest'h 1-1 ka'i ¿ep'i st'hn $\mathcal{S}$.*
2. *¡O ¿ant'istrofoc metasqhmatism'oc* Fourier *¡or'izetai ¡wc*

$$f(x) \;=\; (\mathcal{F}^{-1}\hat{f})(x) \;=\; (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} e^{ix\cdot\xi}\hat{f}(\xi)\,d\xi\,.$$

3. *¿Isq'uoun ¿ep'ishc t'a ¡ex˜hc*

$$\mathcal{F}\,(D^{\alpha}f) \;=\; (i\xi)^{\alpha}(\mathcal{F}f)(\xi)$$

*grammik'o*

**Ἀπόδειξη :** Βλέπε W.Rudin, *Functional Analysis.* $\square$.